Bài 1. Cho các ma trận: $A=\begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ 3 & -5 & 7\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}7 & 1 & -2\\ 0 & 4 & 3\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}-1 & 34\\ 2 & -6\end{bmatrix}$

Hãy thực hiện các phép tính sau: $A+B$, $A-3B$, A^t+2B^t, A^tB, $A.B^t$, $A.B^tC$.

ĐS: $A^tB=\begin{bmatrix}14 & 14 & 5\\ 28 & -16 & 23\\ 42 & 34 & 9\end{bmatrix}$, $A.B^t=\begin{bmatrix}6 & 34\\ 2 & 1\end{bmatrix}$, $A.B^tC=\begin{bmatrix}62 & 0\\ 0 & 62\end{bmatrix}$

Bài 2. Cho hai ma trận: $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 0 & 2\end{bmatrix}$ và $B=\begin{bmatrix}-2 & -6 & 5\\ -1 & -4 & 3\\ 3 & 9 & -7\end{bmatrix}$.

1. Tính AB và BA. Từ đó hãy cho biết ma trận A có khả nghịch không? chỉ ra ma trận nghịch đảo (nếu có) của ma trận A.
   ĐS: $AB=I$, $BA=I$, trong đó I là ma trận đơn vị cấp 3.
2. Tìm ma trận X (nếu có) thỏa mãn: $XA=B$.
   ĐS: $(XA)B=B^2 \Rightarrow X(AB)=B^2 \Rightarrow X=B^2=...$

Bài 3. Thực hiện các phép tính :

1. $\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ 3\\ 1\end{bmatrix}$; 2. $\begin{bmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}^3$ *ĐS:* $\begin{bmatrix}14\\ 10\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix}-1 & 27 & -9\\ 18 & -28 & 0\\ 0 & 9 & -1\end{bmatrix}$.

Bài 4. Cho ma trận : $A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}$. Tính $\det(A)$, $\det(A^t)$, $\det(5A^t)$, $\det(A^4)$.

ĐS: $\det(A^t)=\det(A)=2$; $\det(5A^t)=5^3.\det(A^t)=250$; $\det(A^4)=2^4=16$.

Bài 5. Tính định thức của các ma trận sau:

$A=\begin{bmatrix}x & 1 & 1\\ 1 & x & 1\\ 1 & 1 & x\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & x\\ 1 & x & 0\end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix}1 & a & 1\\ 2 & 1 & a\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & 1\\ 2 & 2 & 6 & 0\\ -1 & 0 & -3 & 1\\ 4 & 1 & 12 & 0\end{bmatrix}$; $E=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0 & -1\\ 3 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & -1 & 0\end{bmatrix}$.

ĐS: $\det(A)=(x+2)(x-1)^2$; $\det(B)=2x$; $\det(C)=3a^2-4a+2$; $\det(D)=0$; $\det(E)=-45$

Bài 6. Tìm hạng của các ma trận sau:

$$A=\begin{bmatrix}2&7&3&1&6\\3&5&2&2&4\\9&4&1&7&2\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}3&4&1&2\\1&4&7&2\\1&10&17&4\\4&1&3&3\end{bmatrix};\quad C=\begin{bmatrix}0&1&0&1&0\\1&3&1&3&1\\3&5&3&5&3\\7&9&7&9&7\end{bmatrix};\quad D=\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&3&-1\\3&0&2\end{bmatrix}.$$

<u>*HD&ĐS:*</u> Sử dụng biến đổi sơ cấp trên hàng của ma trận, đưa các ma trận đã cho về dạng bậc thang $r(A)=2;\quad r(B)=3;\quad r(C)=2\;;\quad r(D)=3$

(với ma trận vuông D có thể tính $\det(D)$ và thấy $\det(D)\neq 0$)

Bài 7. Cho ma trận: $A=\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&m&-1\\1&-1&3\end{bmatrix}$

1. Tìm m để ma trận A khả nghịch.
2. Với $m=-1$, hãy tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của ma trận A.

