HỌC VIỆN NÔNG NGHIỆP VIỆT NAM
VIETNAM NATIONAL UNIVERSITY OF AGRICULTURE

PGS.TS. Nguyễn Văn Định

BÀI GIẢNG ĐAI SỐ TUYẾN TÍNH

2017

CHƯƠNG 2
Không gian vector trên trường số thực

Nội dung chương gồm 4 phần:

Bài I. Định nghĩa và các tính chất của không gian vector

Bài II. Không gian con.

Bài III. Sự độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính của một hệ vector

Bài IV. Cơ sở và số chiều của không gian vector

CHƯƠNG 2
Bài I. Định nghĩa và tính chất không gian vector

1.1 Định nghĩa không gian vector

- *Định nghĩa* . Không gian vector V trên trường số thưc R là một tập hợp không rỗng các phần tử (gọi là các vector), trong V có xác định hai phép toán:

  1. Phép cộng hai vector: $\forall x, y \in$ V thì $x + y \in$ V, và
  2. Phép nhân vector với một số thực: $\forall x \in$ V và $\forall k \in$ R thì $k.x \in$ V

Hai phép toán trên phải thỏa mãn 8 tiên đề:

- V1. $\forall x, y \in$ V thì $x + y = y + x$.
- V2. $\forall x, y, z \in$ V thì $(x + y) + z = x + (y + z)$
- V3. Tồn tại phần tử không θ trong V sao cho $\forall x \in$ V thì $x + \theta = x$
- V4. $\forall x \in$ V thì tồn tại phần tử đối của x, (ký hiệu -x) sao cho $x + (-x) = \theta$
- V5. $\forall k_1, k_2 \in$R; $\forall x \in$V thì $k_1.(k_2x) = (k_1.k_2)x$
- V6. $\forall x \in$ V thì $1.x = x$ (với số 1 $\in$R)
- V7. $\forall x, y \in$V, $\forall k \in$R thì $k(x + y) = kx + ky$
- V8. $\forall k_1, k_2 \in$R; $\forall x \in$V thì $(k_1 + k_2)x = k_1x + k_2x$

CHƯƠNG 2
Bài I. Định nghĩa và tính chất không gian vector

1.2 Các tính chất của không gian vector

- TC1. Trong không gian vector V thì vector không θ là duy nhất; tức là nếu có θ_1 , $\theta_2 \in$ V sao cho $\forall x \in$V ta luôn có θ_1 + x = x, θ_2 + x = x thì $\theta_1 = \theta_2$.
- TC2. Trong không gian vector V, $\forall x \in$V thì vector đối của x (ký hiệu -x) là duy nhất
- TC3. Trong không gian vector V, với mọi vector $\forall x \in$V thì ta có 0.x = θ , với số 0$\in$R.
- TC4. Trong không gian vector V, với mọi vector $\forall x \in$V thì ta có -1.x = -x (vector đối của x).

1.3 Các thí dụ về không gian vector

- *Thí dụ 1*. Không gian vector R^n.

- Cho tập $R_n = \{ x \mid x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), x_i \in R\}$, với hai phép toán:

1. Phép cộng hai vector: với $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in R^n$,

   ta có: $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$

2. Phép nhân vector với 1 số $\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$, $\forall k \in R$,

   ta có: $k.x = (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n)$

Khi đó R^n là không gian vector, gọi là *không gian các vector n thành phần.*

- Vector không trong R^n là : $\theta = (0, 0, \ldots, 0)$

CHƯƠNG 2
Bài I. Định nghĩa và tính chất không gian vector

1.3 Các thí dụ về không gian vector

- *Thí dụ 2*. Không gian P_n
- Cho tập $P_n = \{\, p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}, + \dots + a_1 x + a_0 \mid a_i \in R\}$, với hai phép toán:

1. Phép cộng hai đa thức: với $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, và

$$q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

ta có : $p(x) + q(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$

2. Phép nhân đa thức với 1 số: $\forall p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $\forall k \in R$,

ta có: $k.p(x) = ka_n x^n + ka_{n-1}x^{n-1} + \dots + ka_1 x + ka_0$

Khi đó P_n là một không gian vector, gọi là *không gian các đa thức có bậc không vượt quá n.* Ký hiệu P_n .

