Bài 1. Cho các ma trận: $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & -5 & 7 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 7 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} -1 & 34 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$

Hãy thực hiện các phép tính sau: $A+B$, $A-3B$, A^t+2B^t, A^tB, $A.B^t$, $A.B^tC$.

ĐS: $A^tB=\begin{bmatrix} 14 & 14 & 5 \\ 28 & -16 & 23 \\ 42 & 34 & 9 \end{bmatrix}$, $A.B^t=\begin{bmatrix} 6 & 34 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $A.B^tC=\begin{bmatrix} 62 & 0 \\ 0 & 62 \end{bmatrix}$

Bài 2. Cho các ma trận $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ và $C=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1) Hai ma trận nào có thể nhân được với nhau ?
2) Tính AB, ABC, C^n.

ĐS: 1) AB, BA, BC, CA

2) $AB=\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $ABC=\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $C^n=\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Bài 3. Thực hiện các phép tính sau:

1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^3$.

ĐS: 1) $\begin{bmatrix} 14 \\ 10 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} -1 & 27 & -9 \\ 18 & -28 & 0 \\ 0 & 9 & -1 \end{bmatrix}$.

Bài 4. Cho ma trận $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

1) Tìm ma trận X thỏa mãn $A^2+2A-3X=0$
2) Tính A^{2017}.

ĐS: 1) $X=\begin{bmatrix} \frac{8}{3} & 2 \\ 0 & \frac{8}{3} \end{bmatrix}$; 2) $A^{2017}=\begin{bmatrix} 2^{2017} & 2017.2^{2016} \\ 0 & 2^{2017} \end{bmatrix}$

Bài 5. Tính các định thức sau:

1) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x \\ 1 & x & 0 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 1 & -a & 1 \\ -2 & 1 & -a \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

ĐS: 1) $(x+2)(x-1)^2$ 2) 0 3) $3a^2-4a+2$ 4) 40 5) -45

Bài 6. Cho ma trận $A=\begin{bmatrix} -2 & 1 & m \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

1) Với $m=1$ hãy tính $\det A$, $\det(5A^t)$, $\det(A^4)$.

2) m là giá trị nào đó mà $\det A = 3$. Với những giá trị m đó hãy tính $\det(A^{-1})$, $\det(2A^2)$

ĐS: 1) $\det A = 2$, $\det(5A^t) = 250$, $\det(A^4) = 16$

2) $\det A^{-1} = \dfrac{1}{3}$, $\det(2A^2) = 72$

Bài 7. Tìm hạng của các ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 7 & 2 \\ 1 & 10 & 17 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 5 & 3 \\ 7 & 9 & 7 & 9 & 7 \end{bmatrix}.$$

ĐS: $r(A) = 2,\ r(B) = 3,\ r(C) = 2$

Bài 8 : Xác định hạng của các ma trận sau tùy theo tham số a :

$$1)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 3 \end{bmatrix} \quad 2)\ B = \begin{bmatrix} 3 & a & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 7 & 2 \\ 1 & 10 & 17 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad 3)\ C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 10 & 2 \\ 1 & 4 & 7 & 2 \\ 6 & a & -8 & 2 \end{bmatrix}$$

ĐS: 1) Với $a = 0; -5 \to r(A) = 2; a \neq 0; -5 \to r(A) = 3.$

2) Với $a = 0 \to r(B) = 2; a \neq 0 \to r(B) = 3.$

3) Với $a = -6 \to r(C) = 2; a \neq -6 \to r(C) = 3.$

Bài 9. Tìm m để ma trận sau có hạng bằng 2:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ m & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

ĐS : $m = 0$

Bài 10. Cho các ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 5 \\ -1 & -4 & 3 \\ 3 & 9 & -7 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ và } D = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 3 \\ -1 & -4 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

1) Hãy tính các tích AB và BA. Từ đó hãy cho biết ma trận A có khả nghịch không? chỉ ra ma trận nghịch đảo (nếu có) của ma trận A.
2) Ma trận C có phải ma trận nghịch đảo của ma trận B hay không? Vì sao?
3) Tìm ma trận X (nếu có) thỏa mãn: $XA = B$.
4) Hãy tính tích CD. Từ đó hãy cho biết ma trận D có khả nghịch không? chỉ ra ma trận nghịch đảo (nếu có) của ma trận D.

