Chương 1: Ma trận - Định thức - Hệ phương trình tuyến tính

Bài 1. Tìm các số m, n, k biết :

1) $A_{m\times 3}.B_{n\times 4} = C_{2\times k}$ 2) $A_2.B_{m\times n} = C_{k\times 5}$

ĐS: 1) $m = 2, n = 3, k = 4$ 2) $m = 2, n = 5, k = 2$

Bài 2. Cho các ma trận: $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

Tính $A + 3B^t$, AB, BA, ABC, CB.

ĐS: $A + 3B^t = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 15 \\ -1 & 14 & 18 \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} 21 & 29 \\ 12 & 13 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 8 & 23 & 6 \\ 16 & 46 & 12 \end{bmatrix}, ABC = \begin{bmatrix} 129 & 118 \\ 63 & 71 \end{bmatrix}, \overline{\exists} CB$

Bài 3. Cho $A = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 6 & 5 & -8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ và I là ma trận đơn vị cấp 3.

1) Tìm ma trận X sao cho $2A - 3X = 5I$.

2) Tính $A + B^2$ và $B.A^t$. **Từ đó** hãy cho biết ma trận B có khả nghịch không ? nếu có, hãy suy ra ma trận nghịch đảo của ma trận B.

3) Tìm $x \in \mathbb{R}$ sao cho $\det(B - xI) = 0$. Tìm ma trận Y thỏa mãn: $(B - 3I)Y = 0$.

ĐS: 1) $X = \begin{bmatrix} -11/3 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -2/3 \\ 4 & 10/3 & -7 \end{bmatrix}$; 2) $A + B^2 = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 9 \\ -3 & 12 & 4 \\ 9 & 4 & -6 \end{bmatrix}$; $B.A^t = -3I$.

3) $x = 3 \vee x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$; $Y = \begin{bmatrix} 3z & 2z & z \end{bmatrix}^t, z \in \mathbb{R}$.

Bài 4. Cho hai ma trận A, B vuông cấp 3 có: $\det(2A) = -4$, $\det(B^3) = 8$, $\det(A + B) = \dfrac{5}{2}$.

Tính $\det A$, $\det B$, $\det(A^t B^t)$, $\det(5A^4 B^{-1})$, $\det(AB + B^2)$.

ĐS: $\det A = -1/2$; $\det B = 2$; $\det(A^t B^t) = -1$; $\det(5A^4 B^{-1}) = 125/32$; $\det(AB + B^2) = 5$.

Bài 5. Tìm hạng của các ma trận sau :

$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -4 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 0 & -11 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 3 & 21 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 7 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

ĐS: $r(A) = 2$; $r(B) = 3$; $r(C) = 3$.

Bài 6. Cho ma trận: $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & m & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

1) Tính định thức của ma trận A theo m.

2) Sử dụng kết quả tính ở câu 1, hãy biện luận theo m hạng của ma trận A.

3) Khi $m=4$ hãy chứng tỏ rằng ma trận A khả nghịch.

Khi đó, hãy tính phần tử ở vị trí hàng 2 cột 3 của ma trận A^{-1}.

ĐS: 1) $\det A = 20(m-3)$.

2) khi $m \neq 3$, $r(A)=4$; khi $m=3$, $r(A)=3$.

3) Khi $m=4$, $\det A = 20 \neq 0$, chứng tỏ ma trận A khả nghịch.

Phần tử ở vị trí hàng 2 cột 3 của ma trận A^{-1} là $\dfrac{1}{\det A}A_{32} = \dfrac{1}{20}(-1)^{3+2}.\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = ...$

Bài 7. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix}$.

1) Tìm x để ma trận A khả nghịch và thỏa mãn $\det\left(A^{-1}\right) = 2$.

2) Tìm ma trận nghịch đảo của A khi $x=2$.

ĐS: 1) $x = \dfrac{3}{4}$; 2) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -8/3 & 5/3 & -4/3 \\ 1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$.

Bài 8. Cho hai ma trận: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

1) Tìm ma trận nghịch đảo của A.