<u>*ĐS:*</u> $m\neq-\frac{1}{2}$; $A^{-1}=\begin{bmatrix}4&-5&-3\\1&-2&-1\\-1&1&1\end{bmatrix}$

Bài 8. Cho ma trận: $A=\begin{bmatrix}-1&2&1\\m&1&0\\1&-1&2\end{bmatrix}$

1. Với giá trị nào của m thì hạng của ma trận A bằng 3? Với các giá trị m vừa tìm được thì ma trận A có khả nghịch không?
2. Với $m=-1$, hãy tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của A.

<u>*ĐS:*</u> 1. Hạng của mt vuông A bằng cấp của ma trận khi và chỉ khi $\det(A)\neq 0$. ĐS: $m\neq-\frac{3}{5}$

2. $A^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2.5&-0.5\\1&-1.5&-0.5\\0&0.5&0.5\end{bmatrix}$

Bài 9. Hãy tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của các ma trận sau:

$A=\begin{bmatrix}1&2\\2&5\end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix}0&2&-1\\3&-4&-2\\-1&1&1\end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix}2&3\\4&6\end{bmatrix}$.

<u>*ĐS:*</u> $A^{-1}=\begin{bmatrix}5&-2\\-2&1\end{bmatrix}$; $B^{-1}=\begin{bmatrix}2&3&8\\1&1&3\\1&2&6\end{bmatrix}$.

Bài 10. Giải các hệ phương trình tuyến tính sau

1) $\begin{cases} x-y-2z+t=-2 \\ 2x-y+z+3t=-3 \\ -x+2y+3z-2t=-1 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x_1-2x_2-3x_3+x_4=5 \\ 2x_1-4x_2-3x_3+4x_4=2 \\ 5x_1-10x_2-13x_3+6x_4=20 \end{cases}$;

<u>*ĐS:*</u> 1) $\begin{cases} x=z-5 \\ y=-1-3z \\ z\in\mathbb{R} \\ t=2-2z \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x_1=2x_2 \\ x_2\in\mathbb{R} \\ x_3=-2 \\ x_4=-1 \end{cases}$.

Bài 11.

1. Với giá trị nào của m thì các hệ phương trình sau có nghiệm:

a) $\begin{cases} x-2y+z-t=-1 \\ 3x+y-2z+t=2 \\ x+5y-4z+mt=5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+y+10z-6t=3 \\ x+2y+mz-t=1 \\ 2x+5y-z+mt=2 \end{cases}$.

<u>*HD:*</u> Biến đổi ma trận bổ sung của hệ pttt về dạng bậc thang.

Hệ pttt có nghiệm khi và chỉ khi $r(A)=r(A^{bs})$

<u>*ĐS:*</u> a) $m\neq 3$; b) $m\neq 3$

2. Với giá trị nào của m thì hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất? Có vô số nghiệm?

$$\begin{cases} x+3y-2t=0 \\ -y+2z-t=0 \\ 2x-z+t=0 \\ 4x+y+mz=0 \end{cases}$$

<u>*HD:*</u> $\det(A)=11m+5$ với A là ma trận hệ số của hệ pttt.

Hệ vuông thuần nhất có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\det(A)\neq 0$.

Hệ vuông thuần nhất có vô số nghiệm khi và chỉ khi $\det(A)=0$

Bài 12. Tìm tất cả các ma trận X (nếu có) thỏa mãn:

1. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} X = X \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$; 2. $X\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

<u>*ĐS:*</u> 1. Các ma trận X thỏa mãn pt có dạng: $X=\begin{bmatrix} x & y \\ y & x+y \end{bmatrix}, x, y\in\mathbb{R}$;

2. $X=\begin{bmatrix} -3 & 7 & 2 \\ 1 & -1.5 & 0.5 \end{bmatrix}$

Bài 13. Trong không gian véctơ $\mathbb{R}^3$ cho tập hợp: $W=\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-3y+z=0\}$

1. Véctơ $u=(1;2;3)$ có thuộc W không? Chỉ ra một véctơ (khác véc tơ không) thuộc W.
2. Chứng minh rằng W là một không gian véctơ con của $\mathbb{R}^3$.
3. Tìm một cơ sở, số chiều của không gian W.
4. Chứng minh véctơ $u=(1;2;5)$ thuộc W và tìm tọa độ của u trong cơ sở của W tìm được ở câu hỏi trên.