ĐS: 1) $AB = BA = I_3$, $A^{-1} = B$ 2) không 3) $X = B^2 = ...$ 4) $CD = 3I_3$

Bài 11. Tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của các ma trận sau : $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 2 & -1\\ 3 & -4 & -2\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$

ĐS: $A^{-1}=\begin{bmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{bmatrix}$, $B^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 3 & 8\\ 1 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 6\end{bmatrix}$

Bài 12. Cho ma trận $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & m & -1\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix}$

1) Tìm m để ma trận A khả nghịch.
2) Giả sử m là những giá trị mà ma trận A khả nghịch. Chứng minh rằng với những giá trị m đó thì A^2, A^3 cũng khả nghịch.
3) Với $m=-1$, hãy tìm ma trận nghịch đảo của A.

ĐS: 1) $m\neq -1/2$ 3) $A^{-1}=\begin{bmatrix}4 & -5 & -3\\ 1 & -2 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$

Bài 13. Cho ma trận $A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1\\ m & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}$

1) Với giá trị nào của m thì hạng của ma trận A bằng 3? Với các giá trị m vừa tìm được thì ma trận A có khả nghịch không?
2) Với $m=-1$, hãy tính tích các phần tử nằm trên đường chéo chính của ma trận nghịch đảo A^{-1} (nếu có)

ĐS: 1) $m\neq -\frac{3}{5}$ (*hạng của mt vuông A bằng cấp của mt khi và chỉ khi* $\det(A)\neq 0$) ; 2) -3

Bài 14. Cho ma trận $A=\begin{bmatrix}1+m & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1+m & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+m & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1+m\end{bmatrix}$

1) Tìm điều kiện của m để A khả nghịch.
2) Khi A khả nghịch, giả sử ma trận nghịch đảo của A là $A^{-1}=\left(c_{ij}\right)_{4\times 4}$. Tìm m để $c_{23}=\frac{1}{4}$ và $\det\left(A^{-1}\right)=-\frac{1}{16}$

ĐS: 1) $m\neq 0$ và $m\neq -4$ 2) $m=-2$

Bài 15. Giải các hệ phương trình tuyến tính sau

1) $\begin{cases} x - y - 2z + t = -2 \\ 2x - y + z + 3t = -3 \\ -x + 2y + 3z - 2t = -1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 5x_1 - 10x_2 - 12x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ 5x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 5 \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 = 7 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$

<u>ĐS</u>: 1) $\begin{cases} z = a \in \mathbb{R} \\ x = a - 5 \\ y = -1 - 3a \\ t = 2 - 2a \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x_4 = a \in \mathbb{R} \\ x_2 = b \in \mathbb{R} \\ x_3 = \dfrac{-2a}{3} \\ x_1 = 2b - 3a \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -1 \\ x_4 = -1 \end{cases}$; 5) vô nghiệm

Bài 16.

1) Với giá trị nào của m thì các hệ phương trình sau có nghiệm:

a) $\begin{cases} x - 2y + z - t = -1 \\ 3x + y - 2z + t = 2 \\ x + 5y - 4z + mt = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + 10z - 6t = 3 \\ x + 2y + mz - t = 1 \\ 2x + 5y - z + mt = 2 \end{cases}$

2) Với giá trị nào của m thì hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất? Có vô số nghiệm?

$$\begin{cases} x + 3y - 2t = 0 \\ -y + 2z - t = 0 \\ 2x - z + t = 0 \\ 4x + y + mz = 0 \end{cases}$$

3) Tìm m để hệ phương trình sau trở thành hệ Cramer? Khi đó hãy tính thành phần x trong công thức nghiệm:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ 2my - 2z = 1 \\ -x + y - 3z = 3 \end{cases}$$