- Vector không trong P_n là đa thức không: $\theta = 0x^n + 0x^{n-1} + \dots + 0_1 x + 0$; là một đa thức với mọi hệ số các lũy thừa của x đều bằng 0.

1.3 Các thí dụ về không gian vector

- *Thí dụ 3*. Không gian $M_{m \times n}$
- Cho tập các ma trân $M_{m \times n} = \{ A = (a_{ij})_{m \times n} \mid a_{ij} \in R\}$, với hai phép toán:

1. Phép cộng hai ma trận: với ma trận $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n} \in M_{m \times n}$

   ta có: $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times}$

2. Phép nhân ma trận với 1 số: $\forall A = (a_{ij})_{m \times n} \in M_{m \times n}$; $\forall k \in R$,

   ta có: $k.A = (k.a_{ij})_{m \times n}$

Khi đó $M_{m \times n}$ là không gian vector, gọi là *không gian các ma trận cấp m x n.* Ký hiệu $M_{m \times n}$

- Vector không trong $M_{m \times n}$ là ma trận không θ cấp m x n.
- Chú ý: $M_2 = \{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \mid x, y, z, t \in R \}$ là không gian các ma trận vuông cấp 2.

CHƯƠNG 2
Bài II. Không gian vector con

2.1 Định nghĩa không gian vector con

- *Định nghĩa 1*. Cho V là một không gian vector, giả sử S là một tập con khác rỗng của V, khi đó S là không gian con của V nếu thỏa mãn 2 điều kiện sau:

  1. $\forall$ u, v $\in$ S thì u + v $\in$ S
  2. $\forall$ u $\in$ S, $\forall$ k$\in$ R thì k.u $\in$ S

- Các bước chứng minh S $\subseteq$ V là không gian con của V:

  1. Ch/m S $\neq \varnothing$
  2. Ch/m $\forall$ u, v $\in$ S thì u + v $\in$ S
  3. Ch/m $\forall$ u $\in$ S, $\forall$ k$\in$ R thì k.u $\in$ S

CHƯƠNG 2
Bài II. Không gian vector con (tt)

2.2 Các tính chất của không gian con

- TC1. Với mọi không gian vector V thì V là không gian con của chính nó
- TC2. Mọi không gian con của V đều chứa vector không θ
- TC3. Với mọi không gian vector V, tập S = $\{\theta\}$ là một không gian con của V

CHƯƠNG 2
Bài II. Không gian vector con (tt)

2.3 Các thí dụ về không gian con

- *Thí dụ 1*. Ch/m rằng tập S = {(x, y, z) | x, y, x $\in$R ; y - z = 0} là không gian con của $R^{3.}$
- *Thí dụ 2.* Ch/m rằng tập S = { ax^2+bx+c|a, b, c $\in$R ; b+c = 0 } là không gian con của P_2
- *Thí dụ 3.* Ch/m rằng tập M = { $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$| x, y, z, t $\in$R ; x-2y =0 } là không gian con của không gian các ma trận vuông cấp 2.

CHƯƠNG 2
Bài II. Không gian vector con (tt)

2.3 Các thí dụ về không gian con (bài tập về nhà)

- *Thí dụ 1'.* Ch/m rằng tập S = {(x, y, z) | x, y, x $\in$R ; 2y + z = 0} là không gian con của $R^{3.}$
- *Thí dụ 2'.* Ch/m rằng tập S = { ax^3+bx^2+cx+d | a, b, c, d $\in$R ; b+c-d =0 } là không gian con của P_3
- *Thí dụ 3'.* Ch/m rằng tập M = { $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$| x, y, z, t $\in$R ; 2x-t =0 } là không gian con của không gian các ma trận vuông cấp 2.