2) Tìm ma trận X sao cho $XA = B^t$.

3) Tìm ma trận Y sao cho $AYA = B$.

ĐS: 1) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 3/5 \\ 1/5 & -2/5 \end{bmatrix}$; 2) $X = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 \\ 1/5 & -7/5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; 3) Không tồn tại ma trận Y.

Bài 9. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$. Tìm các ma trận X sao cho $AX = B$.

ĐS: $X = \begin{bmatrix} 2z+1 \\ 0.5z-4 \\ z \\ 3-1.5z \end{bmatrix}$, $z \in \mathbb{R}$.

Bài 10. Giải các hệ phương trình tuyến tính sau :

1) $\begin{cases} x + y - 2z - 4t = 0 \\ 3x - y + 2z - 8t = 0 \\ x + 4y - z - 7t = 0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 3x + 2y + 3z + 4t = 1 \\ x + y + z = -2 \\ 6x + 5y + 6z + 4t = -5 \\ 7x + 5y + 7z + 8t = 0 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x - 4y + 3z = 1 \\ 5x + 5y - z = 2 \\ 7x + 2y + 3z = 10 \\ -2x + 3y + z = 5 \end{cases}$.

ĐS: 1) $\{x = 3t;\ y = t;\ z = 0;\ t \in \mathbb{R}$ 2) $\{x = -4t - z + 5;\ y = 4t - 7;\ z, t \in \mathbb{R}$ 3) VN.

Bài 11. Cho hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 + 5x_2 + 11x_3 = 17 \\ -4x_1 - 10x_2 + (m^2-9)x_3 = m-5 \end{cases}$. Tìm m để hệ này :

1) là hệ Cramer ; 2) có vô số nghiệm ; 3) vô nghiệm.

Khi hệ đã cho là hệ Cramer, hãy tính x_2 theo m.

ĐS: 1) $m \neq \pm 1$; $x_2 = \dfrac{5m^2-2m-7}{1-m^2}$; 2) $m = -1$ 3) $m = 1$

Bài 12. Cho hai ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

1) Tìm phần tử nằm ở vị trí hàng 3, cột 2 của ma trận A^2.

2) Tính $A+B$.

3) Chứng minh A khả nghịch. Tìm phần tử nằm ở vị trí hàng 1, cột 3 của ma trận A^{-1}.

4) Tính $\det(A+B)$ và $\det(A^2+BA)$.

ĐS: 1) Phần tử cần tìm là tích của "hàng 3 ma trận A" với "cột 2 ma trận A";

2) $A+B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$; 4) $\det(A+B) = -24$; $\det(A^2+BA) = -1008$.

Bài 13. Có ba phụ huynh A, B, C dự định mua bốn món đồ: bút bi, bút chì, vở và hộp bút để trao phần thưởng cuối năm. Số lượng muốn mua được cho trong bảng sau:

Đồ dùng / Phụ huynh	Bút bi	Bút chì	Vở	Hộp bút
A	400	40	200	20
B	350	50	250	30
C	150	35	150	15

Ba người này có thể mua bốn món đồ ở hai cửa hàng CH1 và CH2 với giá bán mỗi loại ở từng cửa hàng cho trong bảng sau:

Cửa hàng / Món đồ	CH 1	CH 2
Bút bi	3000 đ	3500đ
Bút chì	7000 đ	6500đ
Vở	5000đ	4800đ
Hộp bút	20000đ	17000đ

Hỏi mỗi phụ huynh A, B, C nên mua ở cửa hàng nào thì được rẻ hơn?

ĐS: A, B nên mua ở cửa hàng 1, C nên mua ở cửa hàng 2.