<u>ĐS</u>:

1) a) $m \neq 4$ b) $m \neq 3$ (HD: *Biến đổi ma trận bổ sung của hệ pttt về dạng bậc thang. Hệ pttt có nghiệm khi và chỉ khi* $r(A) = r(A^{bs})$)

2) $\det(A) = 11m + 5$ với A là ma trận hệ số của hệ pttt(*Hệ vuông thuần nhất có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi* $\det(A) \neq 0$, *có vô số nghiệm khi và chỉ khi* $\det(A) = 0$)

3) $m \neq -1/2$

Bài 17. Tìm tất cả các ma trận X (nếu có) thỏa mãn:

1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} X = X \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$; 2) $X \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 3) $X \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ 5) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

ĐS: 1) $X = \begin{bmatrix} x & y \\ y & x+y \end{bmatrix}, x, y \in \mathbb{R}$; 2) $X = \begin{bmatrix} -3 & 7 & 2 \\ 1 & -1.5 & 0.5 \end{bmatrix}$;

3) $X = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$; 4) $X = \begin{bmatrix} 7/4 \\ 5/4 \\ -7/4 \end{bmatrix}$; 5) $X = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

Bài 18. Trong các tập hợp sau, tập hợp nào là không gian véctơ con của các không gian tương ứng ?

1) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3z = 1\}$ trong $\mathbb{R}^3$

2) $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy - 2z = 0\}$ trong $\mathbb{R}^3$.

3) $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2t - 3 = 0, y - t - z = 0\}$ trong $\mathbb{R}^4$

4) $J = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3z = 0\}$ trong $\mathbb{R}^3$

5) $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y \geq 0\}$

ĐS: 4)

Bài 19. Trong $\mathbb{R}^3$, véctơ u sau đây có phải là tổ hợp tuyến tính của các véctơ còn lại không? Tại sao? Với $u_1 = (1,1,1), u_2 = (0,-1,1), u_3 = (-2,-1,3), u = (2,-1,5)$.

ĐS: Có vì $u = 2u_1 + 3u_2$.

Bài 20. Tìm điều kiện của m để véctơ u trong $\mathbb{R}^3$ sau đây là tổ hợp tuyến tính của các véctơ còn lại với $u_1 = (0,1,-1), u_2 = (-2,1,3), u_3 = (m,2,-1), u = (1,m,2)$.

ĐS: Là THTT khi và chỉ khi $m \neq \dfrac{-1}{2}$

Bài 21: Chứng minh $U = \{u = (1,-1), v = (0,3)\}$ là một hệ sinh của không gian véctơ $\mathbb{R}^2$. Hãy tìm biểu thị tuyến tính của mỗi véctơ $w = (4,2),\ t = (-2,5),\ s = -3w + t$ qua hệ véctơ U .

ĐS: $w = 4u + 2v,\ t = -2u + v,\ s = -14u - 5v$

Bài 22. Họ các véctơ sau độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính trong không gian tương ứng?

1) $V = \{v_1 = (-2,4), v_2 = (1,-2)\}$ trong $\mathbb{R}^2$.

2) $V = \{v_1 = (2,-1,1,0), v_2 = (4,-2,2,1)\}$ trong $\mathbb{R}^4$

3) $U = \{u_1 = (1,-2,0,4), u_2 = (3,-2,1,1), u_3 = (0,0,0,0)\}$ trong $\mathbb{R}^4$.

4) $U = \{u_1 = (1,-2,0), u_2 = (3,-2,1), u_3 = (2,0,1)\}$ trong $\mathbb{R}^3$.

5) $U=\{u_1=(-1,2,4),u_2=(3,-2,2),u_3=(1,0,3),u_4=(1,1,1)\}$ trong $\mathbb{R}^3$.

6) $S=\{s_1=(0,-1,2,4),s_2=(-1,2,4,0),s_3=(2,4,0,-1),s_4=(4,0,-1,2)\}$ trong $\mathbb{R}^4$.