<u>*ĐS:*</u> 1. không; VD: $u=(1;1;2)\in W$

3. Một cơ sở $S=\{u_1=(3;1;0);u_2=(-1;0;1)\}$; $\dim W=2$

4. $u_S=(2;5)$.

Bài 14. Trong không gian véctơ $\mathbb{R}^4$ cho tập hợp: $V=\left\{(x;y;z;t)\in\mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x \quad\quad +2t=0 \\ y-z-\ \ t=0 \end{cases}\right\}$.

1. Véctơ $u=(1;2;5;4)$ có thuộc V không?
2. Chứng minh rằng V là một không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^4$.
3. Tìm một cơ sở và tính số chiều của V.

<u>*ĐS:*</u> 1. Không; 3. Một cơ sở $S=\{u_1=(0;1;1;0);u_2=(0;1;0;1)\}$; $\dim V=2$.

Bài 15. Trong không gian véctơ $\mathbb{R}^4$ cho tập hợp: $V=\{(x;y;z;t)\in\mathbb{R}^4 \mid y+2z=0\}$.

1. Chứng minh V là một không gian véctơ con của $\mathbb{R}^4$.
2. Tìm một cơ sở, số chiều của không gian V.
3. Chứng minh véctơ $u=(-4;2;-1;1)$ thuộc V và tìm tọa độ của u trong cơ sở tìm được ở trên.

<u>*ĐS:*</u> 2. Một cơ sở $S=\{u_1=(1;0;0;0);u_2=(0;-2;1;0);u_3=(0;0;0;1)\}$; $\dim V=3$.

3. $u_S=(-4;-1;1)$

Bài 16. Các tập hợp sau có là không gian véctơ con của các không gian tương ứng không?

1. $V=\{(x;y;z;t)\mid 2x+3z=1\}$ trong $\mathbb{R}^4$.
2. $V=\{(x;y;z)\mid xy-2z=0\}$ trong $\mathbb{R}^3$.
3. $V=\left\{(x;y;z;t)\middle| \begin{cases} x+2t-3=0 \\ y-t-z=0 \end{cases}\right\}$ trong $\mathbb{R}^4$.

<u>*ĐS:*</u> 1. không; 2. không; 3. không.

Bài 17. Trong không gian véctơ $\mathbb{R}^3$ cho tập hợp: $V=\left\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3 \middle| \begin{cases} x \quad\ \ -2z=0 \\ x-y-\ \ z=0 \end{cases}\right\}$.

1. Chứng minh rằng V là không gian véctơ con của $\mathbb{R}^3$.

2. Tìm một cơ sở và tính số chiều của không gian V.
3. Chứng minh rằng véctơ $u=\left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ thuộc V và tìm tọa độ của u trong cơ sở tìm được ở trên.

ĐS: 2. Một cơ sở $S=\{v=(2;1;1)\}$; $\dim V=1$; 3. $u_S=(2)$

Bài 18. Họ các véc tơ sau độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính:

1. $S=\{u_1=(1;-2;0;4);u_2=(3;-2;1,1);u_3=(2;2;1;3)\}$ trong $\mathbb{R}^4$.
2. $S=\{u_1=(1;-2;0;4);u_2=(3;-2;1,1);u_3=(2;0;1;-3)\}$ trong $\mathbb{R}^4$.
3. $U=\{u_1=(-1;2;4);u_2=(3;-2;2);u_3=(1;0;3);u_4=(1;1;1)\}$ trong $\mathbb{R}^3$.

ĐS: 1. ĐLTT; 2. PTTT; 3. PTTT.

Bài 19.

1. Chứng minh họ vectơ sau là một cơ sở của không gian vectơ $\mathbb{R}^3$:
$$V=\{v_1=(-1;2;4);\, v_2=(3;-2;1);\, v_3=(2;-1;5)\}$$
2. Họ vectơ sau đây có phải là một cơ sở của không gian vectơ $\mathbb{R}^3$ không?
$$U=\{u_1=(-2;3;4);u_2=(3;-2;5);u_3=(5;0;23)\}$$

ĐS: 2. không

Bài 20. Với giá trị nào của m thì hệ vectơ sau đây độc lập tuyến tính? Phụ thuộc tuyến tính?