Bài II. Không gian vector con (tt)

2.4 Không gian con sinh bởi hệ vector

- *Định nghĩa 1.*
- Cho hệ vector U = $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ trong không gian vector V, biểu thức $k_1u_1 + k_2u_2 + \ldots + k_nu_n$, với mọi $k_i \in R$, gọi là một tổ hợp tuyến tính của các vector trong U.
- Một vector $v \in$ V gọi là biểu diễn tuyến tính qua các vector của U, nếu v là một tổ hợp tuyến tính của các vector trong U: $v = k_1u_1 + k_2u_2 + \ldots + k_nu_n$.
- *Định nghĩa 2.* Tập tất cả các vector là mọi tổ hợp tuyến tính của hệ vector U gọi là bao đóng của U, ký hiệu là span(U).

  Vậy: span(U) = $\{ v \mid$ với $v = \sum_{i=1}^{n} k_i u_i\}$

- *Định lý 1:* Cho U là hệ vector trong không gian V, khi đó span(U) là không gian con của không gian V, và được gọi là không gian con sinh bởi U.
- Hệ U cũng được gọi là hệ sinh của span(U)

CHƯƠNG 2
Bài III. Hệ vector độc lập/phụ thuộc tuyến tính

3.1 Định nghĩa hệ vector độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính.

- *Định nghĩa*. Cho hệ vector: $U = \{u_1 , u_2 , \dots , u_n \}$ (1) trong không gian vector V, xét đẳng thức:

$$k_1u_1 + k_2u_2 + \dots + k_nu_n = \theta \qquad (2)$$

- Nếu đẳng thức (2) thỏa mãn với ít nhất một giá trị $k_i \neq 0$ thì ta nói hệ (1) là *phụ thuộc tuyến tính* (pttt).
- Nếu đẳng thức (2) chỉ thỏa mãn khi $k_1= k_2 = \dots = k_n= 0$ thì ta nói hệ (1) là *độc lập tuyến tính* (đltt).

CHƯƠNG 2
Bài III. Hệ vector độc lập/phụ thuộc tuyến tính (tt)

- *Cách xác định hệ vector độc lập tuyến tính/phụ thuộc tuyến tính:*

- *Bước 1*. Từ hệ U = {u_1 , u_2 , … , u_n }, lập đẳng thức dạng:

$$k_1u_1 + k_2u_2 + \dots + k_nu_n = \theta \qquad (2)$$

- *Bước 2*. Từ đẳng thức (2), lập hệ phương trình thuần nhất:

$$\begin{cases} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \cdots + a_{1n}k_n = 0 \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \cdots + a_{2n}k_n = 0 \\ \dots . \\ a_{n1}k_1 + a_{n2}k_2 + \cdots + a_{nn}k_n = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Với $u_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots , a_{n1})$, $u_2 = (a_{12}, a_{22}, \dots , a_{n2})$ …$u_n = (a_{1n}, a_{2n}, \dots , a_{nn})$.

- *Kết luận*: Nếu hệ (*) chỉ có duy nhất nghiệm $k_1= k_2 = \dots = k_n= 0$ thì U là hệ *ĐLTT*; nếu hệ (*) có nghiệm với ít nhất một $k_i \neq 0$ thì U là hệ *PTTT.*
- Hoặc nếu $|A| \neq 0$ thì U là hệ ĐLTT; nếu $|A| = 0$ thì kết luận U là PTTT.

CHƯƠNG 2
Bài III. Hệ vector độc lập/phụ thuộc tuyến tính (tt)

3.2 Các thí dụ về hệ vector độc lập tt /phụ thuộc tt.

- *Thí dụ 1*. Xét sự ĐLTT của hệ vector:

  U = {u_1=(1, 2, 3), u_2= (4, 5, 6), u_3 = (1, 1, 0)}, (1)

- *Bước 1: lập đẳng thức:* $k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 = \theta$ (2)
- *Bước 2*. Từ đẳng thức (2), lập hệ phương trình thuần nhất:

$$\begin{cases} 1.k_1+4.k_2+1.k_3=0 \\ 2.k_1+5.k_2+1.k_3=0 \\ 3.k_1+6.k_2+0.k_3=0 \end{cases} \quad (*)$$

