Chương 1: **Vec tơ**

Bài 1. Cho các vec tơ $u_1=(3,4,-1,0), u_2=(4,2,0,1), u_3=(1,1,2,0)$.

a) Hãy tìm vec tơ $v=u_1-2u_2+3u_3$

b) Tìm vec tơ u thoả mãn hệ thức: $3(u_1+2u_2-u_3+u)=u-u_1+u_2$

ĐS: a) $v=(-2,3,5,-2)$ b) $u=\left(\frac{-5}{2},\frac{9}{2},1,\frac{-5}{2}\right)$

Bài 2. Tìm $u+v,\ u-v,\ 2u-3v,\ |3u|,\ |v-u|$ với u,v là các vec tơ sau đây.

a) $u=(5,-12),\ \ v=(-3,-6)$.

b) $u=(4,0,3),\ \ v=(-2,1,5)$.

c) $u=4i+j,\ \ v=i-2j$ biết $i=(1,0),\ \ j=(0,1)$ là các vec tơ đơn vị trong $\mathbb{R}^2$.

d) $u=i+2j-3k,\ \ v=-2i-j+5k$ biết $i=(1,0,0),\ \ j=(0,1,0),\ \ k=(0,0,1)$ là các vec tơ đơn vị trong $\mathbb{R}^3$.

e) (+) $u=2i-4j+4k,\ \ v=2j-k$ biết $i=(1,0,0),\ \ j=(0,1,0),\ \ k=(0,0,1)$ là các vec tơ đơn vị trong $\mathbb{R}^3$.

ĐS: a) $u+v=(2,-18),\ u-v=(8,-6),\ 2u-3v=(19,-6),\ |3u|=39,\ |v-u|=10.$

b) $u+v=(2,1,8),\ u-v=(6,-1,-2),\ 2u-3v=(14,-3,-9),\ |3u|=15,\ |v-u|=\sqrt{41}.$

c) $u+v=(5,-1),\ u-v=(3,3),\ 2u-3v=(5,8),\ |3u|=3\sqrt{17},\ |v-u|=3\sqrt{2}.$

d) $u+v=(-1,1,2),\ u-v=(3,3,-8),\ 2u-3v=(8,7,-21),\ |3u|=3\sqrt{14},\ |v-u|=\sqrt{82}.$

e) $u+v=(2,-2,3),\ u-v=(2,-6,5),\ 2u-3v=(4,-14,11),\ |3u|=18,\ |v-u|=\sqrt{65}.$

Bài 3. Tính tích vô hướng $\langle u,v\rangle$ của các cặp vec tơ sau

a) $u=(2,-1,3), v=(-1,1,1)$

b) $u=(1,-1,9,7,4), v=(2,1,0,-1,0)$

c) (+) $u=(1,2,3,4,.....,n), v=(-1,1,-1,....,(-1)^n)$

ĐS: a) $\langle u,v\rangle=0$, b) $\langle u,v\rangle=-6$, c) $\langle u,v\rangle=\begin{cases}k & khi\ \ n=2k\\ -k-1 & khi\ \ n=2k+1\end{cases}$

Bài 4. Một người bán hàng rong đường phố trong một ngày cụ thể bán được a cái bánh mì, b cái xúc xích, c lon nước giải khát. Biết rằng người đó bán với giá 2000 đ một cái bánh mì, 5000 đ một cái xúc xích và 7000 đ một lon nước giải khát. Gọi $A=(a,b,c)$ và $P=(2000,5000,7000)$. Tính tích vô hướng $\langle A,P\rangle$ và giải thích ý nghĩa của tích vô hướng này.

ĐS: $\langle A,P\rangle=2000a+5000b+7000c$ là doanh thu của người bán hàng rong trên vào ngày điều tra.

Bài 5. Hai nông trường (NT) trồng cùng một loại cây ăn quả tại hai địa điểm khác nhau. Để cho ra cùng 10kg cây ăn quả, hai NT trên cùng sử dụng các loại nguyên vật liệu (NVL) giống nhau nhưng lượng sử dụng khác nhau. Thống kê về giá (đơn vị: nghìn đồng) và lượng sử dụng NVL tại hai NT trên như sau.

NT1	NVL1	NVL2	NVL3
Giá	3	5	7
Lượng sử dụng	9	10	8

NT2	NVL1	NVL2	NVL3
Giá	4	7	3
Lượng sử dụng	8	12	9

Người ta nghi ngờ rằng chi phí trồng loại cây ăn quả trên tại NT2 cao hơn NT1. Nghi ngờ trên là có căn cứ hay không? Hãy giải thích lý do.

ĐS: Nghi ngờ trên là có căn cứ do chi phí bằng tích vô hướng (giá, lượng sử dụng) tại NT1 là 133, NT2 là 143.

Bài 6. Tính tích vô hướng $\langle u,v\rangle$ biết u,v là các vec tơ thỏa mãn các điều kiện sau đây.

a) $|u|=6,\ |v|=5$, góc giữa hai vector u,v là $2\pi/3$.

b) (+) $|u|=3,\ |v|=\sqrt{6}$, góc giữa hai vector u,v là 45^0.

