SỰ HỘI TỤ HẦU CHẮC CHẮN CỦA TỔNG CÓ TRỌNG SỐ CỦA CÁC BIẾN NGẪU NHIÊN ĐỘC LẬP

PHẦN I. LỜI NÓI ĐẦU

Luật mạnh số lớn của các biến ngẫu nhiên độc lập là đề tài tương đối cổ điển và đã có nhiều ứng dụng trong thống kê toán học. Trong luận văn này chúng ta tìm các điều kiện áp đặt lên một dãy số phức $\{b_n\}$ với $|b_n| \to \infty$ sao cho có được sự hội tụ hầu khắp nơi của tổng có trọng số dạng Pruitt đối với các đại lượng ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối và X_1 khả tích. Tương tự, các điều kiện đặt ra với dạng tổng quát Zygmund – Marcinkiewicz khi moment cấp p của X_1 bị chặn với $1 < p < 2$. Đối với trường hợp dãy martingale hiệu cũng có kết quả mở rộng tương tự kết quả của Azuma. Cuối cùng, ta xét một ứng dụng đặc trưng cho hồi quy tuyến tính.

PHẦN II. NỘI DUNG

CHƯƠNG I. CÁC KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

CHƯƠNG II. CÁC KẾT QUẢ CHÍNH, CÁC THÍ DỤ VÀ ỨNG DỤNG

CHƯƠNG II. CÁC KẾT QUẢ CHÍNH, CÁC THÍ DỤ VÀ ỨNG DỤNG

2.1. Giới thiệu.

2.2. Tổng có trọng số của các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối.

2.3. Tổng có trọng số của martingale hiệu L_p − bị chặn.

2.4. Tổng có trọng số của martingale hiệu bị chặn đều.

2.5. Luật mạnh số lớn cho các trung bình được điều tiết của các biến độc lập cùng phân phối.

2.6. Tính nhất quán mạnh trong hồi qui tuyến tính với nhiễu độc lập cùng phân phối.

2.1. Giới thiệu.

Trong suốt chương 2, chúng tôi sử dụng định nghĩa sau đây:

Giả sử rằng với mọi dãy không âm $\{\alpha_n\}$, (không giảm), chúng ta định nghĩa hàm đếm $N_{\{\alpha_n\}}(t) := \#\{n: \alpha_n \leq t\}$ $t > 0$. Chú ý rằng $N_{\{\alpha_n\}}(t)$ là hữu hạn với mọi $t > 0$ khi và chỉ khi $\alpha_n \to \infty$ (vì tồn tại 1 dãy con bị chặn $\alpha_{n_k} \leq M$ suy ra $N_{\{\alpha_n\}}(t) = \infty$ với mọi $t > M$).

Một số sách ký hiệu $N_{\{\alpha_n\}}(t) := card\{n: \alpha_n \leq t\}$.

Những tính chất của hàm đếm này sẽ được sử dụng thường xuyên trong nghiên cứu của chúng ta.

2.2. Tổng có trọng số của các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối.

***Định lí 2.2**. Gọi $\{b_n\}$ là một dãy khác không các số phức. Đặt $N(t) = \#\{n \geq 1 : |b_n| \leq t\}$ và giả sử rằng $\limsup_{t\to\infty} N(t)/t^p < \infty$, với một số giá trị $1 \leq p < 2$. Khi đó với một dãy biến ngẫu nhiên $\{X_n\}$ độc lập cùng phân phối, qui tâm, khả tích, chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{b_n}$ hội tụ hầu chắc chắn nếu một trong các điều kiện sau được thỏa mãn :*

- *(i)* $1 < p < 2$ và $E[|X_1|^p] < \infty$.
- *(ii)* $p = 1$ và $E[|X_1|\log^+|X_1|] < \infty$.
- *(iii)* $p = 1$ và X_1 là đối xứng.

Hệ quả 2.3. *Gọi* $\{\omega_n\}$ *là một dãy trọng số với* $W_n = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k \to \infty$, *sao cho*$\limsup N(t)/t < \infty$. *Thì chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n X_n}{W_n}$*hội tụ hầu chắc chắn với bất kì* $\{X_n\}$ *là dãy biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối, khả tích, qui tâm với* X_1 *đối xứng hoặc* $E[|X_1|\log^+|X_1|] < \infty$.

Mệnh đề 2.5. *Gọi* $\{b_n\}$ *là một dãy khác không các số phức, và đặt* $N(t) = \#\{n \geq 1 : |b_n| \leq t\}$. *Với* $p \geq 1$ *các mệnh đề dưới đây là tương đương:*

i) $\limsup_{t\to\infty} N(t)/t^p < \infty$.

ii) *Dãy* $\frac{X_n}{b_n}$ *hội tụ hầu chắc chắn tới 0 với mọi dãy biến ngẫu nhiên* $\{X_n\}$ *độc lập cùng phân phối, đối xứngvới* $E|X_1|^p < \infty$.