- *Kết luận*: Do hệ (*) chỉ có duy nhất nghiệm $k_1= k_2 = k_3= 0$ nên U là hệ vector ĐLTT.
- *Chú ý:* Có thể không cần giải hệ (*), tính được |A|= 3 $\neq$ 0, vậy kết luận U là hệ vector ĐLTT. (nếu |A| = 0 thì hệ U là PTTT)

CHƯƠNG 2
Bài III. Hệ vector độc lập/phụ thuộc tuyến tính (tt)

3.2 Các thí dụ về hệ vector độc lập tt /phụ thuộc tt.

- *Thí dụ 2*. Xét sự ĐLTT của hệ vector:

  $U = \{u_1=(1, 2, 3), u_2= (4, 5, 6), u_3 = (1, 1, 1)\}$ (1)

- *Bước 1:* lập đẳng thức: $k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 = \theta$ (2)
- *Bước 2*. Từ đẳng thức (2), lập hệ phương trình thuần nhất:

$$\begin{cases} 1.k_1+4.k_2+1.k_3=0 \\ 2.k_1+5.k_2+1.k_3=0 \\ 3.k_1+6.k_2+1.k_3=0 \end{cases} \qquad (*)$$

- *Kết luận*: Do hệ (*) chỉ có nghiệm $k_1= 1;$ $k_2 = -1;$ $k_3= 3$ nên U là hệ vector *pttt.*
- *Chú ý:* Có thể không cần giải hệ (*), tính được |A|= 0, vậy kết luận U là hệ vector *PTTT*. (nếu $|A| \neq 0$ thì hệ U là ĐLTT)

3.2 Các thí dụ về hệ vector độc lập tt /phụ thuộc tt.

- *Thí dụ 3*. Trong không gian các ma trận vuông cấp 2 (ký hiệu M_2), xét sự đltt của hệ vector:

$$U = \{u_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, u_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\} \qquad (1)$$

- *Lập đẳng thức:* $k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 + k_4u_4 = \theta$ (với $\theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$) (2)
- Từ (2) có hệ phương trình ma trân: $\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (*)
- Từ (*) giải được $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$. *Vậy U là hệ đltt*

CHƯƠNG 2
Bài III. Hệ vector độc lập/phụ thuộc tuyến tính (tt)

3.2 Các thí dụ về hệ vector độc lập tt /phụ thuộc tt.

- *Thí dụ 4*. Trong không gian các đa thức có bậc không vượt quá 2, xét sự đltt của hệ vector:

$$S = \{p_1 = x + 1,\ p_2 = x^2 + x + 2,\ p_3 = x^2 + 1\} \qquad (1)$$

- *Lập đẳng thức:* $k_1p_1 + k_2p_2 + k_3p_3 = \theta$ (với $\theta = 0.x^2 + 0.x + 0$) (2)
- Từ đẳng thức (2), lập hệ phương trình thuần nhất:

$$\begin{cases} 0.k_1 + 1.k_2 + 1.k_3 = 0 \\ 1.k_1 + 1.k_2 + 0.k_3 = 0 \\ 1.k_1 + 2.k_2 + 1.k_3 = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

- Do hệ (*) có nghiệm $k_1 = 1$; $k_2 = -1$; $k_3 = 1$ nên U là hệ vector *PTTT.*
- *Chú ý:* Có thể không cần giải hệ (*), tính được $|A| = 0$, vậy kết luận U là hệ vector *PTTT*.

Bài III. Hệ vector độc lập/phụ thuộc tuyến tính (tt)

3.3 Các tính chất của hệ vector độc lập tt/phụ thuộc tt

Cho U là một hệ vector trong không gian tuyến tính V, khi đó ta có các tính chất sau:

- TC1. Nếu U là hệ vector ĐLTT thì mọi hệ con của U cũng là ĐLTT
- TC2. Nếu U là hệ vector PTTT thì khi thêm vào U một vector bất kỳ trong V, hệ vector mới nhận được cũng là hệ PTTT.
- TC3. Mọi hệ vector có chứa vector không θ đều là hệ PTTT.
  - *Hệ quả:* Mọi hệ vector ĐLTT đều không chứa vector không θ.
- TC4. Hệ vector U là PTTT $\Leftrightarrow$ có ít nhất một vector của hệ biểu diễn tuyến tính qua các vector còn lại của hệ
- *Hệ quả*: Hệ 2 vector là hệ PTTT $\Leftrightarrow$ 2 vector tỷ lệ nhau: $u_1 = k.u_2,\ k \in$ R
- TC5. Nếu U = $\{u_1 , u_2 , \dots , u_n \}$ là hệ ĐLTT trong không gian V, nếu có vector $v \in$ V biểu diễn tuyến tính qua các vector của U thì biểu diễn đó là duy nhất. *(tức là nếu $v = k_1u_1 + k_2u_2 + \dots + k_nu_n$ thì các hệ số k_i là duy nhất)*

CHƯƠNG 2
Bài IV. Cơ sở và số chiều của không gian vector

4.1 Cơ sở của không gian vector

- *Định nghĩa 1*. Hệ vector U = {u_1 , u_2 , … , u_n } trong không gian V được gọi là một cơ sở của không gian V nếu thỏa mãn 2 điều kiện:
  1. U là hệ vector độc lập tuyến tính, và:
  2. Moi vector của V đều biểu diễn tuyến tính qua các vector của U
- *Nhận xét:* Điều kiện 2 tương đương với điều kiện U là hệ sinh của V, tức là V = span(U). Tuy nhiên nếu V = span(U) thì không suy ra được U là cơ sở của V, vì chưa chắc U đã là hệ ĐLTT.
- *Phương pháp chứng minh một hệ vetor U là cơ sở của không gian V:*

Bước 1. Chứng minh hệ U là ĐLTT
Bước 2. Lấy 1 vector *v* bất kỳ của V rồi biểu diễn $v = k_1u_1 + k_2u_2 + … + k_nu_n$, từ đó xác định được các k_i theo các thành phần của v, khi đó *v* là biểu diễn được qua các vector của U. Theo định nghĩa, U sẽ là một cơ sở của V.

- *Chú ý rằng một không gian vector có thể có nhiều cơ sở*

Bài IV. Cơ sở và số chiều của không gian vector

- *Thí dụ 1.* Trong không gian vector R^3, cho hệ vector:

$$U = \{ e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}.$$

Hãy chứng minh hệ này là một cơ sở của không gian vetor R^3.

- Ta ch/m hệ này ĐLTT: từ đẳng thức $k_1e_1+k_2e_2+k_3e_3 = \theta$ ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 1.k_1+0.k_2+0.k_3 = 0 \\ 0.k_1+1.k_2+0.k_3 = 0 \\ 0.k_1+0.k_2+1.k_3 = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Hệ (*) có duy nhất nghiệm $k_1 = 0$; $k_2 = 0$; $k_3 = 0$, vậy hệ U là ĐLTT. (1)

- Lấy vector *v* bất kỳ trong R^3, $v = (x_1, x_2, x_3)$, biểu diễn v qua các vector của U, ta có: $v = k_1e_1+k_2e_2+k_3e_3 \Leftrightarrow k_1e_1+k_2e_2+k_3e_3 = (x_1, x_2, x_3)$

Giải ra ta có $k_1 = x_1$; $k_2 = x_2$; $k_3 = x_3$ tức là $v = x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3$ hay $v \in span(U)$. (2)

Từ (1) và (2), theo định nghĩa U là một cơ sở của R^3.

- *Chú ý*: Trong không gian R^n, hệ $U = \{e_i \mid e_i = (0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0), i = 1, 2, \ldots, n\}$ luôn luôn là một cơ sở của R^n, và gọi là cơ sở chính tắc của R^n.

- *Thí dụ 2.* Trong không gian vetor R^3, cho hệ vector:

  $U = \{ u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (1, 1, 0), u_3 = (1, 0, 0)\}$.

Hãy chứng minh hệ này là một cơ sở của không gian vetor R^3.

- *Thí dụ 3.* Trong không gian M_2 các ma trận vuông cấp 2, cho hệ vector:

  $U = \{u_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, u_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\}$

Hãy chứng minh hệ này là một cơ sở của không gian vector M_2.

- *Chú ý*: Cơ sở U trên đây gọi là cơ sở chính tắc của M_2.