ĐS: a) -15 b) $6\sqrt{3}$

Bài 7. Tìm số thực m sao cho:

a) $X=(2,-1,3)$ và $Y=(m+1,-3,1)$ trực giao.

b) $X=(1,-2,4)$, $Y=(m^2,m,0)$, $Z=(0,2,1)$ đôi một trực giao.

ĐS: a) $m=-4$ b) $m=0$

Bài 8. Xét sự độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính của các hệ vec tơ sau.

a) $i=(1,0,0),\quad j=(0,1,0),\quad k=(0,0,1)$.

b) $v_1=(1,3,2),\quad v_2=(2,1,3),\quad v_3=(3,2,1)$.

ĐS: a) Độc lập tuyến tính b) Độc lập tuyến tính

Bài 9(+). Hãy xác định các mệnh đề sau là đúng hay sai.

a) Nếu S là một hệ vec tơ phụ thuộc tuyến tính thì mỗi vec tơ trong hệ S biểu diễn được tuyến tính thông qua các vec tơ còn lại của hệ.

b) Mọi hệ vec tơ chứa vec tơ 0 là phụ thuộc tuyến tính.

c) Hệ rỗng là hệ phụ thuộc tuyến tính.

d) Các hệ con của hệ phụ thuộc tuyến tính là phụ thuộc tuyến tính.

e) Các hệ con của hệ độc lập tuyến tính là hệ độc lập tuyến tính.

ĐS: a) S b) Đ c)S d)S e)Đ

Chương 2: Ma trận – Định thức

Bài 10. Cho 2 ma trận $A=\begin{bmatrix}6 & 9\\ -4 & -6\end{bmatrix}$ và $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}$. Tính : A^2, AB và BA.

ĐS: $A^2=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-3 & 12\\ 2 & -8\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-2 & -3\\ -6 & -9\end{bmatrix}$

Bài 11. Thực hiện các phép tính:

a) $\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & -1 & -2\\ 5 & 4 & 0\end{bmatrix}^2$ b) $\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^3$ c) $\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}^2-\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}-6I_2$

d) $\begin{bmatrix}1 & 3 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\ -2 & 1\\ 0 & 5\end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix}2\\ 1\\ -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\end{bmatrix}$

ĐS: a) $\begin{bmatrix}2 & -3 & -4\\ -7 & -4 & -1\\ 22 & 1 & -13\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}1 & 1 & -5\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix}-3 & -12\end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix}2 & -2 & 6\\ 1 & -1 & 3\\ -7 & 7 & -21\end{bmatrix}$

Bài 12. Cho 2 ma trận $A=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 4\\ 0 & -2 & -3\end{bmatrix}$ và $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 5\\ -3 & -1\end{bmatrix}$

a) Tìm ma trận X sao cho $A-X=-2B^t$.

b) Tìm ma trận Y sao cho $Y^t-BA=0$.

ĐS: a) $X=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ 4 & 8 & -5\end{bmatrix}$ b) $Y=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 3\\ -1 & -10 & -7\\ -2 & -15 & -9\end{bmatrix}$

Bài 13. Cho hai ma trận $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 4 & 2\end{bmatrix}; B=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\\ -2 & 3\\ 1 & 5\end{bmatrix}$

Hãy thực hiện phép tính: AB, B^tA^t. Kiểm tra lại đẳng thức $(AB)^t=B^tA^t$ có đúng với các ma trận A, B hay không .

ĐS: $AB=\begin{bmatrix}0 & 10\\ -2 & 21\end{bmatrix}; B^tA^t=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 10 & 21\end{bmatrix}$.

Bài 14. Cho các ma trận:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 3 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 3 & -2 & 1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 1 & 5\\ 1 & 3\\ 2 & 2\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & -2 & -1\end{bmatrix}$$

Tìm phần tử nằm ở hàng 2, cột 3 của ma trận $3A^tBC$.

ĐS: 15

Bài 15. Tính các định thức sau:

a) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 2\\ -1 & 2 & 5\end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 2 & 1\end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix}4 & 0 & 0 & -1\\ 3 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & -1 & 0\end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 1 & 1 & -2\\ -2 & 5 & 4\end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix}1 & 3 & -6\\ 1 & -1 & 2\\ -8 & 5 & 4\end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 2 & 0\end{vmatrix}$

ĐS: a) -24 b) -7 c) -37 d)35 e)-56 f)-24

Bài 16. Tính các định thức sau:

a) $\begin{vmatrix}4 & -2 & m\\ -5 & m & 1\\ 2 & 4 & -3\end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix}1 & m & m & 2\\ 1 & m & 2 & m\\ 1 & 2 & m & m\\ 2 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$

ĐS: a) $-2m^2-32m+10$

b) $3(2m+3)(m-1)(m-2)^2$

Bài 17. Cho ma trận A cấp 3 có $\det(2A)=80$.

a) Chứng minh ma trận A khả nghịch.
b) Tính $\det(A^{-1}), \det(A^t)$ và $\det(A^6)$.