Định lí 2.9. *Gọi* $\{a_n\}$ *là một dãy số phức và* $\{A_n\}$ *là một dãy không giảm các số dương tiến đến vô cùng. Các mệnh đề dưới đây từ (i)-(iv) là tương đương:*

(i) Hàm $N(t) = \#\{n \geq 1: A_n/|a_n| \leq t\}$ *là hữu hạn giá trị với mọi* $t \geq 0$ *và* $\limsup_{t\to\infty} N(t)/t < \infty$.

(ii) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n X_n}{A_n}$ *hội tụ hầu chắc chắn với dãy biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối, đối xứng, khả tích.*

(iii) $\frac{1}{A_n}\sum_{k=1}^{n} a_k X_k$ *hội tụ hầu chắc chắn tới 0 với dãy biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối, đối xứng, khả tích.*

(iv) Dãy $\frac{a_n X_n}{A_n}$ *hội tụ hầu chắc chắn tới 0 với dãy biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối, đối xứng, khả tích.*

Nếu thêm vào đó chúng ta giả sử rằng

$$\sup_{n\geq 1} \frac{\sum_{k=1}^{n} |a_k|}{A_n} < \infty \tag{6}$$

thì từ (i) suy ra rằng $\frac{1}{A_n}\sum_{k=1}^{n} a_k X_k$ *hội tụ hầu chắc chắn tới 0 với mọi dãy các biến ngẫu nhiên* $\{X_n\}$ *khả tích, qui tâm của các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối, khả tích, qui tâm (không cần thiết đối xứng).*

2.3. Tổng có trọng số của martingale hiệu L_p- bị chặn.

Định lí 3.2. *Gọi* $\{a_n\}$ *là một dãy số phức,* $\{A_n\}$ *là một dãy số dương không giảm tiến đến vô cùng, và (với* $A/0 = \infty$*) đặt* $N(t) = \#\{n \geq 1 : A_n/|a_n| \leq t\}$*. Với mỗi* $1 < p \leq 2$*, những khẳng định sau là tương đương:*

(i) Hàm $N(t)$ *là hữu hạn giá trị và* $\int_1^\infty \frac{N(t)}{t^{p+1}} dt$ *hội tụ.*

(ii) Chuỗi $\sum_{n=1}^\infty (\frac{|a_n|}{A_n})^p$ *hội tụ.*

(iii) Chuỗi $\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n Y_n}{A_n}$ *hội tụ hầu chắc chắn với mọi* $\{Y_n\}$ *dãy martingale hiệu* L_p*- bị chặn.*

(iv) Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n X_n}{A_n}$ hội tụ hầu chắc chắn với mọi dãy $\{X_n\}$ độc lập qui tâm, L_p- bị chặn.

(v) $\frac{1}{A_n} \sum_{k=1}^{n} a_k X_k$ hội tụ hầu chắc chắn tới 0 với mọi dãy $\{X_n\}$ độc lập, qui tâm, L_p- bị chặn.

2.4. Tổng có trọng số của martingale hiệu bị chặn đều.

Kí hiệu. Với $\{f_k\} \subset L_\infty$, đặt $S_n = \sum_{k=1}^n f_k$, $S_n^* = \max_{1\le l\le n}\left|\sum_{k=1}^l f_k\right|$, $B_n = \sum_{k=1}^n \|f_k\|_\infty^2$, và

(9) $$R_n = \sum_{k=1}^n \|f_k\|_\infty^2 + \sum_{k=1}^n \max_{k\le s\le n}\left\| 2f_k \sum_{i=k+1}^s E[f_i \mid \mathcal{F}_k]\right\|_\infty .$$

Khi $\{f_n\}$ là một martingale hiệu, $R_n = B_n$.

Định lí dưới đây là kết quả chính của phần này, chứng minh của nó tổng quát phương pháp của Tsuchikura.

Định lí 4.6. *Gọi $\{A_n\}$ là một dãy không giảm các số dương, tiến đến vô cùng, sao cho* $\limsup_{n\to\infty} A_{n+1}/A_n < \infty$. *Gọi $\{f_n\} \subset L_\infty(\Omega,P)$ là một dãy của các biến ngẫu nhiên qui tâm, với R_n được định nghĩa bởi (9). Nếu*

(12) $$\lim_{n\to\infty} \frac{R_n \log\log A_n}{A_n^2} = 0.$$

được đảm bảo, thì $\frac{1}{A_n}\sum_{k=1}^{n} f_k$ hội tụ hầu chắc chắn tới 0.