ĐS: 1) PTTT 2) ĐLTT 3) PTTT 4)PTTT 5) PTTT 6) ĐLTT

Bài 23.

1) Trong không gian véctơ $\mathbb{R}^3$ cho họ véctơ:

$$V=\{v_1=(-1,2,4),v_2=(3,-2,1),v_3=(2,-1,5)\}$$

a) Chứng minh rằng họ V là cơ sở của không gian $\mathbb{R}^3$.

b) Các họ véctơ $I=\{v_1,v_2\}$ và $J=\{v_1,v_3\}$ độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính? Vì sao?

c) Hãy tìm một biểu thị tuyến tính của véctơ v_1 qua các véctơ còn lại của họ véctơ V.

2) Chứng minh họ véctơ $U=\{u_1=(1,3),u_2=(2,-2)\}$ là một cơ sở của không gian véctơ $\mathbb{R}^2$.

3) Họ véctơ sau đây có phải là một cơ sở của không gian véctơ $\mathbb{R}^3$ không?

$$W=\{w_1=(-2,3,4),w_2=(3,-2,5),w_3=(5,0,23)\}$$

ĐS: 1b) họ véctơ I,J ĐLTT 1c) không có 3) không

Bài 24. Với giá trị nào của m thì họ véctơ sau đây độc lập tuyến tính? Phụ thuộc tuyến tính?

1) $V=\{v_1=(2,1,1,m),v_2=(2,1,-1,m),v_3=(10,5,-1,5m)\}$ trong $\mathbb{R}^4$.

2) $U=\{u_1=(2,1,2m),u_2=(2,1,-1),u_3=(1+m,2,-3)\}$ trong $\mathbb{R}^3$.

3) $W=\{w_1=(m,2,1),w_2=(1,-2,m),w_3=(2,2,3)\}$ trong $\mathbb{R}^3$.

ĐS:

1) PTTT khi $m=-1/2$; ĐLTT khi $m\neq -1/2$
2) PTTT khi $m=-1/2$ hoặc $m=3$; ĐLTT khi $m\neq -1/2$ và $m\neq 3$
3) PTTT khi $m=-1$ hoặc $m=0$; ĐLTT khi $m\neq -1$ và $m\neq 0$

Bài 25. Trong không gian véctơ $\mathbb{R}^3$ cho tập hợp: $Q=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-2z=0, x-y-z=0\}$.

1) Chứng minh rằng Q là không gian véctơ con của $\mathbb{R}^3$.

2) Tìm một cơ sở và tính số chiều của không gian Q.

3) Chứng minh véctơ $u=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\in Q$ và tìm tọa độ của u trong cơ sở tìm được ở trên.

ĐS: 2) Một cơ sở $U=\{v=(2,1,1)\}$ $\dim V=1$ 3) $u_U=\left(\frac{1}{2}\right)$

Bài 26. Trong không gian véctơ $\mathbb{R}^3$ cho tập hợp $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-3y+z=0\}$

1) Véctơ $u=(1,2,3)$ có thuộc W không? Chỉ ra một véctơ (khác véc tơ không) thuộc W.

2) Chứng minh rằng W là một không gian véctơ con của $\mathbb{R}^3$.

3) Tìm một cơ sở, số chiều của không gian W.

4) Chứng minh véctơ $u=(1,2,5)\in W$ và tìm tọa độ của u trong cơ sở của W tìm được ở trên.

ĐS:

1) Không. VD chọn $u=(1,1,2)\in W$
2) Cách 1: Chứng minh W đóng kín với phép toán cộng và nhân với vô hướng.
   Cách 2: Viết $W=span\{u_1,u_2\}$
3) Một cơ sở $S=\{u_1=(3,1,0),u_2=(-1,0,1)\}$; $\dim W=2$
4) $u_S=(2,5)$

Bài 27. Trong không gian véctơ $\mathbb{R}^4$ cho tập hợp $S=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x+2t=0, y-z-t=0\}$

1) Véctơ $u=(1,2,5,4)$ có thuộc S không?
2) Chứng minh rằng S là một không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^4$.
3) Tìm một cơ sở và tính số chiều của không gian S.

