

## BÀI TẬP THAM KHẢO THI OLYMPIC VNUA GIẢI TÍCH

# Đề cương ôn tập thi Olympic Giải tích cấp Học viện

Năm học 2018-2019

- 1) Dãy số, giới hạn của dãy số
- 2) Giới hạn của hàm số
- 3) Đạo hàm và ứng dụng của đạo hàm

Tính đơn điệu; cực trị; giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số

Ứng dụng đạo hàm để chứng minh bất đẳng thức

Tìm điều kiện của tham số để phương trình, bất phương trình có nghiệm...

- 4) Nguyên hàm và tích phân (phương pháp đổi biến, tích phân từng phần)

### Tài liệu tham khảo

- [1] Nguyễn Đình Trí (chủ biên), *Toán học cao cấp, Tập 1*, NXB Giáo dục, 2006.
- [2] Nguyễn Xuân Liêm, *Giải tích (Tập 1) – Giáo trình lý thuyết và bài tập có hướng dẫn*, NXB Giáo dục, 1997.
- [3] J. Dieudonné, *Cơ sở giải tích hiện đại* (Phan Đức Chinh dịch, tập 1), NXB DH&THCN, 1978.
- [4] W Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill Education, 1976.
- [5] Nguyễn Xuân Viên, *Bài tập Giải tích Toán học I*, Học viện KTQS.

# BÀI TẬP THAM KHẢO THI OLYMPIC VNUA GIẢI TÍCH

## Phần 1: Dãy số

**Bài 1.** Tính các giới hạn

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{\pi^n}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \pi n + 4\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n}}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5n^2+1} - 4n}{n}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2+2n+3} - n$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n^2+1} - \sqrt{n^2-1}}{n}$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n + \sin^2(n+1)} - \sqrt{n - \cos^2(n+1)}$

**Bài 2.** Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi:  $u_1 = 1, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3, n \geq 2$ .

- a) Đặt dãy số  $v_n = u_n + 6, n \geq 2$ . Chứng minh dãy  $(v_n)$  là một cấp số nhân.
- b) Từ đó tìm giới hạn của dãy  $(u_n)$ .

**Bài 3.** Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi:  $u_1 = 3, u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4, n \geq 2$ .

- a) Đặt dãy số  $v_n = u_n + \alpha, n \geq 2$ . Tìm  $\alpha$  để dãy số  $(v_n)$  là một cấp số nhân.
- b) Từ đó tìm giới hạn của dãy  $(u_n)$ .

**Bài 4.** Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi:  $u_1 = \sqrt{2}, u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}, n \geq 2$ .

- a) Chứng minh dãy số bị chặn trên, tức là có một số  $M$  sao cho  $u_n \leq M$  với mọi  $n$ .
- b) Chứng minh dãy số đơn điệu tăng, tức là  $u_{n+1} \geq u_n$  với mọi  $n$ .
- c) Từ đó suy ra  $(u_n)$  có giới hạn và tìm giới hạn đó.

## Phần 2: Giới hạn hàm số

**Bài 5.** Tính các giới hạn sau

$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + 4x}$	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{1 - x^2}$	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{\sqrt{x+7} - 3}$	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{\sqrt{x+7} - 3}$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - 1}{x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} - 1}{x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[2]{1+\alpha x} - 1}{x}, \alpha \in \mathbb{R}$	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{2x + \sqrt{3x^2 + 1}}$
$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x - 5\sqrt{x-1}}{3 - \sqrt{x+4}}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{8x+1}}{4x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{8-x}}{x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$

## BÀI TẬP THAM KHẢO THI OLYMPIC VNUA GIẢI TÍCH

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{4x^2 + x})$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x})$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x+1)}{x}$	$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$
---	---	---	---

**Bài 6.** Chứng minh không tồn tại giới hạn  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$

### Phần 3: Đạo hàm và các ứng dụng của đạo hàm

**Bài 7.** Tìm cực trị các hàm số

$y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1$	$y =  x-1 (x+2)$	$y = x - \sin 2x + 1$	$y = 2 \cos x + \cos 2x - 3$
-------------------------------------	------------------	-----------------------	------------------------------

**Bài 8.** Tìm giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = (m+2)x^3 + 3x^2 + mx + m$  có cực đại, cực tiểu.

**Bài 9.** Tìm giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = x^3 - 6x^2 + 3(m+2)x - m - 6$  có cực đại, cực tiểu đồng thời hai giá trị đó trái dấu.