- *Thí dụ 4.* Trong không gian P_2 các đa thức có bậc không vượt quá 2, cho hệ vector:

  $U = \{p_1 = x^2 ; p_2 = x ; p_3 = 1\}$, hãy chứng tỏ U là một cơ sở của P_2.

- *Chú ý*: Cơ sở U trên đây gọi là cơ sở chính tắc của P_2.

4.2 Tìm cơ sở của không gian vector con

- *Định nghĩa.* Cho $W \subseteq V$ là một không gian con của không gian vector V, Tập các vector $S = \{s_1 , s_2 , \ldots , s_r \}$ trong không gian con W được gọi là một cơ sở của không gian con W nếu thỏa mãn 2 điều kiện:
  1. S là hệ vector độc lập tuyến tính, và:
  2. Moi vector của W đều biểu diễn tuyến tính qua các vector của S
- Phương pháp tìm cơ sở của không gian con:

Bước 1. Tìm tập sinh S của không gian con W, tức là có W = span(S)

Bước 2. Chứng minh S là hệ vetor độc lập tuyến tính, khi đó S sẽ là một cơ sở của W.(hoặc tìm được S’ là tập vector độc lập tuyến tính cực đại trong S, khi đó S’ sẽ là một cơ sỏ của W.

- *Chú ý:* Nếu W là không gian con của V thì cơ sở của W thường có số vector ít hơn số vector trong một cơ sở của V.

4.2 Tìm cơ sở của không gian vector con

- *Thí dụ 1.* Trong không gian vector R^3 cho tập vector:

$$W = \{(x, y, z) \mid x, y, x \in R ; 2y + z = 0\}$$

a/. Ch/m rằng W là không gian con của R^3.

b/. Hệ U = {e_1 = (1, 0, 0) ; e_2 = (0, 1, 0)} có phải là cơ sở của W không?

c/. Tìm một cơ sở của W.

Giải: a/. SV tự ch/m tương tự thí dụ 1, bài II. (rất dễ!)

b/. Không phải, do $e_2 \notin W$

c/. $\forall v = (x, y, z) \in W$ thì có có $2y + z = 0$ hay : $z = -2y$,

vậy $v = (x, y, z) \in W \Leftrightarrow v = (x, y, -2y) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, -2)$

Đặt: $u_1 = (1, 0, 0)$; $u_2 = (0, 1, -2)$ thì $\forall v = (x, y, z) \in W \Leftrightarrow v = x.u_1 + y.u_2$

Vậy S = {u_1 = (1, 0, 0) ; u_2 = (0, 1, -2) } là một hệ sinh của W, hay W = span(S).

Dễ thấy S là hệ vector độc lập tt (hệ gồm 2 vector không tỷ lệ nhau là ĐLTT)

Vậy S là một cơ sở của không gian con W.

4.2 Tìm cơ sở của không gian vector con

- *Thí dụ 2.* Trong không gian vector R^4 cho tập vector:

$$W = \{(x, y, z, t) \mid \text{với: } x + t = 0 \,;\, y - z - t = 0\}$$

a/. Ch/m rằng W là không gian con của R^4.

b/. Tìm một cơ sở của W.

- *Thí dụ 3.* Trong không gian P_2 các đa thức có bâc không vượt quá 2, cho tập vector:

$$W = \{ ax^2+bx+c \mid \text{với } a + b - c = 0 \}$$

a/. Ch/m rằng W là không gian con của P_2.

b/. Tìm một cơ sở của W.