Tương tự, $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{1}{A_n}\sum_{k=1}^{n} f_k\right| < \infty$ *(h.c.c), nếu:*

(13) $$\limsup_{n\to\infty} \frac{R_n \log\log A_n}{A_n^2} = 0.$$

***Hệ quả 4.12.**. Gọi $\{\omega_n\}$ là một dãy các số không âm, và đặt $W_n = \sum_{k=1}^{n} \omega_k$. Giả sử rằng $\sum_{k=1}^{n} \omega_k$ phân kì. Nếu*

(19) $$\lim_{n\to\infty} \frac{(\omega_1^2 + \cdots + \omega_n^2)\log\log W_n}{W_n^2} = 0.$$

Trong trường hợp đặc biệt nếu

(20) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\omega_n \log\log W_n}{W_n} = 0.$$

thì với mọi dãy $\{X_n\}$ của các hiệu martingale bị chặn đều, trung bình có trọng số $\frac{1}{W_n}\sum_{k=1}^{n} \omega_k X_k$ hội tụ tới 0 hầu chắc chắn.

Định lí 4.13. *Gọi* $\{\omega_n\}$ *là một dãy các số không âm, và đặt* $M_n = \sum_{k=1}^{n} \omega_k^2$. *Giả sử rằng* $\sum_{k=1}^{n} \omega_k$ *phân kì và* $\limsup_{n\to\infty} \omega_n^2/M_n < 1$. *Nếu*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_n \log\log \mathrm{M_n}}{W_n^2} = 0 \tag{21}$$

thì với mọi dãy $\{X_n\}$ *của hiệu martingale bị chặn đều , trung bình có trọng số* $\frac{1}{W_n}\sum_{k=1}^{n} \omega_k X_k$ *hội tụ tới 0 hầu chắc chắn.*

2.5. Luật mạnh số lớn cho trung bình được điều tiết của các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối.

Định lí 5.2.. *Gọi $\{c_n\}$ là một dãy các số, với $\gamma > 1$ thỏa mãn*

$$\sup_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{n}|c_k|(\log^+|c_k|)^{\gamma} < \infty. \tag{26}$$

thì với mọi dãy $\{X_n\}\subset L_1(P)$ độc lập cùng phân phối qui tâm, những điều dưới đây được đảm bảo:

i) $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} c_k X_k$ *hội tụ tới 0 hầu chắc chắn*

ii) Nếu $\{X_n\}$ là đối xứng thì $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n X_n}{n}$ hội tụ hầu chắc chắn.

(iii) Nếu $E[|X_1|\log^+|X_1|] < \infty$, thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n X_n}{n}$ hội tụ hầu chắc chắn.

2.6. Tính nhất quán mạnh trong hồi qui tuyến tính với nhiễu độc lập cùng phân phối.

Trong không gian mô hình hồi qui tuyến tính một chiều $\xi_k = \beta c_k + X_k$, k =1,2… , ước lượng bình phương bé nhất (LSE) của β, dựa trên n phép đo đầu tiên, được định nghĩa bởi $\hat{\beta}_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} \overline{c_k}\ \xi_k}{\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2}$. Một câu hỏi tự nhiên là trong trường hợp nào sai số của ước lượng $\frac{\sum_{k=1}^{n} \overline{c_k}\ X_k}{\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2}$ tiến đến 0 khi n tiến đến vô cùng (tính vững mạnh của phương pháp bình phương bé nhất). Với trường hợp $\{X_n\}$ độc lập cùng phân phối với phương sai hữu hạn, xem Drygas [Dr].

Định lí 6.1. Gọi $\{X_n\} \subset L_p(P)$, $1 \leq p \leq 2$, là một dãy biến ngẫu nhiên đối xứng, độc lập cùng phân phối, gọi $\{c_n\}$ là một dãy các số phức, với $c_1 \neq 0$. Nếu

$$\int \frac{|X_1|^2 1_{\{|X_1| \geq 1\}}}{\sum_{k=1}^{[|X_1|^p]} |c_k|^2} \, dP < \infty \tag{27}$$

thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n X_n}{\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2}$ hội tụ hầu chắc chắn.

Định lí 6.4. *Gọi* $1 < p \leq 2$, *và giả sử rằng* $\{c_k\}$ (*với* $c_1 \neq 0$) *thỏa mãn*

(29) $$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n^{(2-p)/p}} \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 > 0$$

thì với mọi dãy $\{X_n\}$ *độc lập cùng phân phối qui tâm với* $E[|X_1|^p] < \infty$, *chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n X_n}{\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2}$ *hội tụ hầu chắc chắn.*

XIN CHÂN THÀNH CẢM ƠN THẦY CÔ VÀ QUÍ VỊ ĐÃ CHÚ Ý THEO DÕI!!!