ĐS: 1) Không 3) Một cơ sở $U=\{u_1=(-2,1,1,0),u_2=(0,1,0,1)\}$, $\dim S=2$.

Bài 28. Trong không gian véctơ $\mathbb{R}^4$ cho tập hợp $H=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid y+2t=0\}$.

1) Chứng minh H là một không gian véctơ con của $\mathbb{R}^4$
2) Tìm một cơ sở, số chiều của không gian H
3) Chứng minh véctơ $u=(-4;2;-1;1)$ thuộc H và tìm tọa độ của u trong cơ sở tìm được ở trên.

ĐS: 2) Một cơ sở $U=\{u_1=(1,0,0,0),u_2=(0,-2,1,0),u_3=(0,0,0,1)\}$; $\dim H=3$;
3) $u_S=(-4,-2,1)$

Bài 29. Trong không gian véctơ $\mathbb{R}^2$ cho hai tập hợp

$$U=\{u_1=(1,-1),u_2=(2,1)\} \text{ và } V=\{v_1=(3,1),v_2=(1,-1)\}$$

1) Chứng minh rằng U và V là hai cơ sở của $\mathbb{R}^2$.
2) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ U sang V.
3) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ V sang U.
4) Tìm tọa độ của véctơ $x=(3,-1)$ trong cơ sở U.
5) Tìm véctơ y trong $\mathbb{R}^2$ có tọa độ trong cơ sở U là $y_U=(4,-5)$.
6) Biết tọa độ của véctơ z trong cơ sở U là $z_U=(7,2)$, hãy tìm tọa độ của z trong cơ sở V.

ĐS: 2) $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 1\\ \frac{4}{3} & 0\end{bmatrix}$; 3) $B=\begin{bmatrix}0 & \frac{3}{4}\\ 1 & -\frac{1}{4}\end{bmatrix}$; 4) $x_U=\left(\frac{5}{3},\frac{2}{3}\right)$; 5) $y=(-6,-9)$; 6) $z_V=\left(\frac{3}{2},\frac{13}{2}\right)$

Bài 30. Trong không gian véctơ $\mathbb{R}^3$ cho hai tập hợp $U=\{u_1=(1,1,-1),u_2=(1,1,0),u_3=(2,1,-1)\}$ và $V=\{v_1=(1,1,0),v_2=(1,0,-1),v_3=(1,1,1)\}$.

1) Chứng minh U và V là hai cơ sở của $\mathbb{R}^3$.
2) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ U sang V.
3) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ V sang U.

4) Tìm tọa độ của véctơ $x=(2,3,-1)$ trong cơ sở U.

5) Tìm véctơ y trong $\mathbb{R}^3$ có tọa độ trong cơ sở U là $y_U=(1,1,-1)$.

6) Biết tọa độ của véctơ z trong cơ sở V là $z_V=(1,0,2)$, hãy tìm tọa độ của z trong cơ sở U.

ĐS: 2) $A=\begin{bmatrix}0&0&-1\\1&-1&2\\0&1&0\end{bmatrix}$; 3) $B=\begin{bmatrix}2&1&1\\0&0&1\\-1&0&0\end{bmatrix}$; 4) $x_U=(2,2,-1)$;

5) $y=(0,1,0)$; 6) $z_U=(0,2,-1)$

Bài 31. Tìm hạng của họ các véctơ sau:

1) $U=\{u_1=(-2,1,1),u_2=(2,-3,1),u_3=(-1,0,1),u_4=(1,-3,2)\}$ trong không gian véctơ $\mathbb{R}^3$.

2) $V=\{v_1=(-2,1,1),v_2=(2,-3,1),v_3=(4,0,1)\}$ trong không gian véctơ $\mathbb{R}^3$.

3) $W=\{w_1=(2,2,0,0,-1),w_2=(3,-3,1,5,2),w_3=(1,-1,-1,0,0)\}$ trong không gian véctơ $\mathbb{R}^5$.