Bài 14. Một nhà máy sản xuất 3 loại sản phẩm A, B và C. Mỗi sản phẩm phải qua 3 công đoạn cắt, lắp ráp và đóng gói với thời gian yêu cầu cho mỗi công đoạn được liệt kê ở bảng sau đây:

	Sản phẩm A	Sản phẩm B	Sản phẩm C
Cắt	0.6 giờ	1 giờ	1.5 giờ
Lắp ráp	0.6 giờ	0.9 giờ	1.2 giờ
Đóng gói	0.2 giờ	0.3 giờ	0.5 giờ

Các bộ phận cắt, lắp ráp và đóng gói có số giờ công nhiều nhất trong mỗi tuần lần lượt là 380, 330 và 120 giờ công. Hỏi nhà máy phải sản xuất với số lượng mỗi loại là bao nhiêu theo mỗi tuần để nhà máy hoạt động hết năng lực.

ĐS: Số lượng sản phẩm A, B, C lần lượt là 50, 200,100.

<u>Chương 2:</u> **Phép tính vi phân hàm một biến**

Bài 1. Hãy áp dụng định nghĩa để tính đạo hàm của các hàm số sau:

1) $f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}$ 2) $f(x)=mx+b$

3) $f(t)=5t-9t^2$ 4) $f(x)=1.5x^2-x+3.7$

Bài 2. Cho hàm số $f(x)=\sqrt[3]{x}$

1) Nếu $a\neq 0$ hãy dùng công thức hàm lũy thừa tính $f'(a)$

2) Chứng minh rằng $f'(0)$ không tồn tại.

Bài 3. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

1) $y=\sqrt{x}(x-1)$; 2) $y=\frac{x^2+4x+3}{\sqrt{x}}$; 3) $y=\frac{x^2-2\sqrt{x}}{x}$; 4) $v=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$.

<u>**ĐS:**</u> 1) $y'=\frac{3}{2}\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$; 2) $y'=\frac{3}{2}\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{x^3}}$;

3) $y'=1+\frac{1}{\sqrt{x^3}}$; 4) $v'=1+\frac{1}{3\sqrt[6]{x^5}}-\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$.

Bài 4. Viết phương trình đường tiếp tuyến với đường cong $y=\sqrt[4]{x}$ tại điểm $(1;1)$.Vẽ hình minh họa kết quả.

<u>**ĐS:**</u> $y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$.

Bài 5. Giả sử rằng $f(2)=-3,\ g(2)=4,\ f'(2)=-2,\ g'(2)=7$. Hãy tìm $h'(2)$ khi:

1) $h(x)=5f(x)-4g(x)$; 2) $h(x)=f(x)g(x)$;

3) $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$; 4) $h(x)=\frac{g(x)}{1+f(x)}$.

<u>**ĐS:**</u> 1) -43; 2) -29; 3) $\frac{13}{16}$; 4) -1.5.

Bài 6. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

1) $F(x)=\left(4x-x^2\right)^{100}$; 2) $g(t)=\frac{1}{\left(t^4+1\right)^3}$;

3) $y=\frac{\ln(2x+1)}{x}$ tại $x=1$**;** 4) $y=e^{x^2-2x}$ tại $x=0$.

<u>**ĐS:**</u> 1) $F'(x)=100(4-2x)\left(4x-x^2\right)^{99}$; 2) $g'(t)=-\frac{12t^3}{\left(t^4+1\right)^4}$;

3) $y'(1)=\frac{2}{3}-\ln 3$; 4) $y'=-2$.

Bài 7. Tính $y^{(8)}$ với:

1) $y=\frac{x^2}{1-x}$; 2) $y=\frac{1}{x^2-4x+3}$; 3) $y=\frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$.

ĐS: 1) $y^{(8)} = -\dfrac{8!}{(x-1)^9}$; 2) $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n}{2}(n!)\left(\dfrac{1}{(x-3)^{n+1}} - \dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}\right)$;

3) $y^{(n)} = (-1)^{n+1}\dfrac{2}{3^n}(1)(4)...(3n-5)(x+1)^{\frac{2}{3}-n} + (-1)^{n+1}\dfrac{1}{3^n}(1)(4)...(3n-2)(x+1)^{-\frac{1}{3}-n}$

Bài 8. Tính vi phân của các hàm số sau:

1) $y = x^2\sin 2x$; 2) $y = \ln\sqrt{1+t^2}$; 3) $y = \dfrac{u-1}{u+1}$; 4) $y = \left(1+r^3\right)^{-2}$;

5) $y = \sqrt{1-x^2}.\arccos x$ tại $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $f(t) = \sqrt[3]{1+\tan t}$ tại $t = 0$.