1. $V=\{v_1=(2;1;1;m);v_2=(2;1;-1,m);v_3=(10;5;-1;5m)\}$ trong $\mathbb{R}^4$.
2. $U=\{u_1=(2;1;2m);u_2=(2;1;-1);u_3=(1+m;2;-3)\}$ trong $\mathbb{R}^3$.
3. $V=\{u_1=(m;2;1);u_2=(1;-2,m);u_3=(2;2;3)\}$ trong $\mathbb{R}^3$.

ĐS: 1. PTTT $\forall m$.

2. PTTT khi $m=\frac{-1}{2}$ hoặc $m=3$; ĐLTT khi $m\neq\frac{-1}{2}$ và $m\neq 3$
3. PTTT khi $m=-1$ hoặc $m=0$; ĐLTT khi $m\neq -1$ và $m\neq 0$

Bài 21. Trong $\mathbb{R}^3$, véctơ u sau đây có phải là tổ hợp tuyến tính của các véctơ còn lại không? Tại sao?
$$u_1=(1;1;1);u_2=(0;-1;1);u_3=(-2;-1;3);u=(2;-1;5).$$

ĐS: Có vì $u=2u_1+3u_2$.

Bài 22. Tìm điều kiện của m để véctơ u trong $\mathbb{R}^3$ sau đây là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ còn lại
$$u_1=(0;1;-1);u_2=(-2;1;3);u_3=(m;2;-1);u=(1;m;2).$$

ĐS: Là THTT khi và chỉ khi $m\neq\frac{-1}{2}$

Bài 23. Trong không gian véctơ $\mathbb{R}^2$ cho hai tập hợp:

$$U=\{u_1=(1;-1);u_2=(2;1)\} \text{ và } V=\{v_1=(3;1);v_2=(1;-1)\}.$$

1. Chứng minh rằng U và V là hai cơ sở của $\mathbb{R}^2$.
2. Tìm ma trận chuyển cơ sở từ U sang V.
3. Tìm ma trận chuyển cơ sở từ V sang U.
4. Tìm tọa độ của vectơ $x=(3;-1)$ trong cơ sở U.
5. Tìm vectơ y trong $\mathbb{R}^2$ có tọa độ trong cơ sở U là $y_U=(4;-5)$.
6. Biết tọa độ của vectơ z trong cơ sở U là $z_U=(7;2)$, tìm tọa độ của vectơ z trong cơ sở V.

ĐS: 2. $A=\begin{bmatrix}1/3 & 1\\ 4/3 & 0\end{bmatrix}$; 3. $B=\begin{bmatrix}0 & 3/4\\ 1 & -1/4\end{bmatrix}$; 4. $x_U=\left(\frac{5}{3};\frac{2}{3}\right)$; 5. $y=(-6;-9)$; 6. $z_V=\left(\frac{3}{2};\frac{13}{2}\right)$

Bài 24. Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^3$ cho hai tập hợp: $U=\{u_1=(1;1;-1);u_2=(1;1;0);u_3=(2;1;-1)\}$ và $V=\{v_1=(1;1;0);v_2=(1;0;-1);v_3=(1;1;1)\}$.

1. Chứng minh U và V là hai cơ sở của $\mathbb{R}^3$.
2. Tìm ma trận chuyển cơ sở từ U sang V.
3. Tìm ma trận chuyển cơ sở từ V sang U.
4. Tìm tọa độ của vectơ $x=(2;3;-1)$ trong cơ sở U.
5. Tìm vectơ y trong $\mathbb{R}^3$ có tọa độ trong cơ sở U là $y_U=(1;1;-1)$.
6. Biết tọa độ của vectơ z trong cơ sở V là $z_V=(1;0;2)$, tìm tọa độ của vectơ z trong cơ sở U

ĐS: 2. $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$; 3. $B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}$; 4. $x_U=(2;2;-1)$; 5. $y=(0;1;0)$; 6. $z_U=(-2;5;0)$

Bài 25. Tìm hạng của họ các véc tơ sau:

1. $U=\{u_1=(-2;1;1);u_2=(2;-3;1);u_3=(-1;0;1);u_4=(1;-3;2)\}$ trong $\mathbb{R}^3$.
2. $V=\{v_1=(-2;1;1);v_2=(2;-3;1);v_3=(4;0;1)\}$ trong $\mathbb{R}^3$.
3. $W=\{w_1=(2;2;0;0;-1);w_2=(3;-3;1;5;2);w_3=(1;-1;-1;0;0)\}$ trong $\mathbb{R}^4$.