ĐS: a) $\det A = 10 \neq 0$, nên ma trận A khả nghịch.

b) $\det(A^{-1})=\dfrac{1}{10}$, $\det(A^t)=10$, $\det(A^6)=10^6$

Bài 18. Cho hai ma trận $A=\begin{bmatrix}3 & 9 & 6\\ 6 & -3 & 3\\ 9 & 0 & 6\end{bmatrix}$ và $B=\begin{bmatrix}-2 & -6 & 5\\ -1 & -4 & 3\\ 3 & 9 & -7\end{bmatrix}$.

a) Hãy tính các tích AB và BA. Từ đó hãy cho biết ma trận B có khả nghịch không? Chỉ ra ma trận nghịch đảo (nếu có) của ma trận B.
b) Tìm ma trận X (nếu có) thỏa mãn: $XB = A$.

ĐS: a) $AB=3I$, $BA=3I$, trong đó I là ma trận đơn vị cấp 3. Do đó $B^{-1}=\dfrac{1}{3}A$.

b) $X=\frac{1}{3}A^2=\begin{bmatrix}39 & 0 & 27\\ 9 & 21 & 15\\ 27 & 27 & 30\end{bmatrix}$.

Bài 19. Tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của các ma trận sau:

a) $A=\begin{bmatrix}2 & -5\\ 3 & -3\end{bmatrix}$ b) $B=\begin{bmatrix}5 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix}$ c) $C=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 3\\ 1 & 4 & -2\\ 1 & 3 & -1\end{bmatrix}$

<u>ĐS:</u> a) $A^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{5}{9}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{9}\end{bmatrix}$ b) $B^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -1\\ \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -3\\ -\frac{7}{3} & \frac{5}{3} & 5\end{bmatrix}$ c) $C^{-1}=\frac{-1}{6}\begin{bmatrix}2 & 10 & -14\\ -1 & -2 & 1\\ -1 & 4 & -5\end{bmatrix}$

Bài 20. Biết $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$ là hai ma trận vuông cấp 3 và các phần tử a_{ij}, b_{ij} được cho bởi công thức

$$a_{ij}=-i+2j,\ \ b_{ij}=\frac{i}{j}\ .$$

a) Hãy viết rõ ma trận A, B với giá trị cụ thể của các phần tử.

b) Ma trận A, B có khả nghịch hay không?

c) Tính $\det(A^2+AB^8)$.

<u>ĐS:</u> a) $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 0 & 2 & 4\\ -1 & 1 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 1/2 & 1/3\\ 2 & 1 & 2/3\\ 3 & 3/2 & 1\end{bmatrix}$

b) $\det(A)=\det(B)=0$, ma trận A, B không khả nghịch.

c) $\det(A^2+AB^8)=\det(A(A+B^8))=\det(A)\det(A+B^8)=0$.

Bài 21(+). Cho ma trận $A=\begin{bmatrix}m-1 & -3 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ -3 & 5 & -2\end{bmatrix}$,

a) Tìm m để ma trận A khả nghịch.

b) Với $m=3$, tìm ma trận nghịch đảo nếu có của ma trận A.

<u>ĐS:</u> a) $\det A=-8m+21$. A khả nghịch $\Leftrightarrow m\neq 21/8$

b) $A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{8}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{7}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3}\end{bmatrix}$

Bài 22. Cho ma trận $A=\begin{bmatrix}m & 1 & 2\\ 1 & m & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$

a) Tìm m để ma trận A khả nghịch.

b) Khi A khả nghịch, tính $\det(A^{-1})$.

$$\det A = m^2 - 6m + 5.$$

ĐS: a) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1, \\ m \neq 5. \end{cases}$ b) $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{m^2 - 6m + 5}$

Bài 23. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & m & 2 \end{bmatrix}$.

a) Tìm điều kiện của m để ma trận A khả nghịch.

b) Khi A khả nghịch, hãy tìm phần tử nằm ở hàng 4, cột 3 của ma trận nghịch đảo của A.

ĐS: a) $m \neq 2$ b) $\dfrac{m+5}{m-2}$

Bài 24. Họ vec tơ sau là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính:

a) $U = \left\{u_1 = (-1,2,5), u_2 = (1,1,1), u_3 = (3,1,2)\right\}$ trong không gian $\mathbb{R}^3$.

b) (+) $S = \left\{s_1 = (1,1,1,1,), s_2 = (2,0,-1,3), s_3 = (0,-2,-1,3), s_4 = (0,0,2,2)\right\}$ trong không gian $\mathbb{R}^4$

ĐS: a) ĐLTT b) PTTT

Bài 25. Giải các phương trình sau:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$ b) $X \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

ĐS: a) $X = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ b) $X = \begin{bmatrix} 20 & -15 & 13 \\ 17 & -12 & 11 \\ 48 & -35 & 30 \end{bmatrix}$