ĐS: 1) 2; 2) 3; 3) 3.

Bài 32. Trong không gian véctơ $\mathbb{R}^4$ hãy tìm hạng của họ các véctơ sau tùy theo m:

$$U=\{u_1=(2,1,1,m),u_2=(1,3,-1,2),u_3=(-3,1,-3m,0)\}$$

ĐS: $m=1$ thì hạng của họ véctơ là 2; $m\neq 1$ thì hạng của họ véctơ là 3.

Bài 33. Trong các ánh xạ sau, ánh xạ nào không phải ánh xạ tuyến tính ?

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2,\ x\in\mathbb{R},\ f(x)=(x,3x)$

2) $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ g(x,y)=(x+2y,3x-y+1)$

3) $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ h(x,y)=(xy,x-y)$

4) $k:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ k(x,y,z)=(x+2y,x-y+z,x-2z)$

5) $l:\mathbb{R}^2\to Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ l(x,y)=\begin{bmatrix}2x-y&x+y\\-x+3y&3x-y\end{bmatrix}$

ĐS: g,h

Bài 34. Cho ánh xạ $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ xác định bởi: $\forall u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ f(u)=(x+y,y-z)$

1) Chứng minh rằng f là ánh xạ tuyến tính.

2) Tìm $\ker f$, $\operatorname{Im} f$ và tính hạng của f.

3) Tìm ma trận của f trong cơ sở $U=\{u_1=(1,1,0),\ u_2=(1,0,1),\ u_3=(1,1,1)\}$ của $\mathbb{R}^3$ và cơ sở $V=\{v_1=(1,1),\ v_2=(1,2)\}$ của $\mathbb{R}^2$.

ĐS: $\ker f=\{u=(-t,t,t)\,|\,t\in\mathbb{R}\}$; $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}^2$; $r(f)=\dim(\operatorname{Im} f)=2$; $A=\begin{bmatrix}3&3&4\\-1&-2&-2\end{bmatrix}$.

Bài 35. Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$\forall u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ f(u)=(x+2y,3y+z,3x-2z)$$

1) Tìm $\ker f$, $\operatorname{Im} f$ và hãy chỉ ra cho mỗi không gian đó một sơ sở.

2) Tìm hạng của ánh xạ f.
3) Tìm ma trận A của ánh xạ f trong cơ sở $U=\{u_1=(0,1,1),u_2=(1,0,1),u_3=(1,1,1)\}$ của $\mathbb{R}^3$.

ĐS: 1) $\ker f=\{u=(2t,-t,3t)\,|\,t\in\mathbb{R}\}=span\{(2,-1,3)\}$

2) $\operatorname{Im} f=span\{(1,0,3),(2,3,0),(0,1,-2)\}=span\{(1,0,3),(0,1,-2)\}$; $r(f)=2$.

3) $A=\begin{bmatrix}-4&0&-2\\-6&0&-3\\8&1&6\end{bmatrix}$.

Bài 36. Giả sử $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ là một ánh xạ tuyến tính sao cho $f(1,1)=(3,4)$ và $f(2,3)=(5,2)$

1) Tìm $f(3,-4)$
2) Xác định $f(x,y)$ với mọi $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

ĐS: 1) $f(3,-4)=(16,54)$; 2) $f(x,y)=(4x-y,10x-6y)$.

Bài 37. Giả sử $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ là một ánh xạ tuyến tính sao cho $f(1,-1)=(-1,1,2)$ và $f(-2,3)=(2,3,-4)$.

1) Chứng minh rằng $U=\{u_1=(1,-1),\ u_2=(-2,3)\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^2$
2) Tìm $f(3,-5)$
3) Tổng quát, tìm $f(x,y)$ với mọi $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$
4) Tính hạng của f
5) Tìm $\ker f$

ĐS: 2) $f(3,-5)=(-3,-7,2)$;

3) Biểu diễn $u=(x,y)=(3x+2y)u_1+(x+y)u_2$, từ đó $f(x,y)=(-x,6x+5y,2x)$.