ĐS: 1) $dy = \left(2x\sin 2x + 2x^2\cos 2x\right)dx$; 2) $dy = \dfrac{2t}{\sqrt{1-t^2}}dt$; 3) $dy = \dfrac{2}{(u+1)^2}du$;

4) $dy = -\dfrac{6r^2}{\left(1+r^3\right)^3}dr$; 5) $y' = \dfrac{-x.\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} - 1 \Rightarrow dy\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\dfrac{\pi\sqrt{3}}{6} - 1\right)dx$;

6) $f'(t) = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{(1+\tan t)^2}}\dfrac{1}{\cos^2 t} \Rightarrow df(0) = \dfrac{1}{3}dt$.

Bài 9. Tính Δy và dy tại giá trị đã cho của x và $dx = \Delta x$**:**

1) $y = 2x - x^2,\ x = 2,\ \Delta x = -0.4$ 2) $y = \sqrt{x};\ x = 4;\ \Delta x = 1$

3) $y = \dfrac{5}{x},\ x = 8,\ \Delta x = 1$ 4) $y = e^x,\ x = 0,\ \Delta x = 0.5$

ĐS: 1) $dy = 0.8;\quad \Delta y = 0.64$ 2) $dy = 0.250;\quad \Delta y = 0.236$

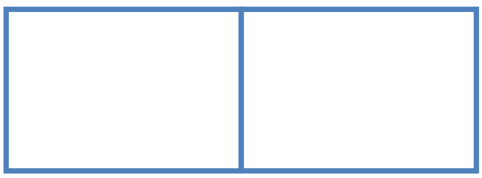
3) $dy = -0.078;\quad \Delta y = -0.069$ 4) $dy = 0.50;\quad \Delta y = 0.65$

Bài 10. Hãy sử dụng xấp xỉ tuyến tính (vi phân) để tính gần đúng các giá trị sau:

1) $(2.001)^5$ 2) $e^{-0.015}$ 3) $\dfrac{1}{1002}$ 4) $\tan 44^\circ$

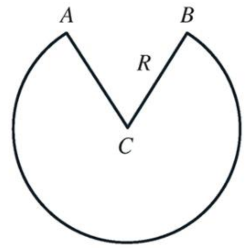
ĐS: 1) 32.08 2) 0.985 3) 0.998 4) 0.965

Bài 11. Một người nông dân muốn rào một khu đất rộng 1.5 triệu m^2 thành khu vườn hình chữ nhật, sau đó chia khu vườn đất ra thành 2 phần diện tích bằng nhau bằng một hàng rào nằm song song với mốt trong các cạnh của hình chữ nhật. Người nông dân phải làm thế nào để giảm tối đa giá thành của hàng rào.



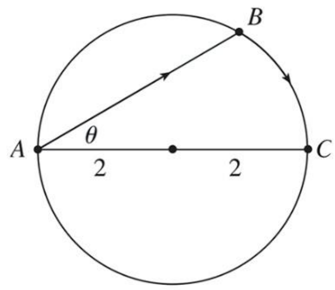
ĐS: Khu đất được chia thành 2 mảnh kích thước 1000m x 750m (cạnh chung dài 1000m)

Bài 12. Một cái cốc uống nước hình nón được làm từ một miếng bìa hình tròn bán kính R bằng cách cắt bỏ đi một miếng hình quạt rồi dán các cạnh CA và CB lại với nhau (xem hình vẽ bên). Hãy tìm dung tích lớn nhất của chiếc cốc.



