MÔN: ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

1. MA TRẬN.

1.1. Cho A là ma trận vuông cấp n thỏa mãn $A^2 - A = I_n$. Chứng minh rằng ma trận A khả nghịch và tìm ma trận nghịch đảo của A.

1.2. Cho M, N là các ma trận vuông cấp 3 thỏa mãn $MN = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 2 \\ 6 & -7 & 2 \\ 6 & -6 & 1 \end{bmatrix}$.

a. Tính $(MN)^2$.

b. Chứng minh ma trận NM khả nghịch. Tìm ma trận nghịch đảo của NM.

1.3. Cho A là ma trận cấp n thỏa mãn $A^2 = A$. Chứng minh rằng ma trận $B = 2A - I$ khả nghịch.

1.4. Cho ma trận: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}; \quad a, b, c \in \mathbb{R}$

a. Chứng minh rằng nếu $A^{2017} = 0$ thì $A^2 = 0$

b. Tìm a, b, c sao cho tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ để $A^n = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

1.5. Tính

a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n$ b. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^n$

1.6. Tính lũy thừa bậc n của $A = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$.

1.7. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 2017 & 1 & -2017 \\ 2016 & 2 & -2017 \\ 2016 & 1 & -2016 \end{bmatrix}$. Xác định các phần tử nằm trên đường chéo chính của ma trận $S = I + A + A^2 + \cdots + A^{2017}$.

1.8. Cho A là ma trận vuông cấp n

$$A = \begin{bmatrix} 2016 & 2017 & 2017 & 2017 \\ 2017 & 2016 & 2017 & 2017 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2017 & 2017 & 2017 & 2016 \end{bmatrix}$$

Tính A^k, với k là số nguyên dương.

1.9. Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ thỏa mãn $A^2 = A + B + BA$. Chứng minh rằng $AB = BA$.

1.10. Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ thỏa mãn $AB = 0, B \neq 0$. Chứng minh rằng tồn tại ma trận $C \in M_n(\mathbb{R})$ khác ma trận 0 thỏa mãn $AC = CA = 0$.

1.11. Cho ma trận vuông *A*, *B* cấp n. Vết của ma trận *A* là tổng tất cả các phần tử trên đường chéo chính của *A*, kí hiệu $Tr(A)$. Chứng minh rằng:

a. $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$.

b. $Tr(kA) = kTr(A),\ k \in \mathbb{R}$.

c. $Tr(AB) = Tr(BA)$

1.12. Chứng minh rằng không tồn tại các ma trận A, B, C, D vuông cấp n sao cho $AC + BD = I$ và $CA + BD = 0$, I là ma trận đơn vị, 0 là ma trận không.

1.13. (***Đẳng thức Wagner***)

a. Chứng minh rằng với mọi ma trận A, B, C vuông cấp 2 ta luôn có

$$(AB - BA)^2 C - C(AB - BA)^2 = 0$$

b. Chứng minh rằng với mọi ma trận A, B, C vuông cấp 2 ta luôn có

$$(AB - BA)^{2017} C - C(AB - BA)^{2017} = 0$$

1.14. Tùy theo giá trị của m, hãy tìm hạng của ma trận $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ m & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & m & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

1.15. Tìm m để hạng của ma trận sau nhỏ nhất $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ m & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

1.16. Cho ma trận vuông cấp *n*: $A = \begin{bmatrix} 1 & m & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & m \\ m & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tìm m để hạng của ma trận *A* nhỏ hơn *n*.

1.17. Chứng minh rằng mọi ma trận hạng r đều có thể phân tích được thành tổng của r ma trận có hạng bằng 1.

1.18. Giả sử *A*, *B* là các ma trận vuông cấp *n* thỏa mãn $AB = BA,\ A^{2016} = 0,\ B^{2017} = 0$.

a. Chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên k để $(A+B)^k = 0$.

b. Chứng minh rằng $r(I + A + B) = r(I - A - B) = n$.

2. ĐỊNH THỨC

2.1. Giải phương trình: $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 14 & 64 \end{vmatrix} = 0$

2.2. Tính định thức :

a. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix}$; b. $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix}$

2.3. Tính $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ trong đó a,b,c là 3 nghiệm của phương trình bậc 3: $x^3 + px + q = 0$.

2.4. Cho *m, n, p, q* là các nghiệm của phương trình $x^4 - x + 1 = 0$ và

$$A = \begin{bmatrix} m+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & n+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & p+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & q+1 \end{bmatrix}$$

Tính $\det(A)$.

2.5. Tính các định thức cấp *n* sau :

a. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ . & . & . & \dots & . \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}$; b. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ . & . & . & \dots & . \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$;

c. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & x & x & \dots & x \end{vmatrix}$; d. $\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ . & . & . & \dots & . \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}$;

e. $D_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \dots & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^2 \end{vmatrix}$

(D_n là định thức cấp n mà các phần tử nằm trên đường chéo chính bằng $1+x^2$, các phần tử thuộc hai đường chéo gần đường chéo chính bằng x và các phần tử còn lại bằng 0).

2.6.

a. Biết A là một ma trận vuông cấp n thỏa mãn $A^{-1} = A$.

Chứng minh rằng $|\det(A-I)| = 0$ hoặc $|\det(A-I)| = 2^n$.

b. Biết A, B là hai ma trận vuông cùng cấp n thỏa mãn $AB - BA = B$.

Chứng minh rằng $\det(B) = 0$.

2.7. Cho A, B là các ma trận thực vuông cấp n thỏa mãn $AB = A + B$ và $A^{2017} = 0$.

Chứng minh rằng $\det(B) = 0$.