<u>Chương 3:</u> Hệ phương trình tuyến tính

Bài 26. Giải các hệ phương trình tuyến tính sau:

a) $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3=-1 \\ 2x_1+x_2-2x_3=1 \\ x_1+x_2+x_3=3 \\ x_1+2x_2-3x_3=1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=5 \\ x_2-x_3+x_4=-3 \\ x_1+3x_2-3x_4=1 \\ -7x_2+3x_3+x_4=-3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+2y-z+t=2 \\ 4x+3y-z+2t=3 \\ 8x+5y-3z+4t=6 \\ 3x+3y-2z+2t=3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4-x_5=0 \\ 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=0 \\ x_1+7x_2-5x_3-5x_4+x_5=0 \\ 3x_1-x_2-2x_3+x_4-x_5=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-y-2z+t=-2 \\ 2x-y+z+3t=-3 \\ -x+2y+3z-2t=-1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3x_1-2x_2-5x_3+x_4=0 \\ 2x_1-3x_2+x_3+5x_4=0 \\ x_1+2x_2-4x_4=0 \\ x_1-x_2-4x_3+9x_4=0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x+5y+4z+3t=1 \\ 2x-y+2z-t=0 \\ 5x+3y+8z+t=1 \\ 4x+9y+10z+5t=2 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0 \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0 \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0 \end{cases}$

<u>ĐS:</u> a) Vô nghiệm b) $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ c) $(a-5;-1-3a;2-2a;a),\ a\in\mathbb{R}$

d) $(-8;3+a;6+2a;a),\ a\in\mathbb{R}$ e) $(0;0;0;a;a),\ a\in\mathbb{R}$ f) $(0;0;0;0)$

g) $(\frac{1-14a+2b}{11};\frac{2-6a-7b}{11};a;b), a,b\in\mathbb{R}$ h) $(8a-7b;-6a+5b;a;b), a,b\in\mathbb{R}$

Bài 27. Với giá trị nào của m thì các hệ phương trình sau có nghiệm:

a) $\begin{cases} x-2y+z-t=-1 \\ 3x+y-2z+t=2 \\ x+5y-4z+mt=5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+y+10z-6t=3 \\ x+2y+mz-t=1 \\ 2x+5y-z+mt=2 \end{cases}$.

<u>ĐS:</u> a) $m\neq 4$ b) $m\neq 3$

Bài 28(+). Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+3y-2t=0 \\ -y+2z-t=0 \\ 2x-z+t=0 \\ 4x+y+mz=0 \end{cases}$$

Tìm tất cả các giá trị của m để:

a) Hệ phương trình có nghiệm duy nhất?

b) Hệ phương trình có vô số nghiệm?

<u>ĐS:</u> a) $m\neq -\frac{5}{11}$ b) $m=-\frac{5}{11}$

Bài 29. Tìm a,b để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x + by + z = 3 \\ x + 2by + z = 4 \end{cases}$$

ĐS: $a \neq 1, b \neq 0$.

Bài 30. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y - z = 4 \\ 3x + 3y + (m+4)z = m^2 + 2 \end{cases}$$

a) Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất.

b) Giải hệ phương trình với $m = -1$.

ĐS: a) $m \neq -1$ b) $\begin{cases} x = -1 - 4z \\ y = 2 + 3z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$

Bài 31. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}$.

Tìm ma trận X sao cho $A.X = B$.

ĐS: $X = \begin{bmatrix} 6 - z \\ z + 2 \\ z \end{bmatrix}, z \in \mathbb{R}$

Bài 32(+). Tìm tất cả các ma trận X (nếu có) thỏa mãn:

1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} X = X \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

2) $X \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

3) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

ĐS: 1) $X = \begin{bmatrix} x & y \\ y & x + y \end{bmatrix}, x, y \in \mathbb{R}$ 2) $X = \begin{bmatrix} -3 & 7 & 2 \\ 1 & -1,5 & 0,5 \end{bmatrix}$

3) $X = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ 4) $X = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 + a \\ 6 + 2a \\ a \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R}$

Bài 33. Họ vec tơ sau là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính:

a) $V = \{v_1 = (1, 0, -2, 5), v_2 = (2, 1, 0, -1), v_3 = (1, 1, 2, 1)\}$ trong không gian $\mathbb{R}^4$.

b) $S = \{v_1 = (1, 0, 0),\ v_2 = (1, -1, 0),\ v_3 = (1, 1, 2),\ v_4 = (2, 3, m)\}$.

ĐS: a) ĐLTT b) PTTT

Bài 34. Với giá trị nào của m thì họ vec tơ sau là họ vec tơ độc lập tuyến tính? Phụ thuộc tuyến tính?

a) $U=\{u_1=(1,2,3),u_2=(m,2,0),u_3=(m-1,1,4)\}$ trong $\mathbb{R}^3$.

b) (+) $V=\{v_1=(2,1,2m),v_2=(2,1,-1),v_3=(m+1,2,-3)\}$ trong $\mathbb{R}^3$.

c) (+) $S=\{s_1=(2;1;1;m);s_2=(2;1;-1,m);s_3=(10;5;-1;5m)\}$ trong $\mathbb{R}^4$.