CHƯƠNG 2
Bài IV. Cơ sở và số chiều của không gian vector

4.3 Số chiều của không gian vector

- *Định nghĩa.* Số chiều của một không gian vector (hoặc không gian con) bằng số vector trong một cơ sở của không gian đó.
  - Số chiều của không gian vector V kí hiệu là dim(V).
  - *Chú ý 1*: nếu V = { θ } thì dim(V) = 0.
  - *Chú ý 2*: Chúng ta chỉ xét các không gian hữu hạn chiều, tức là các không gian có cơ sở gồm hữu hạn vector.
- *Định lý*. Trong không gian n chiều thì mọi cơ sở đều có đúng n vector.
  - *Hệ quả 1*. Trong không gian n chiều thì mọi hệ có từ n + 1 vector đều PTTT
  - *Hệ quả 2*. Trong không gian n chiều thì mọi hệ n vector ĐLTT đều là cơ sở.
  - *Hệ quả 3*. Một không gian V sinh bởi hệ U gồm m vector thì dim(V) $\leq$ m
- *Thí dụ 1*. Không gian R^3 có một cơ sở U = {(1, 0, 0); (0, 1, 0), (0, 0, 1)} xem thí dụ 1, phần 4.1), do cơ sở U có 3 vector nên dim(R^3) = 3.

4.3 Số chiều của không gian vector

- *Thí dụ 2.* Trong không gian vector R^3 cho tập vector:

$$W = \{(x, y, z) \in R^3 \mid \text{với: } x - 3y + z = 0\}$$

a/. Ch/m rằng W là không gian con của R^3.

b/. Tìm một cơ sở, tính số chiều của W.

- *Thí dụ 3.* Trong không gian P_2 các đa thức có bâc không vượt quá 2, cho tập vector: $W = \{ ax^2+bx+c \mid \text{với } a + b - c = 0 \}$

a/. Ch/m rằng W là không gian con của P_2.

b/. Tìm một cơ sở, tính số chiều của W.

- *Thí dụ 4.* Trong không gian vector R^4 cho tập vector:

$$W = \{(x, y, z, t) \mid \text{với: } x + 2t = 0 \,;\, y - z - t = 0\}$$

a/. Ch/m rằng W là không gian con của R^4.

b/. Tìm một cơ sở và tính số chiều của W.

4.4 Hạng của một hệ vector

- *Định nghĩa.* Cho hệ vector U = {u_1 , u_2 , … , u_m } trong không gian vector V, hạng của hệ vector U bằng số vector *độc lập tuyến tính cực đại* trong U, và được ký hiệu là r(U).
- *Định lý.* Hạng của hệ vector U bằng số chiều của không gian vector con sinh bởi U, tức là ta có: r(U) = dim[span(U)]
- Cách tìm hạng của hệ vector U = {u_1 , u_2 , … , u_m } trong không gian R^n
  - *Bước 1*. xếp m vector của U thành ma trận A cấp m x n, hoặc cấp n x m.
  - *Bước* 2. Tính hạng của ma trận A, ta có r(U) = r(A).
- *Thí dụ*. Cho hệ vector: U = {u_1=(1, 3, 5, 4); u_2= (2,-1, 3, 1) u_3=(8, 3, 19, 11)} trong R^4. Tính hạng của hệ vector U.
  - *Giải*: Lập ma trận A=$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 8 & 3 & 19 & 11 \end{bmatrix}$, tính được r(A) = 2, vậy r(U) = 2.

  (hoặc có thể thấy rằng số vector ĐLTT cực đại trong U là 2, vậy r(U) =2)

4.5 Tọa độ của vector

- *Định nghĩa.* Trong không gian n chiều V, cho cơ sở U = {u_1 , u_2 , … , u_n }, nếu vector $x \in$V có biểu diễn tuyến tính qua vector của cơ sở U:

$$x = x_1.u_1 + x_2.u_2 + \ldots + x_n u_n \qquad (*)$$

thì các hê số trong biểu diễn (*) gọi là tọa độ cột của vector *x* trong cơ sở U.

- Ký hiệu tọa độ của x trong U: $x_{[\ U\ ]} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$ (viết gọn: $x_{[U]} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$)
- *Chú ý*: mỗi vector $x \in$V có thể có các tọa độ khác nhau trong các cơ sở khác nhau.

- *Thí dụ.* Trong không gian vector R^3, cho hệ vector

U = {(1, 0, 1); (0, 1, 1), (1, 1, 1)}

a/. Chứng minh U là một cơ sở của R^3.

b/. Tìm tọa độ của vector x = (2, 3, 4) trong cơ sở U

c/. Tìm tọa độ của vector x = (2, 3, 4) trong cơ sở chính tắc E của R^3.