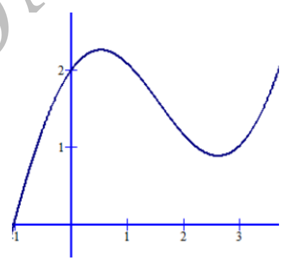
<u>ĐS:</u> $V_{\max} = \dfrac{2\pi R^3}{9\sqrt{3}}$.

Bài 13. Một người phụ nữ đứng ở điểm A trên bờ của một cái hồ nước hình tròn bán kính 2km. Người phụ nữ muốn tới điểm C nằm đối diện phía bên kia hồ trong thời gian ngắn nhất có thể. Cô ta có thể đi bộ với vận tốc 4km/h và chèo thuyền với vận tốc 2km/h. Hỏi cô ta phải chọn hành trình như thế nào?

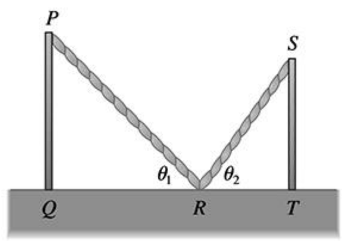


<u>ĐS:</u> Thời gian đi $y = 2\cos\theta + \theta$; $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$.

Nhìn đồ thị hàm số ta thấy y nhỏ nhất khi $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ (θ lớn nhất). Vậy cô ta không chèo thuyền mà đi bộ nửa vòng hồ từ A đến C.



Bài 14. Hai cái cột thẳng đứng được gia cố bằng một dây thừng PRS nối từ đỉnh của cột thứ nhất xuống một điểm R trên mặt đất rồi nối tới đỉnh của cột thứ hai. Hãy chứng tỏ rằng dây thừng sẽ có độ dài ngắn nhất khi $\theta_1 = \theta_2$



Chương 3: Nguyên hàm – Tích phân

Bài 1. Tìm họ các nguyên hàm của các hàm số sau:

1) $f(x)=1-\dfrac{x}{3}+\dfrac{2}{x^2}$; 2) $g(x)=\dfrac{1}{1+2x}$; 3) $h(x)=-3e^{-4x}+\sqrt{x}$;

4) $l(x)=3\cos\left(\dfrac{\pi}{3}x\right)$; 5) $k(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$; 6) $m(x)=\dfrac{1}{\sqrt{9x^2-1}}+\dfrac{1}{x^2-9}$.

ĐS: với C là hằng số tùy ý,

1) $F(x)=x-\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{2}{x}+C$; 2) $G(x)=\dfrac{1}{2}\ln(1+2x)+C$;

3) $H(x)=\dfrac{3}{4}e^{-4x}+\dfrac{2}{3}x^{3/2}+C$; 4) $L(x)=\dfrac{9}{\pi}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}x\right)+C$;

5) $K(x)=\dfrac{1}{2}\arcsin(2x)+C$; 6) $M(x)=\dfrac{1}{3}\ln\left|3x+\sqrt{9x^2-1}\right|+\dfrac{1}{6}\ln\left|\dfrac{x-3}{x+3}\right|+C$.

Bài 2. Ký hiệu kích thước của một quần thể tại thời điểm t (đơn vị: năm) là $N(t)$. Khi đó, tốc độ tăng trưởng của quần thể tại thời điểm t là $N'(t)=\dfrac{dN}{dt}$. Cho biết tốc độ tăng trưởng của quần thể tại thời điểm t là $\dfrac{dN}{dt}=3\sin(2\pi t)$ và biết $N(0)=10\ 000$, hãy tìm công thức biểu diễn $N(t)$.

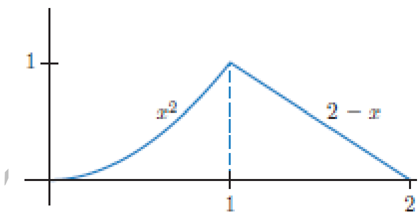
ĐS: $N(t)=\dfrac{3}{2\pi}\big(1-\cos(2\pi t)\big)$.