ĐS: a) $m=\dfrac{14}{11}$ thì U pttt b) $\left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=\dfrac{-1}{2}\end{array}\right.$ thì V pttt c) S pttt với mọi m

Bài 35. Xét một bài toán kinh tế với 3 mặt hàng (q_1,q_2,q_3) với giá tương ứng (p_1,p_2,p_3). Cho Y là biến doanh thu. Giả sử hàm cầu (nhu cầu) với các mặt hàng được cho như sau:

$$\begin{cases} q_1{}^d=-0.05p_1+0.02p_2-0.01p_3+0.02Y \\ q_2{}^d=0.01p_1-0.04p_2+0.01p_3+0.04Y \\ q_3{}^d=-0.03p_1+0.02p_2-0.06p_3+0.01Y \end{cases}$$

Và hàm cung của các mặt hàng được cho bởi:

$$\begin{cases} q_1{}^s=-20+0.2p_1 \\ q_2{}^s=-14+0.3p_2 \\ q_3{}^s=-25+0.1p_3 \end{cases}$$

a) Hãy giải thích dấu của các hệ số của giá và biến thu nhập trong hàm cầu.

b) Giả sử $Y=1000$, hãy tìm giá cân bằng cho ba mặt hàng kinh tế này (tức là giá sao cho lượng cung bằng với lượng cầu).

c) Điều gì xảy ra khi thu nhập (Y) tăng đến 1200?

ĐS: a) Dấu của hệ số giá p_i tương ứng với hàm cầu q_i^d luôn âm, phù hợp với thực tế xu hướng nghịch biến của giá và nhu cầu. Nếu hệ số của giá hàng hóa khác là dương (tương ứng âm) thể hiện các hàng hóa đó là hàng hóa thay thế (tương ứng bổ sung). Dấu của hệ số doanh thu là dương phù hợp với xu hướng đồng biến của doanh thu và nhu cầu.

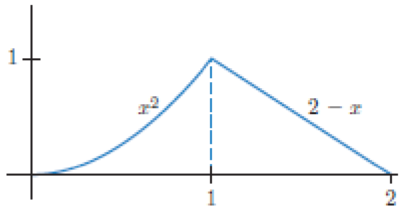
b) Cân bằng khi cung bằng cầu: $p_1=165,2265;\ p_2=169,8302;\ p_3=208,9988$.

c) Giá tăng : $p_1=182,6877;\ p_2=194,2342;\ p_3=221,2753$.

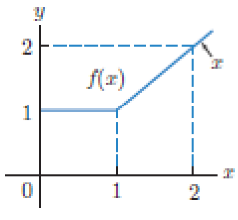
Chương 4: Đạo hàm và vi phân ứng dụng trong kinh tế

Bài 36. Tính hệ số góc của tiếp tuyến với các đồ thị cho trong hình vẽ dưới đây tại điểm có hoành độ $x_0 = \frac{1}{2}$:

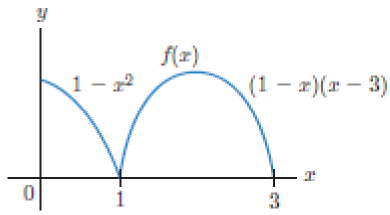
a)



b)



c)



ĐS: Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số f tại điểm có hoành độ x_0 là $f'(x_0)$.

a) 1; b) 0; c) -1

Bài 37. Tìm:

a) $\frac{dQ}{dP}$ với hàm số $Q = P^2 + 3P + 1$ (hàm cung);

b) $\frac{d(TR)}{dQ}$ với hàm số $TR = 40Q - 3Q\sqrt{Q}$ (hàm tổng doanh thu);

c) $\frac{d(AC)}{dQ}$ với hàm số $AC = \frac{30}{Q} + 7Q + 10$ (hàm trung bình chi phí);

d) $\frac{dC}{dY}$ với $C = \frac{300 + 2Y^2}{1+Y}$ (hàm tiêu dùng);

e) $\frac{dQ}{dL}$ với $Q = L^3 e^{-0.02L}$ (hàm sản xuất);

f) $\frac{dP}{dQ}$ với $P = 500 - 75\ln(2Q+1)$ (hàm cầu).

ĐS:

a) $\frac{dQ}{dP} = 2P + 3$	b) $\frac{d(TR)}{dQ} = 40 - \frac{9}{2}\sqrt{Q}$	c) $\frac{d(AC)}{dQ} = -\frac{30}{Q^2} + 7$
d) $\frac{dC}{dY} = \frac{2Y^2 + 4Y - 300}{(1+Y)^2}$	e) $\frac{dQ}{dL} = \left(3L^2 - 0.02L^3\right)e^{-0.02L}$	f) $\frac{dP}{dQ} = -\frac{150}{2Q+1}$

Bài 38.

a) Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x}}{1+x}$ tại giao điểm của đồ thị hàm số với đường thẳng $y = \frac{2}{5}$.

b) Tìm các điểm trên đồ thị hàm số $y = 1 + 2e^x - 3x$ mà tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm đó song song với đường thẳng $3x - y = 5$.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ tại tiếp điểm có hoành độ bằng -1.

d) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{1}{4}x^4-2x^2$ tại tiếp điểm $M(x_0;y_0)$ có hoành độ $x_0>0$ và $y''(x_0)=-1$.

ĐS: a) $y=-\frac{3}{100}x+\frac{13}{25}$; $y=\frac{12}{25}x+\frac{7}{25}$ b) $(x_0;y_0)=(\ln 3;7-3\ln 3)$

c) $y=-\frac{3x}{4}-\frac{1}{4}$ d) $y=-3x+\frac{5}{4}$

Bài 39(+). Cho hàm số $U(x)=\frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}$ $(\gamma\neq 1)$. Tính $r=-\frac{xU''(x)}{U'(x)}$.