4.6 Chuyển cơ sở

- *Bài toán chuyển cơ sở.*
  - Giả sử không gian V có 2 cơ sở: $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ và $U' = \{u'_1, u'_2, \dots, u'_n\}$
  - Giả sử với vector $x \in V$, ta đã biết tọa độ cột của x trong cơ sở U là: $x_{[U]}$
  - Yêu cầu đặt ra là tìm tọa độ cột của x trong cơ sở U' khi biết tọa độ cột của x trong cơ sở U.
- *Định nghĩa ma trận chuyển cơ sở.* Một ma trân A sao cho:

$$x_{[U']} = A.x_{[U]} \qquad (4.6)$$

được gọi là ma trận chuyển từ cơ sở U' sang cơ sở U của không gian vector V.

- *Cách tìm ma trân chuyển cơ sở từ cơ sở U' sang cơ sở U.*
  - *Bước 1*. Biểu diễn các vector cơ sở của U qua các vecor của U'.

$$u_i = a_{1i}\, u'_1 + a_{2i}\, u'_2 + \dots + a_{ni}\, u'_n \ \ (\text{với } i = 1, 2, \dots, n) \qquad (*)$$

  - *Bước 2*. Lập ma trân $A = (a_{ij})$, với a_{ij} xác định từ hệ phương trình (*), A chính là ma trận chuyển cơ sở từ U' sang U.

Bài IV. Cơ sở và số chiều của không gian vector

4.6 Chuyển cơ sở

- *Thí dụ 1.* Trong không gian R^3, cho 2 cơ sở:

$U = \{u_1=(1, 1, 0); u_2 =(0, 1, 1) ; u_3=(1, 1, 1)\}$, và

$U' = \{u'_1=(1, 0, 1); u'_2 =(1, 2, 1) ; u'_3=(1, 1, 2)\}$

a/. Hãy tìm ma trận chuyển từ cơ sở U' sang cơ sở U.

b/. Tìm tọa độ của vector x = (2, 3, 4) trong hai cơ sở trên.

Giải: biểu diễn các vector u_i qua các vector u'_i, ta tính được:

- Ma trận chuyển cơ sở U' sang U là: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
- Biểu diễn vector x qua U, ta có hệ $k_1.u_1+k_2.u_2+k_3.u_3 = (2, 3, 4)$

Giải ra tính được các hệ số $k_1 = -1$, $k_2 = 1$, $k_3 = 3$. Vậy: $x_{[U]} = (-1 , 1, 3)^T$

- Để tính tọa độ của x trong cơ sở U', áp dụng công thức chuyển cơ sở (4.6), ta có: $x_{[U']} = A.\ x_{[U]}$. Ta có: $x_{[U']} = (-1/2 , 1/2 , 2)^T$.

4.6 Chuyển cơ sở

- *Thí dụ 2.* Trong không gian P_2, cho 2 hệ vector:

U = $\{p_1 = x^2 + 1;\ p_2 = x + 1;\ p_3 = x - 1\}$, và

U'= $\{q_1 = x^2 - 1;\ q_2 = x^2 + x + 1;\ q_3 = x\}$

a/. Chứng minh rằng U và U' là 2 cơ sở của P_2

b/. Tìm ma trận chuyển từ cơ sở U sang cơ sở U'.

c/. Tìm tọa độ cột của vector $p = 2x^2 + 4x + 6$ trong 2 cơ sở trên.

Giải b/. biểu diễn các vector u'_i qua các vector u_i, ta tính được:

- Ma trận chuyển cơ sở U sang U' là: $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$
- Tọa độ của p trong U' là $p_{[U']} = (-2, 4, 0)^T$
- Tọa độ của p trong U là $p_{[U]} = B.\ p_{[U']} \Rightarrow p_{[U]} = (-6, 4, 0)^T$

❑ Bài tập chương 2:

Làm vào vở bài tập từ bài 18 đến bài 32 trong Bài tập ĐSTT năm học 2017-2018 (bản mới).

Download tại:

http://www1.vnua.edu.vn/khoa/fita/bo-mon/bm-toan/