ĐS: 1. $r(U)=2$; 2. $r(V)=3$; 3. $r(W)=3$

Bài 26. Trong không gian véc tơ $\mathbb{R}^4$ hãy tìm hạng của họ các véc tơ sau tùy theo m:

$$U=\{u_1=(2;1;1;m);u_2=(1;3;-1;2);u_3=(-3;1;-3m;0)\}$$

ĐS: $m=1$ thì hạng của họ vectơ là 2; với $m\neq 1$ thì hạng của họ vectơ là 3.

Bài 27. Cho ánh xạ $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ xác định bởi: $\forall u=(x;y;z)\in\mathbb{R}^3$, $f(u)=(x+y;y-z)$

1. Chứng minh rằng f là ánh xạ tuyến tính.
2. Tìm $\ker f$, $\operatorname{Im} f$ và tính hạng của f.
3. Tìm ma trận của f trong cơ sở $U=\{u_1=(1;1;0);\ u_2=(1;0;1);\ u_3=(1;1;1)\}$ của $\mathbb{R}^3$ và cơ sở $V=\{v_1=(1;1);\ v_2=(1;2)\}$ của $\mathbb{R}^2$.

ĐS: $\ker f=\{u=(-t;t;t)\,|\,t\in\mathbb{R}\}$; $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}^2$; $r(f)=\dim(\operatorname{Im} f)=2$; $A=\begin{bmatrix}3&3&4\\-1&-2&-2\end{bmatrix}$

Bài 28. Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$\forall u=(x;y;z)\in\mathbb{R}^3,\ \ f(u)=(x+2y;3y+z;3x-2z)$$

1. Tìm $\ker f$, $\operatorname{Im} f$ và chỉ ra cho mỗi không gian này một cơ sở.
2. Tìm hạng của ánh xạ f.
3. Tìm ma trận A của ánh xạ f trong cơ sở $U=\{u_1=(0;1;1);\ u_2=(1;0;1);\ u_3=(1;1;1)\}$ của $\mathbb{R}^3$.

ĐS: $\ker f=\{u=(2t;-t;3t)\,|\,t\in\mathbb{R}\}=span\{(2;-1;3)\}$;

$\operatorname{Im} f=span\{(1;0;3),(2;3;0),(0;1;-2)\}=span\{(1;0;3),(0;1;-2)\}$; $r(f)=2$;

$$A=\begin{bmatrix}-4&0&-2\\-6&0&-3\\8&1&6\end{bmatrix}$$

Bài 29. Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ có ma trận là $A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$ trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

1. Tìm công thức xác định ánh xạ tuyến tính f.
2. Tìm ma trận của ánh xạ f trong cơ sở $U=\{u_1=(1;0;0);\ u_2=(1;0;1);\ u_3=(1;1;1)\}$ của $\mathbb{R}^3$.
3. Tìm các giá trị riêng và các vectơ riêng của ma trận A. Ma trận A có chéo hóa được không ? nếu có hãy viết ma trận P làm chéo hóa A.

HD&ĐS: 1. Giả sử $u=(x;y;z)\in\mathbb{R}^3$, có $u=xe_1+ye_2+ze_3$ suy ra $f(u)=xf(e_1)+yf(e_2)+zf(e_3)$ do f là axtt. *ĐS:* $f(u)=(y+z;x+z;x+y)$

2. $B=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\1&2&2\end{bmatrix}$

3. Mt A có hai giá trị riêng là $\lambda_1=2$ (bội 1) và $\lambda_2=-1$ (bội 2).

Vectơ riêng ứng với gt riêng $\lambda_1=2$ có dạng $v=[x\ \ x\ \ x]^t$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Vectơ riêng ứng với gt riêng $\lambda_2=-1$ có dạng $v=[x\ \ y\ \ (-x-y)]^t$, $x,y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Ma trận $P=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&-1&-1\end{bmatrix}$ làm chéo hóa A và $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$.