ĐS: γ

Bài 40(+). Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số cho trong **Bài 37.**

ĐS: 1) 2; 2) $-\frac{9}{4\sqrt{Q}}$; 3) $\frac{60}{Q^3}$; 4) $\frac{604}{(1+Y)^3}$;

5) $\left(6L-0.12L^2-0.0004L^3\right)e^{-0.02L}$; 6) $\frac{3000}{(2Q+1)^2}$.

Bài 41. Tính dy tại x_0 với giá trị cho sẵn của $dx=\Delta x$:

a) $y=2x-x^2,\ x_0=2,\ \Delta x=-0.04$ c) $y=\sqrt{x};\ x_0=4;\ \Delta x=0.01$

b) $y=\frac{5}{x},\ x_0=8,\ \Delta x=0.1$ d) $y=e^x,\ x_0=0,\ \Delta x=0.005$

ĐS: a) 0.08; b) $-\frac{1}{128}$; c) 0.0025; d) 0.005.

Bài 42(+). Tính các đạo hàm cấp 10 của các hàm số sau:

a) $y=\frac{x^2}{1-x}$; b) $y=\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$.

ĐS: a) $y^{(10)}=\frac{10!}{(x-1)^{11}}$; b) $\frac{19!!}{2^9}(1-x)^{-\frac{21}{2}}+\frac{17!!}{2^{10}}(1-x)^{-\frac{19}{2}}$.

Bài 43. Biết hàm trung bình sản xuất (AP_L) được cho bởi công thức: $\mathrm{AP}_L=L.e^{-0.01L}$ (với L là số lượng nhân công). Tìm L để hàm trung bình sản xuất đạt giá trị lớn nhất.

ĐS: $L=100$.

Bài 44. Biết hàm trung bình chi phí (AC) được cho bởi công thức $\mathrm{AC}=\frac{20e^{Q/4}}{\sqrt{Q}}$. Với giá trị nào của Q thì hàm trung bình giá đạt giá trị nhỏ nhất?

ĐS: $Q=2$.

Bài 45. Một phương trình cầu một loại hàng hóa cho bởi: $P+2Q=20$ (P là giá của 1 loại mặt hàng, còn Q là lượng hàng cung) và hàm tổng chi phí (ký hiệu bởi TC) được cho bởi: $\mathrm{TC}=Q^3-8Q^2+20Q+2$.

a) Xác định Q để hàm tổng doanh thu (ký hiệu TR) đạt giá trị lớn nhất (biết công thức hàm tổng doanh thu là $\mathrm{TR}=P.Q$).

b) Xác định Q để tối đa hóa lợi nhuận π biết $\pi = \mathrm{TR} - \mathrm{TC}$. Hãy tính giá trị doanh thu cận biên (ký hiệu $\mathrm{MR} = \frac{\mathrm{d(TR)}}{\mathrm{d}Q}$) và chi phí cận biên (ký hiệu $\mathrm{MC} = \frac{\mathrm{d(TC)}}{\mathrm{d}Q}$) tại giá trị vừa tìm được của Q.

ĐS: a) $Q = 5$. b) $Q = 4$; khi đó $\mathrm{MR} = \mathrm{MC} = 4$.

Bài 46(+). (Cực tiểu hóa chi phí) Một nhà quản lý của hàng bách hóa muốn quây một khu đất hình chữ nhật với diện tích 60 m^2 vuông để trưng bày sản phẩm. Ba cạnh của khu đất sẽ được quây bằng gỗ với chi phí là 3 triệu/m. Cạnh thứ tư của khu đất sẽ được xây cố định bằng gạch và xi-măng với chi phí là 6 triệu/m. Hãy tìm số đo các chiều của khu đất để chi phí xây dựng là nhỏ nhất.

ĐS: $x = 3\sqrt{10}, \quad y = 2\sqrt{10}$.

Bài 47(+). (Cực tiểu hóa lượng vật liệu) Một loại lon nước giải khát có dạng hình trụ và chứa 0.4 lít chất lỏng. Xác định kích thước của lon nước để lượng vật liệu được sử dụng làm lon là ít nhất.

ĐS: Bán kính đáy lon $r = \sqrt[3]{\frac{200}{\pi}} \approx 3,9929$ và chiều cao lon $h \approx 7,9859$.

Bài 48(+). (Cực đại hóa doanh thu) Giả sử một hãng hàng không vận chuyển 8000 lượt hành khách mỗi tháng với giá vé là \$50 một lượt. Hãng hàng không muốn tăng giá vé, tuy nhiên bộ phận nghiên cứu thị trường cho biết cứ tăng giá vé lên thêm 1 đô la thì lượng hành khách sẽ giảm đi 100 người. Xác định giá vé thích hợp để doanh thu của hãng là tối đa.

ĐS: Giá vé P=\$65.

Bài 49(+). (Cực đại hóa năng suất) Một khu vườn cây ăn quả thu được 25 thùng quả mỗi cây khi trồng 40 cây trong vườn. Khi tăng mật độ cây trong vườn, người ta thấy rằng cứ trồng thêm 1 cây thì lượng quả thu được trên mỗi cây giảm đi 0.5 thùng. Vậy phải trồng bao nhiêu cây trong vườn thì lượng quả thu được là tối đa.