**Bài 10.** Tìm giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{4}x^4 - mx^2 + 2$  có cực tiểu mà không có cực đại.

**Bài 11.** Tìm giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1$  có cực đại, cực tiểu đồng thời các điểm cực trị cách đều gốc tọa độ.

**Bài 12.** Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất (nếu có) của hàm số  $y = x\sqrt{4-x^2}$

**Bài 13.** Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất (nếu có) của hàm số  $y = \sqrt[3]{(2-t)^2} + \sqrt[3]{t^2}$  với  $t \in [-1, 3]$

**Bài 14.** Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất (nếu có) của hàm số  $y = \frac{t^2 + 6t}{t^2 + 2t - 3}$ .

**Bài 15.** Chứng minh các bất đẳng thức sau

$2x \arctan x \geq \ln(1+x^2) \forall x \in \mathbb{R}$	$\frac{x}{x^2+1} \leq \arctan x \leq x \forall x \geq 0$	$1+x \ln(x+\sqrt{x^2+1}) \geq \sqrt{x^2+1} \forall x \in \mathbb{R}$
$1+x \ln(x+\sqrt{x^2+1}) \geq \sqrt{x^2+1} \forall x \in \mathbb{R}$	$x - \frac{1}{2}x^2 < \ln(x+1) < x$ với mọi $x > 0$ .	$\sin x + \tan x \geq 2x, x \in [0, \frac{\pi}{2})$ .
$\frac{x+y}{2} > \frac{x-y}{\ln x - \ln y}$ với $x > y > 0$ .	$e^x \geq 1+x+\frac{x^2}{2} \forall x \geq 0$	$\sin x \leq x \leq \tan x, x \geq 0$ . Từ đó chứng minh $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

## BÀI TẬP THAM KHẢO THI OLYMPIC VNUA GIẢI TÍCH

**Bài 16.** Cho số nguyên dương  $n \geq 2$ . Chứng minh bất đẳng thức sau đúng với mọi

$$x \in (0,1): x^n \sqrt{1-x} < \frac{1}{\sqrt{2ne}}.$$

*Các bài từ 17-20, có thể đưa về hàm số của một biến*

**Bài 17.** Cho  $0 < x < y < 1$ . Chứng minh rằng

$$x^2 \ln y - y^2 \ln x > \ln x - \ln y.$$

**Bài 18.** Cho  $x + y = 2$ . Chứng minh rằng  $x^{2018} + y^{2018} \geq 2$ .

**Bài 19.** Cho  $x, y \in [-3, 2]$  thỏa mãn  $x^3 + y^3 = 2$ . Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của  $P = x^2 + y^2$ .

**Bài 20.** Cho các số thực không âm  $x, y$  thỏa mãn  $x + y = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của  $S = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$ .

### Phần 4: Nguyên hàm và tích phân

**Bài 21.** Tính các tích phân bất định

$\int \frac{2x-3}{x^2+6x+5} dx$	$\int \frac{4x^2}{2x^6+5x^3-7} dx$	$\int \ln \sqrt{5-x} dx$	$\int \frac{e^{-x}}{(e^{-x}+2)^2} dx$
$\int \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sin x}$	$\int \arcsin x dx$	$\int \frac{x^2}{x^6+1} dx$

**Bài 22.** Tính các tích phân sau

$\int_{1/4}^{3/4} \frac{2x-1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$	$\int_0^2 \frac{\arctan \frac{x}{2}}{4+x^2} dx$	$\int_{-1}^0 (2x-1)e^{3x} dx$	$\int_0^{\pi/4} \frac{1+\sin 2x}{\cos^2 x} dx$
$\int_1^3 \frac{2x-1}{x^2-2x+5} dx$	$\int_0^1 \frac{x+5}{e^x} dx$	$\int_1^e x \ln x dx$	$\int_{1/4}^{3/4} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$