Bài 30. Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ có ma trận là $A=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&1\end{bmatrix}$ trong cơ sở $U=\{u_1=(1;1;0);\ u_2=(1;0;1);\ u_3=(1;1;1)\}$ của $\mathbb{R}^3$ và cơ sở $V=\{v_1=(1;1);\ v_2=(1;2)\}$ của $\mathbb{R}^2$.

1. Tính $f(4;2;1)$.
2. Tìm công thức xác định ánh xạ tuyến tính f.
3. Tìm hạt nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính f và chỉ ra cho mỗi không gian con này một cơ sở.

<u>ĐS:</u> 1. $u=(4;2;1)=3u_1+2u_2-u_3 \Rightarrow f(u)=3f(u_1)+2f(u_2)-f(u_3)$. *<u>ĐS:</u>* $f(4;2;1)=(10;17)$

2. Với $u=(x;y;z)\in\mathbb{R}^3$, có $u=(x-z)u_1+(x-y)u_2+(-x+y+z)u_3$

CT xác định f là: $f(u)=(2x+y;4x+y-z)$.

3. $\ker f=\{u=(x;-2x;2x)\mid x\in\mathbb{R}\}=span\{(1;-2;2)\}\Rightarrow$ một cơ sở: $S_1=\{(1;-2;2)\}$

Dùng định lý: $\dim(\ker f)+\dim(\operatorname{Im} f)=\dim(\mathbb{R}^3)$ suy ra $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}^2$, có 1 cơ sở là V.

Bài 31. Cho $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ là ánh xạ xác định bởi: $\forall u=(x;y)\in\mathbb{R}^2,\ f(u)=(-8x+15y;-6x+11y)$.

1. Chứng minh rằng f là ánh xạ tuyến tính.
2. Tìm $\ker f$, $\operatorname{Im} f$ và tính hạng của f.
3. Tìm ma trận A của ánh xạ tuyến tính f trong trong cơ sở $U=\{u_1=(1;1);\ u_2=(2;1)\}$ của $\mathbb{R}^2$.
4. Tìm các giá trị riêng và các vectơ riêng của ma trận A. Ma trận A có chéo hóa được không ? nếu có hãy viết ma trận P làm chéo hóa A.

<u>HD&ĐS:</u> 2. $\ker f=\{(0;0)\}\Rightarrow \operatorname{Im} f=\mathbb{R}^2$; 3. $A=\begin{bmatrix}3&-1\\2&0\end{bmatrix}$;

4. A có 2 giá trị riêng là $\lambda_1=1$ và $\lambda_2=2$.

Vectơ riêng ứng với gt riêng $\lambda_1=1$ có dạng $u=[x\quad 2x]^t, x\in\mathbb{R}, x\neq 0$

Vectơ riêng ứng với gt riêng $\lambda_2=2$ có dạng $u=[x\quad x]^t, x\in\mathbb{R}, x\neq 0$

Ma trận $P=\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}$ làm chéo hóa A và $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$.

Bài 32. Cho ánh xạ $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ xác định bởi: $\forall u=(x;y;z)\in\mathbb{R}^3,\ f(u)=(x+z;y;x+z)$.

1. Chứng minh rằng f là ánh xạ tuyến tính.
2. Tìm $\ker f$, $\operatorname{Im} f$ và tính hạng của f. Chỉ ra cho mỗi không gian con $\ker f$, $\operatorname{Im} f$ một cơ sở.
3. Tìm ma trận A của ánh xạ tuyến tính f trong trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

4. Tìm các giá trị riêng và các vectơ riêng của ma trận A. Ma trận A có chéo hóa được không ? nếu có hãy viết ma trận P làm chéo hóa A.

<u>*HD&ĐS:*</u> 2. $\ker f = \{(x;0;-x) \mid x \in \mathbb{R}\} = span\{(1;0;-1)\}$; $\operatorname{Im} f = span\{(1;0;1),(0;1;0)\}$; $r(f) = 2$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. A có 3 giá trị riêng là $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ và $\lambda_3 = 2$.