4) $r(f)=2$; 5) $\ker f=\{(0,0)\}$

Bài 38. Cho ma trận $A=\begin{bmatrix}1&1&4\\2&0&-4\\-1&1&5\end{bmatrix}$.

1) Tìm các giá trị riêng của ma trận A. Ma trận A có chéo hóa được không? Vì sao?
2) Tìm các véc tơ riêng của A.
3) Xác định ma trận P làm chéo hóa ma trận A và đưa ra ma trận $P^{-1}AP$.

ĐS: 1) Các giá trị riêng $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$ và $\lambda_3=3$; A chéo hóa được.

2) Các véc tơ riêng tương ứng là $(0,-4t,t),(t,t,0),(2t,0,t),\ t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

3) $P=\begin{bmatrix}0&1&2\\-4&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$, $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$.

Bài 39. Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ có ma trận là $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ trong cơ sở chính tắc $E=\{e_1=(1,0,0),\ e_2=(0,1,0),\ e_3=(0,0,1)\}$ của $\mathbb{R}^3$.

1) Tìm công thức xác định ánh xạ tuyến tính f.
2) Tìm ma trận của ánh xạ f trong cơ sở $U=\{u_1=(1,0,0),\ u_2=(1,0,1),\ u_3=(1,1,1)\}$ của $\mathbb{R}^3$.
3) Tìm các giá trị riêng và các véctơ riêng của ma trận A. Ma trận A có chéo hóa được không ? nếu có hãy viết ma trận P làm chéo hóa A.

ĐS: 1) Với $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $f(u)=(y+z,x+z,x+y)$

(HD: *Với* $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, *có* $u=xe_1+ye_2+ze_3$ *suy ra* $f(u)=xf(e_1)+yf(e_2)+zf(e_3)$)

2) $B=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

3) Mt A có hai giá trị riêng là $\lambda_1=2$ (bội 1) và $\lambda_2=-1$ (bội 2).

Véctơ riêng ứng với gt riêng $\lambda_1=2$ có dạng $v=\begin{bmatrix} x & x & x\end{bmatrix}^t$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Véctơ riêng ứng với gt riêng $\lambda_2=-1$ có dạng $v=\begin{bmatrix} x & y & -x-y\end{bmatrix}^t$; $\forall x,y\in\mathbb{R},(x,y)\neq(0,0)$.

Ma trận $P=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ làm chéo hóa A và $P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Bài 40. Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ có ma trận là $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ trong hai cơ sở $U=\{u_1=(1,1,0),u_2=(1,0,1),u_3=(1,1,1)\}$ của $\mathbb{R}^3$ và cơ sở $V=\{v_1=(1,1),\ v_2=(1,2)\}$ của $\mathbb{R}^2$

1) Tính $f(4,2,1)$.
2) Tìm công thức xác định ánh xạ tuyến tính f.
3) Tìm hạt nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính f và tìm cho mỗi không gian con này một cơ sở.

ĐS:

1) $f(4,2,1)=(10,17)$

(HD: *Biểu diễn* $u=(4,2,1)=3u_1+2u_2-u_3 \Rightarrow f(u)=3f(u_1)+2f(u_2)-f(u_3)$)

2) Với $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ có $u=(x-z)u_1+(x-y)u_2+(-x+y+z)u_3$

CT xác định f là $f(u)=(2x+y,4x+y-z)$.

3) Có $\ker f=\{u=(x,-2x,2x)\,|\,x\in\mathbb{R}\}=span\{(1,-2,2)\}$

Từ $\dim(\ker f)+\dim(\operatorname{Im} f)=\dim(\mathbb{R}^3)$ suy ra $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}^2$, VD 1 cơ sở là V.