2.8. Cho các ma trận vuông A, B thỏa mãn $A^t A = I; B^t B = I$. Biết $\det A \neq \det B$.

Chứng minh rằng $\det(A+B) = 0$.

2.9. Cho ma trận vuông cấp $n: A = \left(a_{ij}\right); a_{ij} = \min\left(i, j\right)$. Tính $\det\left(A\right)$.

2.10. Cho $A = \left(a_{ij}\right)$ là một ma trận vuông cấp $n \geq 2$ và $A_{11} + A_{12} + \cdots + A_{1n} \neq 0$, trong đó A_{1j} là phần bù đại số của a_{1j}. Chứng minh rằng tồn tại số thực α để

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\alpha & a_{12}+\alpha & \dots & a_{1n}+\alpha \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 2017.$$

3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

3.1. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x+y-2z+t-u=1 \\ 2x-y+7z-3t+5u=2 \\ x+3y-2z+5t-7u=3 \\ 3x-2y+7z-5t+8u=3 \end{cases}$$

3.2. Giải hệ phương trình thuần nhất sau:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_2+x_3+x_4=0 \\ x_3+x_4+x_5=0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_8+x_9+x_{10}=0 \\ x_1+\ldots+x_9+x_{10}=0 \\ x_1+x_2+\ldots+x_{10}=0 \end{cases}$$

3.3. Giải và biện luận các hệ phương trình sau theo tham số m :

a. $\begin{cases} mx+y+z+t=1 \\ x+my+z+t=1 \\ x+y+mz+t=1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x+y+z+t=1 \\ x+2y-z+4t=2 \\ x+7y-4z+11t=m \\ 4x+8y-4z+16t=m+1 \end{cases}$

3.4. Cho a_{ij} là các số nguyên. Giải hệ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=\frac{1}{2}x_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=\frac{1}{2}x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=\frac{1}{2}x_n \end{cases}$$

3.5. Chứng minh rằng hệ phương trình sau có nghiệm khác nghiệm tầm thường:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

trong đó $a_{ij}=-a_{ji}\ \forall i, j$ và n lẻ.

3.6. Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} mx + 8z - 7t = m - 1 \\ 3x + my + 2z + 4t = m \\ mz + 5t = m^2 - 1 \\ 5z - mt = 2m + 2 \end{cases}$$

3.7. Tùy theo giá trị của *m*, hãy biện luận số nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} mx + y + z + t = m \\ 2x + 3y + 2z + (5m - 3)t = m + 1 \\ (m-1)x + 3y + 2z + (m^2 + m)t = 4 \end{cases}$$

3.8. Tìm điều kiện của m để hai hệ sau có nghiệm chung

$$(I)\ \begin{cases} 2x - y + z - 2t + 3u = 3 \\ x + y - z - t + u = 1 \\ 3x + y + z - 3t + 4u = 2m \end{cases} ; \qquad (II)\ \begin{cases} x - y + 2z - 2mt = 0 \\ 2x + y - z + t = m \end{cases}$$

3.9. Cho $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng hệ phương trình sau chỉ có nghiệm tầm thường:

$$\begin{cases} \left(1 + a^2\right)x + by + cz + dt = 0 \\ -bx + \left(1 + a^2\right)y + dz - ct = 0 \\ -cx - dy + \left(1 + a^2\right)z + bt = 0 \\ -dx + cy - bz + \left(1 + a^2\right)t = 0 \end{cases}$$

------------ HẾT ------------

HỌC VIỆN NÔNG NGHIỆP VIỆT NAM **KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN NĂM 2016**

ĐỀ THI MÔN : ĐẠI SỐ
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài 1. Cho các ma trận : $A=\begin{bmatrix}1&3&1\\2&2&1\\3&4&2\end{bmatrix}; B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}; C=\begin{bmatrix}0&2&-1\\1&1&-1\\-2&-5&4\end{bmatrix}$

1) Tính $A.C$ và $A.B.C$.
2) Tính $\begin{bmatrix}4&3&-3\\2&3&-2\\4&4&-3\end{bmatrix}^{2016}$.

Bài 2. Tìm tất các giá trị của m để hạng của ma trận sau nhỏ nhất: $A=\begin{bmatrix}1&-1&2&1\\m&2&1&-1\\-2&-1&-3&0\\1&-1&m^2&4\end{bmatrix}$.

Bài 3. Chứng minh rằng: $\begin{vmatrix}a&a&a&a\\a&b&b&b\\a&b&c&c\\a&b&c&d\end{vmatrix}=a(b-a)(c-b)(d-c)$.

Bài 4. Giải và biện luận theo tham số thực m hệ phương trình sau:

$$\begin{cases}x_1+mx_2=1\\ x_2+mx_3=\dfrac{1}{m}\\ x_3+mx_4=\dfrac{1}{m^2}\\ \dots\\ x_{10}+mx_{11}=\dfrac{1}{m^9}\\ x_{11}+mx_1=\dfrac{1}{m^{10}}\end{cases}\quad (m\neq 0).$$

Bài 5. Cho A, B là hai ma trận vuông cấp $n\ (n\geq 2)$ thỏa mãn $AB=A+B$ và $A^{2016}=0$. Gọi θ là ma trận không cấp $n\times 1$. Chứng minh rằng có vô số ma trận X sao cho $A.X=\theta$.

-- **Hết** --

<u>Ghi chú:</u> *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

Họ và tên thí sinh: ………………………………………………… SBD: ……………………