Vectơ riêng ứng với gt riêng $\lambda_1 = 0$ có dạng $u = \begin{bmatrix} x & 0 & -x \end{bmatrix}^t, x \in \mathbb{R}, x \neq 0$

Vectơ riêng ứng với gt riêng $\lambda_2 = 1$ có dạng $u = \begin{bmatrix} 0 & y & 0 \end{bmatrix}^t, y \in \mathbb{R}, y \neq 0$

Vectơ riêng ứng với gt riêng $\lambda_3 = 2$ có dạng $u = \begin{bmatrix} x & 0 & x \end{bmatrix}^t, x \in \mathbb{R}, x \neq 0$

Ma trận $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ làm chéo hóa A và $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Bài 33. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ và $u = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$. Hỏi u, v có phải là những vectơ riêng của ma trận A không? vì sao?

<u>*HD:*</u> $Au = -4u$; $Av = \begin{bmatrix} -9 \\ 11 \end{bmatrix} \neq \lambda v, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Bài 34. Ma trận sau có chéo hóa được không ? nếu được hãy đưa ma trận đó về dạng chéo :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>*HD:*</u> Ma trận A có hai giá trị riêng là $\lambda_1 = 1$ (bội 1) và $\lambda_2 = -2$ (bội 2).

K/g riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 1$ (bội 1) là không gian 1 chiều sinh bởi $v = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^t$

K/g riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = -2$ (bội 2) là không gian 1 chiều sinh bởi $v = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^t$ nên mt A vuông cấp 3 không có đủ 3 vectơ riêng độc lập tuyến tính, do đó ma trận A không thể chéo hóa được.

-- **BT BỔ SUNG** --

Bài 35. Trong không gian véctơ $\mathbb{R}^3$ cho các vectơ:

$u_1 = (1;-1;-2)$; $u_2 = (5;-4;-7)$; $u_3 = (-3;1;0)$; $u_4 = (-3;-1;-6)$; $u = (-4;3;m)$

1. Vectơ u_4 có thuộc không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^3$ sinh bởi các véc tơ u_1, u_2, u_3 không? Vì sao?
2. Với giá trị nào của m thì u thuộc không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^3$ sinh bởi các véc tơ u_1, u_2, u_3?

3. Tìm một cở sở cho $span\{u_1, u_2, u_3\}$.

ĐS: 1. Có vì $u_4 = 3u_1 + 2u_3$; 2. $m = 5$

Bài 36. Chứng minh rằng tập $U = \{u = (a-b; b-c; c-a; 0) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ là một không gian véctơ con của không gian véctơ $\mathbb{R}^4$. Hãy chỉ ra 1 cơ sở của U.

Bài 37. Tìm công thức xác định ánh xạ tuyến tính f, tính $f(u)$ và tìm một cơ sở cho $\ker f$ trong mỗi trường hợp sau:

1. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(1;2) = (1;0;1)$, $f(-1;0) = (1;1;1)$; $u = (2;1)$.
2. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(1;-1) = (0;1)$, $f(1;1) = (1;0)$; $u = (1;-7)$.

Gợi ý: 1. $f(x;y) = \frac{y}{2} f(1;2) + \left(\frac{y}{2} - x\right) f(-1;0)$

2. $f(x;y) = \frac{x-y}{2} f(1;-1) + \frac{x+y}{2} f(1;1)$

Bài 38. Tìm đa thức đặc trưng của ma trận $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ rồi tìm các giá trị riêng và các vec tơ riêng tương ứng của ma trận A. Từ đó tính A^5.

ĐS: $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda - 8$

Hai giá trị riêng: $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -2$

Các vec tơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 4$ có dạng $v = x\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}, x \neq 0$.

Các vec tơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = -2$ có dạng $v = x\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, x \neq 0$.

Bài 39. Tìm đa thức đặc trưng của ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ rồi tìm các giá trị riêng và các vec tơ riêng tương ứng của ma trận A.

ĐS: $\det(A - \lambda I) = -(\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda + 1)$

Bài 40. Hãy chéo hóa ma trận $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. *ĐS:* $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ với $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

-- HẾT --