Bài 41. Cho $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ là ánh xạ xác định bởi: $\forall u=(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(u)=(-8x+15y,-6x+11y)$

1) Chứng minh rằng f là ánh xạ tuyến tính
2) Tìm $\ker f$, $\operatorname{Im} f$ và tính hạng của f
3) Tìm ma trận A của ánh xạ tuyến tính f trong trong cơ sở $U=\{u_1=(1,1),\ u_2=(2,1)\}$ của $\mathbb{R}^2$
4) Tìm các giá trị riêng và các véctơ riêng của ma trận A. Ma trận A có chéo hóa được không ? nếu có, hãy viết ma trận P làm chéo hóa A

<u>**ĐS**</u>: 2) $\ker f=\{(0,0)\}\Rightarrow \operatorname{Im} f=\mathbb{R}^2$

3) $A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$.

4) A có 2 giá trị riêng là $\lambda_1=1$ và $\lambda_2=2$.

Véctơ riêng ứng với gt riêng $\lambda_1=1$ có dạng $u=\begin{bmatrix}x\\ 2x\end{bmatrix}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Véctơ riêng ứng với gt riêng $\lambda_2=2$ có dạng $u=\begin{bmatrix}x\\ x\end{bmatrix}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Ma trận $P=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ làm chéo hóa A và $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$.

Bài 42. Cho ánh xạ $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ xác định bởi: $\forall u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ f(u)=(x+z,y,x+z)$

1) Chứng minh rằng f là ánh xạ tuyến tính.
2) Tìm $\ker f$, $\operatorname{Im} f$ và tính hạng của f. Chỉ ra cho mỗi không gian $\ker f$, $\operatorname{Im} f$ một cơ sở.
3) Tìm ma trận A của ánh xạ tuyến tính f trong trong cơ sở chính tắc
$E=\{e_1=(1,0,0),\ e_2=(0,1,0),\ e_3=(0,0,1)\}$ của $\mathbb{R}^3$.
4) Tìm các giá trị riêng và các véctơ riêng của ma trận A. Ma trận A có chéo hóa được không ? nếu có hãy viết ma trận P làm chéo hóa A.

<u>**ĐS**</u>: 2) $\ker f=\{(x,0,-x)\mid x\in\mathbb{R}\}=span\{(1,0,-1)\}$; $\operatorname{Im} f=span\{(1,0,1),(0,1,0)\}$; $r(f)=2$.

3) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

4) A có 3 giá trị riêng là $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$ và $\lambda_3=2$.

Véctơ riêng ứng với gt riêng $\lambda_1=0$ có dạng $u=\begin{bmatrix}x & 0 & -x\end{bmatrix}^t$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Véctơ riêng ứng với gt riêng $\lambda_2=1$ có dạng $u=\begin{bmatrix}0 & y & 0\end{bmatrix}^t$, $y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Véctơ riêng ứng với gt riêng $\lambda_3=2$ có dạng $u=\begin{bmatrix}z & 0 & z\end{bmatrix}^t$, $z\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Ma trận $P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ làm chéo hóa A và $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$.

Bài 43. Cho ma trận $A=\begin{bmatrix}1 & 6\\ 5 & 2\end{bmatrix}$ và $u=\begin{bmatrix}6\\ -5\end{bmatrix}$, $v=\begin{bmatrix}3\\ -2\end{bmatrix}$. Hỏi u,v có là những véctơ riêng của ma trận A không ? vì sao ?

HD: $Au=-4u$; $Av=\begin{bmatrix}-9\\ 11\end{bmatrix}\neq \lambda v,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Bài 44. Ma trận sau có chéo hóa được không ? Nếu được hãy đưa ma trận đó về dạng chéo:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 4 & 3\\ -4 & -6 & -3\\ 3 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

HD: Ma trận A có hai giá trị riêng là $\lambda_1=1$ (bội 1) và $\lambda_2=-2$ (bội 2).

K/g riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_1=1$ (bội 1) là không gian 1 chiều sinh bởi $v=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}^t$.

K/g riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_2=-2$ (bội 2) là không gian 1 chiều sinh bởi $v=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\end{bmatrix}^t$

Ma trận A vuông cấp 3 không có đủ 3 véctơ riêng ĐLTT, do đó A không chéo hóa được .

-- HẾT --