ĐS: Số lượng cây $m = 45$.

Bài 50(+). (Cực đại hóa lợi nhuận) Một người có một của hàng nhỏ bán các hộp đựng bút. Giả sử số lượng các hộp bán ra tỉ lệ nghịch với bình phương giá bán mỗi hộp. Nếu người đó bán với giá \$20 mỗi hộp thì sẽ bán được trung bình 125 hộp. Đầu tư ban đầu cho cửa hàng là \$750 và chi phí cho mỗi hộp đựng bút là \$5. Tìm giá bán mỗi hộp bút để lợi nhuận của cửa hàng là tối đa. Khi đó có bao nhiêu hộp được bán ra?

ĐS: Giá $P = \$10$ và bán được 500 hộp.

Bài 51. Tìm các đạo hàm riêng của các hàm số sau:

a) $z = \frac{x}{y^2+1} + \sqrt{x^2+2y}$; b) $u = e^{x^2y} + \frac{xy-1}{2x+y}$; c) $z = \frac{x}{2}\ln(x-2y)$.

ĐS:

$$\text{a) } z'_x = \frac{1}{y^2+1} + \frac{x}{\sqrt{x^2+2y}}; \quad z'_y = -\frac{2xy}{(y^2+1)^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2+2y}}$$

$$\text{b) } u'_x = 2xye^{x^2y} + \frac{y^2+2}{(2x+y)^2};\ u'_y = x^2e^{x^2y} + \frac{2x^2+1}{(2x+y)^2}$$

$$\text{c) } z'_x = \frac{1}{2}\ln(x-2y) + \frac{x}{2(x-2y)};\ z'_y = \frac{-x}{x-2y}$$

Bài 52. Cho hàm $f(x;y) = \ln(x^2+xy+y^2)$. Chứng minh rằng $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2$.

Bài 53(+). Cho hàm số $z = \arctan\dfrac{x}{y}$. Tính $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

ĐS: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

Bài 54(+). Cho hàm số $z = x\ln y + \dfrac{2x}{y}\cdot$ Tìm $A = \dfrac{x}{y}\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

ĐS: $A = \dfrac{2x}{y^3}$

Bài 55. Tìm $\dfrac{dz}{dt}$ trong các trường hợp sau:

a) $z = x\sqrt{1+y^2}$ với $x = te^t,\ y = e^{-t}$

b) $z = x^2 y$ với $x = \ln t,\ y = \dfrac{1}{t}$

c) (+) $f(x;y) = x^3 y + \ln(xy), x = e^t, y = \sin^2 t$

d) (+) $f(x;y) = x\ln(x+2y), x = \sin t, y = \cos t$.

ĐS:

a) $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{(1+e^{-2t})(t+1)e^t - te^{-t}}{\sqrt{1+e^{-2t}}}$

b) $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{2\ln t - \ln^2 t}{t^2}$

c) $\dfrac{dz}{dt} = 3e^{3t}\sin^2 x + 1 + e^{3x}\sin 2x + 2\cot x$

d) $\dfrac{dz}{dt} = \cos t\ln(\sin t + 2\cos t) + \dfrac{\sin t\cos t - 2\sin^2 t}{\sin t + 2\cos t}$

Bài 56. Tìm đạo hàm riêng của các hàm số hợp sau:

a) Cho $z = ue^v + ve^{-u}$ với $u = x+y; v = x-y$. Tìm $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ tại điểm $(x=1, y=0)$

b) (+) Cho $u = \sqrt{x^2+y^3}$ với $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$. Tìm $\dfrac{\partial u}{\partial r}, \dfrac{\partial u}{\partial \theta}$ tại điểm $(r=3,\ \theta=0)$

ĐS:

a) $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,\ 0) = 2e, \dfrac{\partial z}{\partial y}(1,\ 0) = \dfrac{-2}{e}$

b) $\dfrac{\partial u}{\partial r}(3,0) = 1, \dfrac{\partial u}{\partial \theta}(3,0) = 0$

Bài 57. Cho hàm sản lượng $Q = 5K^{\frac{2}{3}}L^{\frac{1}{3}}$ trong đó K là lượng tư bản và L là lượng lao động. Tìm $\dfrac{\partial Q}{\partial L}$ và $\dfrac{\partial Q}{\partial K}$ tại điểm $(K=27,\ L=64)$.

ĐS: $\dfrac{15}{16}; \dfrac{40}{9}$

Bài 58. Cho hàm chi phí $TC = 3Q_1^2 - 2Q_1Q_2 + 4Q_2^2$ với Q_i là sản lượng của sản phẩm thứ *i*. Tìm $\frac{\partial TC}{\partial Q_1}$ và $\frac{\partial TC}{\partial Q_2}$.