Bài 3. Tìm nguyên hàm F của hàm số f biết $f(t)=3-\dfrac{2}{1+t^2}$ và thỏa mãn $F(1)=0$.

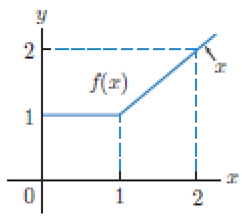
ĐS: $F(t)=\dfrac{\pi}{2}-2\arctan t+3(t-1)$

Bài 4. Tính tích phân xác định của hàm số f trên đoạn $[0;2]$ biết đồ thị hàm số f được cho như hình vẽ sau:

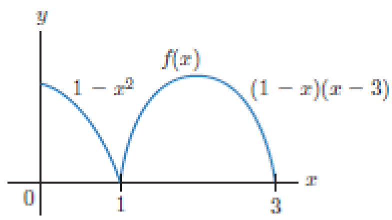
1)



2)



3)



ĐS: 1) $\dfrac{5}{6}$; 2) $\dfrac{5}{2}$; 3) $\dfrac{4}{3}$.

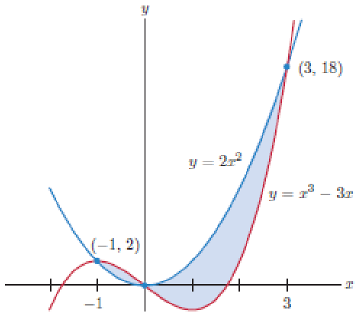
Bài 5. 1) Cho biết $f'(x)=12x-e^{-x}$, hãy tính $f(3)-f(0)$.

2) Cho biết $\int_{-2}^{3} f(x)dx=4$ và $\int_{-2}^{3}\big(3f(x)+2g(x)\big)dx=2$, hãy tìm $\int_{-2}^{3} g(x)dx$.

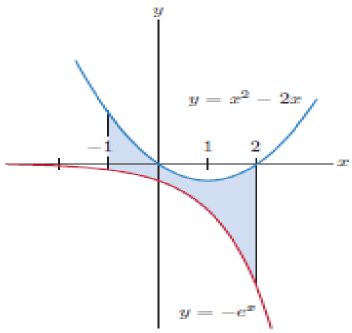
ĐS: 1) $f(3)-f(0)=\int_{0}^{3} f'(x)dx=..=53+e^{-3}$; 2) $\int_{-2}^{3} g(x)dx=-5$.

Bài 6. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong sau (yêu cầu vẽ hình minh họa và đánh dấu phần hình giới hạn):

1) các đường cong $y = 2x^2$, $y = x^3 - 3x$.



2) các đường cong $y = x^2 - 2x$, $y = -e^x$, đường thẳng $x = -1,\ x = 2$.



3) các đường $y = \sin x$, $y = \cos 2x$ và $x = 0, x = \dfrac{\pi}{2}$.

4) các đường $y = \sqrt[3]{x}$ và $y = \dfrac{1}{x}$ và $x = 1, x = 8$.

5) tam giác có ba đỉnh: $A(0;0),\ B(1;2),\ C(4;1)$.

6) các đường $y = 3^x$, $y = 2^x$ và $x = -1, x = 1$.

<u>ĐS:</u> 1) $11\dfrac{5}{6}$; 2) $e^2 + \dfrac{1}{e} - 2$; 3) 1;

4) $11\dfrac{1}{4} - \ln 8$; 5) $11\dfrac{7}{2}$; 6) $\dfrac{4}{3\ln 3} - \dfrac{1}{2\ln 2}$.

Bài 7. Tính độ dài phần đường cong thuộc đồ thị hàm số:

1) $y^2 = x^3$ từ điểm $(1;1)$ đến điểm $(4;8)$;

2) $y = \ln(1 - x^2)$ với $0 \le x \le \dfrac{1}{2}$;

3) $y = \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$ từ điểm $x = 0$ đến $x = \dfrac{1}{2}$;

4) $y = \dfrac{1}{3}\sqrt{x}.(x - 3)$ với $1 \le x \le 9$.

<u>ĐS:</u> 1) $\dfrac{125 - 13\sqrt{13}}{27}$; 2) $\ln 3 - \dfrac{1}{2}$; 3) $2\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$; 4) $10\dfrac{2}{3}$.

Bài 8. Tính các tích phân sau:

1) $\displaystyle\int_e^{e^2} \ln x\, dx$; 2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{4 + x^2}} dx$; 3) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\tan x} dx$; 4) $\displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$;

5) $\displaystyle\int_1^{+\infty} x e^{-2x} dx$; 6) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{3 - 4x} dx$; 7) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4x^2 + 4x + 5} dx$; 8) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 1} dx$ (HD: $u = \dfrac{1}{x}$)

<u>ĐS:</u> 1) e^2; 2) $\dfrac{16 - 7\sqrt{5}}{3}$; 3) $\ln\sqrt{2}$; 4) 2

5) $\dfrac{1}{4e^2}$; 6) $+\infty$; 7) $\dfrac{\pi}{4}$; 8) 0.

Chương 4: Phép tính vi phân hàm nhiều biến

Bài 1. Tính vi phân toàn phần của các hàm 2 biến sau:

1) $f(x,y) = 2x^2y + \dfrac{\sqrt{x}}{y^2} - 3x + 4$; 2) $f(x,y) = \ln(x^2 + 2y^2)$ tại điểm $(1;2)$;

3) $f(x,y) = xe^{xy}$; 4) $f(x;y) = \arcsin(x - 2y)$ tại điểm $(0;0)$;

5) $f(x;y) = \arctan\dfrac{y}{x}$ tại điểm $(1;1)$ với $\Delta x = 0,01$ và $\Delta y = -0,02$.

ĐS: 1) $df(x,y) = (4xy + \dfrac{1}{2y^2\sqrt{x}} - 3)dx + (2x^2 - \dfrac{2\sqrt{x}}{y^3})dy$; 2) $df(1,2) = \dfrac{2}{9}dx + \dfrac{8}{9}dy$;

3) $df(x,y) = e^{xy}(1+xy)dx + x^2e^{xy}dy$; 4) $df(0,0) = dx - 2dy$; 5) $-0,015$.

Bài 2. Cho hàm số $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

1) Hãy tính $f(3,04;3,98)$.

2) Hãy tính vi phân toàn phần của hàm số f tại điểm $(3;4)$.

3) hãy tính gần đúng $f(3,04;3,98)$ bằng cách áp dụng công thức tính xấp xỉ:

$f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) \approx f(x_0;y_0) + f_x'(x_0;y_0)\Delta x + f_y'(x_0;y_0)\Delta y$ và đánh giá sai số.

ĐS: 1) 5,008193287 ; 2) $df(3;4) = \dfrac{3}{5}dx + \dfrac{4}{5}dy$; 3) 5,008 và sai số là 2/10000

Bài 3. Tính $A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ với:

1) $f(x,y) = x^2 - y^2$; 2) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2$;

3) $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$; 4) $f(x,y) = e^{-x}\cos y - e^{-y}\cos x$.

ĐS: 1) $A = 0$; 2) $A = 12x$; 3) $A = 0$; 4) $A = 0$.

Bài 4. Chứng tỏ rằng hàm số $P = bL^\alpha.K^\beta$ (với b, α, β là các hằng số) (hàm sản xuất Cobb-Douglas) thỏa mãn phương trình sau: $L\dfrac{\partial P}{\partial L} + K\dfrac{\partial P}{\partial K} = (\alpha + \beta)P$.

Bài 5. Tìm các điểm cực trị và giá trị cực trị (nếu có) của các hàm số sau:

1) $f(x,y) = -8x^3 + 12x^2y - 24x^2 - 6y^2 + 1$

2) $f(x,y) = (x + y^2)e^{x-2y}$

3) $f(x,y) = xy(1 - x - y)$

4) $f(x,y) = 3x^2 + 2e^y - 2y + 3$

ĐS:

1) Hàm số đạt cực đại tại $(0,0)$, giá trị cực đại tại điểm đó là $f(0,0) = 1$.