ĐS: $\frac{\partial TC}{\partial Q_1} = 6Q_1 - 2Q_2$; $\frac{\partial TC}{\partial Q_2} = -2Q_1 + 8Q_2$

Bài 59. Tính $\Delta f(1;1); df(1;1)$ của các hàm số sau:

a) $f(x;y) = xy^2; \Delta x = 0,1; \Delta y = 0,2$.

b) $f(x;y) = 5x^2\sqrt{y}; \Delta x = 0,05; \Delta y = 0,21$

ĐS:

a) $\Delta f(1;1) = 0,584; df(1;1) = 0,5$ b) $\Delta f(1;1) = 1,06375; df(1;1) = 1,025$

Bài 60. Cho $f(x;y) = x^2 + 3xy - y^2$. Hãy tính $\Delta f(1;1); df(1;1)$ khi x thay đổi từ 2 đến 2,05 và y thay đổi từ 3 đến 2,69.

ĐS: $\Delta f(2;3) = 0,6449;\ df(2;3) = 0,65$

Bài 61. Cho biết hàm lợi ích của người tiêu dùng $u = x^{0,4}y^{0,6}$, trong đó x là lượng hàng hóa A, y là lượng hàng hóa B. Tìm vi phân toàn phần và đạo hàm toàn phần của hàm u.

ĐS: $du(x,y) = 0,4x^{-0,6}y^{0,6}dx + 0,6x^{0,4}y^{-0,4}dy$, $u'(x,\ y) = (0,4x^{-0,6}y^{0,6},\ 0,6x^{0,4}y^{-0,4})$

Bài 62. Tìm vi phân toàn phần và đạo hàm toàn phần của các hàm số sau:

a) $f(x,y,z) = x^3 + yz^2 + 3xy - x + z$ tại điểm $(0,1,2)$

b) $f(x;y) = \ln\frac{x-y}{x+y}$ tại điểm $(1,\ 0)$

c) $f(x,\ y) = x\sin y + y\cos x\ (1,\ 0)$

ĐS:

a) $df(x,y,z) = (3x^2+3y-1)dx + (z^2+3x)dy + (2yz+1)dz \Rightarrow df(0,1,2) = 2dx + 4dy + 5dz$

$f^{'}(x,y,z) = (3x^2+3y-1,\ z^2+3x),\ 2yz+1) \Rightarrow f^{'}(0,1,2) = (2,\ 4,\ 5)$

b) $df(\sqrt{2},\ 1) = 2dx - 2\sqrt{2}dy,\ f^{'}(\sqrt{2},\ 1) = (2,\ -2\sqrt{2})$

c) $df(x,\ y) = (\sin y - y\sin x)dx + (x\cos y + c\text{osx})dy$

$f^{'}(x,\ y) = (\sin y - y\sin x,\ x\cos y + c\text{osx})$

Bài 63(+). Tìm vi phân toàn phần $df(x;y)$ của các hàm hợp sau:

a) $f(u) = \ln u;\ u(x;y) = xy^2 + e^{2y}$

b) $f(u;v) = u^2 + 2v$ với $u(x;y) = xy^2, v(x;y) = x + 3y$

c) $f(u;v) = \frac{u}{v}$ tại điểm $(2;0)$ với $u(x;y) = x\sin y, v(x;y) = x - 2y$

ĐS:

a) $df(x;y) = \frac{y^2}{xy^2 + e^y}dx + \frac{2xy + 2e^{2y}}{xy^2 + e^y}dy$

b) $df(x;y) = (2xy^4 + 2)dx + (4x^2y^3 + 6)dy$

c) $df(2;0) = 1dx + 0dy$

Bài 64. Tìm các điểm cực trị và giá trị cực trị (nếu có) của các hàm số sau:

a) $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$;

b) $z = (x + y^2)e^{x-2y}$;

c) $z = \dfrac{y^4}{4} + x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 - 8y + 1$;

d) $z = xy(1 - x - y)$;

e) $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$;

f) $f(x, y) = -x^2y^2 + 4xy - x^2 + 4x$

g) $\pi = 60Q_1 + 34Q_2 - 6Q_1^2 - 3Q_2^2 - 4Q_1Q_2$

Trong đó π là hàm tổng lợi nhuận, Q_i là sản lượng của sản phẩm thứ *i*.

h) $\pi = 200Q_1 + 115Q_2 - 10Q_1^2 - 2,5Q_2^2 - 2000$

Trong đó π là hàm tổng lợi nhuận, Q_i là sản lượng của sản phẩm thứ *i*.

ĐS:

a) $z_{CT} = z(1,1) = z(-1,-1) = -2$

b) $z_{CT} = z(-2,-1) = -1$

c) $z_{CT} = z(1,\ 2) = -11,5$

d) $z_{CĐ} = z(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{27}$

e) $z_{CT} = z(2,\ 1) = -28,\ z_{CĐ} = z(-2,\ -1) = 28$

f) $f_{CĐ} = f(2,1) = 8$

g) $\pi_{CĐ} = \pi(4,3) = 171$

h) $\pi_{CĐ} = \pi(10,23) = 322,5$

Bài 65. Một doanh nghiệp sản xuất hai loại sản phẩm với hàm chi phí $TC = 3Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + 2Q_2^2 + 10$ (Q_i là lượng sản phẩm thứ i). Tìm mức sản lượng Q_1, Q_2 để doanh nghiệp đạt lợi nhuận tối đa biết giá sản phẩm 1 là $160 và giá sản phẩm 2 là $120.

ĐS: $Q_1 = 20; Q_2 = 20$

------------------------ HẾT ------------------------