2) Hàm số đạt cực tiểu tại $(-2;-1)$ và $f_{CT} = f(-2;-1) = -1$.

3) Hàm số đạt cực đại tại $(\frac{1}{3};\frac{1}{3})$ và $f_{CD} = \dfrac{1}{27}$.

4) Hàm số đạt cực tiểu tại $(0;0)$ và $f_{CT} = f(0;0) = 5$.

Bài 6. Một công ty sản suất hai loại mặt hàng với sản lượng sản phẩm lần lượt là q_1 và q_2. Đơn giá mỗi sản phẩm của hai mặt hàng tương ứng là p_1 và p_2. Hàm tổng chi phí là $C = q_1^2 + 2q_2^2 + q_1q_2 + 2q_1 + 4q_2 + 300$.

1) Lập hàm lợi nhuận của công ty.

2) Khi đơn giá của hai loại mặt hàng là $p_1 = 324$ và $p_2 = 524$ hãy xác định sản lượng tương ứng của hai loại mặt hàng để lợi nhuận của công ty là lớn nhất.

<u>ĐS:</u> 1) $p_1q_1 + p_2q_2 - q_1^2 - 2q_2^2 - q_1q_2 - 2q_1 - 4q_2 - 300$ 2) $q_1 = 120$ *và* $q_2 = 100$

<u>Chương 5:</u> Phương trình vi phân

Bài 1. Giải các phương trình vi phân sau

1) $\left(x^2-1\right)dy - xydx = 0$;

2) $\left(1+e^x\right)yy' = e^x$ với điều kiện ban đầu $y(0)=1$;

3) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$;

4) $y' = \dfrac{xy+y^2}{2x^2+xy}$;

5) $y' - 2xy = e^{x^2}\ln x$;

6) $y' + \dfrac{1}{x}y = \dfrac{1}{x\cos^2 x}$;

7) $y' - xy = -xy^3$;

8) $y' + \dfrac{y}{x} = y^2 \ln x$

<u>ĐS:</u> 1) $y = C\sqrt{\left|x^2-1\right|}, y=0, x=1$;

2) $e^{\frac{y^2}{2}} = \dfrac{\sqrt{e}}{2}\left(1+e^x\right)$;

3) $y = -x\ln\left(\ln\left|\dfrac{c}{x}\right|\right)\ (c \neq 0)$;

4) $y = x\ln\left|\dfrac{Cx}{y^2}\right|$;

5) $y = e^{x^2}(x\ln x - x + C)$;

6) $y = \dfrac{1}{x}(\tan x + C)$;

7) $y^2\left(1+Ce^{-x^2}\right) = 1$;

8) $y = \dfrac{1}{\left(C - \dfrac{\ln^2 x}{2}\right)x}$.

Bài 2. (Mô hình tăng trưởng quần thể) Gọi số lượng cá thể của một quần thể tại thời điểm t là $P(t)$. Tốc độ tăng trưởng của quần thể tại thời điểm t là đạo hàm dP/dt. Nhà sinh vật học, toán học người Hà Lan Pierre – Francois Verhulst đưa ra mô hình cho sự phát triển của quần thể như sau:

$$\frac{dP}{dt} = kP(t)\left(1-\frac{P(t)}{M}\right) \qquad (1)$$

trong đó k là hằng số tỷ lệ, M là hằng số cân bằng quần thể.

1) Hãy giải phương trình vi phân (1).

2) Biết rằng $k=2; M = 2000000$ và số lượng cá thể tại thời điểm ban đầu là $P(0)=1000$, hãy xác định công thức tính $P(t)$ mô tả số lượng cá thể tại thời điểm t.

<u>ĐS</u>: 1) $P(t) = \dfrac{M}{1+Ce^{-kt}}, C>0$ 2) $P(t) = \dfrac{2000000}{1+1999e^{-2t}}$.

---------------------------- HẾT ----------------------------