HỌC VIỆN NÔNG NGHIỆP VIỆT NAM
VIETNAM NATIONAL UNIVERSITY OF AGRICULTURE

PGS.TS. Nguyễn Văn Định

BÀI GIẢNG ĐAI SỐ TUYẾN TÍNH

Chương 3: Ánh xạ tuyến tính

Hà Nội, 2017

CHƯƠNG 3
Ánh xạ tuyến tính

Nội dung chương gồm 4 phần:

Bài I. Định nghĩa và các tính chất của ánh xạ tuyến tính

Bài II. Nhân - Ảnh và Hạng của ánh xạ tuyến tính.

Bài III. Ma trận của ánh xạ tuyến tính

Bài IV. Vector riêng và giá trị riêng của ánh xạ tuyến tính

Bài I. Định nghĩa và tính chất ánh xạ tuyến tính

1.1 Định nghĩa ánh xạ tuyến tính

- *Nhắc lại về tập hợp và ánh xạ*.
- *Định nghĩa 1*. Cho 2 không gian vector V và V_1, ánh xạ $f: V \to V_1$ được gọi là *ánh xạ tuyến tính* (*axtt*) từ V vào V_1 nếu thỏa mãn 2 điều kiện:

  (1) $\forall u, u' \in V$ thì $f(u + u') = f(u) + f(u')$, và

  (2) $\forall u \in V$, $\forall k \in R$ thì $f(ku) = k.f(u)$

- Một vài khái niệm liên quan đến ánh xạ tuyến tính:
- Không gian V: *không gian nguồn* (miền xác định)
- Không gian V_1: *không gian đích* hay *không gian ảnh* (miền giá trị)
- Khi $V = V_1$: ánh xạ tuyến tính $f: V \to V$ được gọi là *phép biến đổi tuyến tính trên V*, hay *toán tử tuyến tính trên V.*
- $\forall u \in V$ thì f(u) gọi là *ảnh của u, vector u gọi là phần tử gốc.*

1.2 Các thí dụ về ánh xạ tuyến tính

- *Thí dụ 1*. Cho ánh xạ f: $R^3 \to R^2$ xác định như sau:

$$\forall u = (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \text{ thì } f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3) \in R^2$$

Hãy chứng minh f là ánh xạ tuyến tính.

- *Giải:* ta chứng minh f thỏa mãn 2 điều kiện của định nghĩa

(1) $\forall\ u = (x_1, x_2, x_3)$; $u' = (x'_1, x'_2, x'_3) \in R^3$;

Ta có: $f(u + u') = f(x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, x_3 + x'_3) = (x_1 + x'_1 + x_2 + x'_2, x_2 + x'_2 + x_3 + x'_3)$

$= (x_1 + x_2, x_2 + x_3) + (x'_1 + x'_2, x'_2 + x'_3) = f(u) + f(u')$.

Vậy $f(u + u') = f(u) + f(u')$; đ/k (1) của định nghĩa được thỏa mãn.

(2) $\forall u = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$; $\forall k \in R$.

Ta có $f(k.u) = f(kx_1, kx_2, kx_3) = (kx_1 + kx_2, kx_2 + kx_3) = k.f(u)$

Vậy $f(k.u) = k.f(u)$; đ/k (2) của định nghĩa được thỏa mãn.

- Vậy theo định nghĩa, f là ánh xạ tuyến tính từ R^3 vào R^2

1.2 Các thí dụ về ánh xạ tuyến tính

- *Thí dụ 2*.(33). Trong các ánh xạ sau, ánh xạ nào là ánh xạ tuyến tính:

1/. Ánh xạ *f*: $R^2 \to R^3$ xác định bởi:

$$\forall u = (x, y) \in R^2 \text{ thì } f(x, y) = (x - y, x + y, 2x - 3y)$$

2/. Ánh xạ *g*: $R^2 \to R^3$ xác định bởi:

$$\forall u = (x, y) \in R^2 \text{ thì } g(x, y) = (x - 1, x + y, 2x - 3y)$$

3/. Ánh xạ *h*: $R^2 \to R^2$ xác định bởi:

$$\forall u = (x, y) \in R^2 \text{ thì } h(x, y) = (x + y, xy).$$

- *ĐA: f là ánh xạ tt ; g và h không phải ánh xạ tt*

CHƯƠNG 3
Bài I. Định nghĩa và tính chất ánh xạ tuyến tính

1.3 Các tính chất của ánh xạ tuyến tính

Cho *Ánh xạ tuyến tính* $f: V \to V_1$, khi đó ta có các tính chất sau

- *TC 1. Ảnh của vector không là vector không*, tức là nếu θ là vector không trong V, θ_1 là vector không trong V_1 thì:

$$f(\theta) = \theta_1$$

- *TC 2. Ảnh của vector đối là đối của ảnh*, tức là:

$$\forall u \in V \text{ thì } f(-u) = -f(u)$$

- *TC 3. Ảnh của một tổ hợp tuyến tính bằng tổ hợp tuyển tính các ảnh*, với cùng các hệ số, tức là:

$$\forall u_i \in V, \forall k_i \in R \quad \text{thì} \quad f\left(\sum_{i=1}^{n} k_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} k_i . f(u_i)$$

- *Thí dụ 3:* Giả sử axtt *f*: $R^2 \to R^3$ sao cho f(1,-1) = (-1,1,2) và f(-2,3) = (2,3, -4). Hãy tính f(3, -5). *(bài tập 37, ôn tập ĐSTT 2017)*

- <u>*Giải:*</u> áp dụng TC 3, do (3, -5) = -1.(1, -1) -2.(-2, 3) nên
  f(3, -5) = -1.f(1, -1) -2.f(-2, 3) = (-3, -7, 6)

HVN Học viện Nông nghiệp Việt Nam

CHƯƠNG 3
Bài II. Nhân - Ảnh và Hạng của ánh xạ tuyến tính

2.1 Nhân của ánh xạ tuyến tính

- *Định nghĩa 2*. Cho *ánh xạ tuyến tính* f: $V \to V_1$, khi đó nhân của ánh xạ tuyến tính f được ký hiệu và xác đinh như sau:

$$\ker f = \{u \in V \mid f(u) = \theta_1 \in V_1\}$$

- *Vậy ker f là tập con của V, gồm các vector mà ảnh của nó là vector không trong V_1*

- *Định lý 1.* Cho *ánh xạ tuyến tính* f: $V \to V_1$, khi đó nhân của ánh xạ tuyến tính f là một không gian vector con của V.

Chứng minh:

- Ch/m $\ker f \neq \varnothing$: Với $\theta \in V$ thì $f(\theta) = \theta_1 \in V_1$, vậy $\theta \in \ker f \Rightarrow$ $\ker f \neq \varnothing$ (1)
- Ch/m $\forall u_1, u_2 \in \ker f$ thì $u_1 + u_2 \in \ker f$: *Ta có* $f(u_1) = f(u_2) = \theta_1 \in V_1$; do f là axtt nên $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2) = \theta_1 + \theta_1 = \theta_1 \in V_1$, vậy $u_1 + u_2 \in \ker f$. (2)
- Ch/m $\forall u \in \ker f$, $\forall k \in R$ thì $k.u \in \ker f$: Ta có $f(u) = \theta_1$, do f là axtt nên $f(k.u) = k.f(u) = k.\theta_1 = \theta_1$. Vậy $k.u \in \ker f$. (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow$ *ker f là không gian vector con của V.*

2.1 Nhân của ánh xạ tuyến tính

- *Thí dụ 4*. Cho *ánh xạ f*: $R^3 \to R^3$, xác định như sau:

$$\forall u = (x, y, z) \in R^3 \text{ thì } f(x, y, z) = (x - y , y - z , z - x)$$

a/. Ch/m *f* là ánh xạ tuyến tính (hay *f* là *phép biến đổi tuyến tính trong* R^3)

b/. Tìm ker *f* . Chỉ ra một cơ sở và tính số chiều của ker *f*

Giải: a/. sv tự ch/m xem như là bài tập về nhà (tương tự thí dụ 1, mục 1.2).

b/. Theo đ/n : $u = (x, y, z) \in \ker f \Leftrightarrow f(u) = \theta \in R^3 \Leftrightarrow (x - y , y - z , z - x) = (0, 0, 0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \quad (*) \\ z - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x = y = z. \text{ Vậy } \ker f = \{u = (x , x , x) \mid x \in R \} \qquad (*)$$

Từ (*): $u \in \ker f \Leftrightarrow u = (x , x, x) = x(1, 1, 1), x \in R$. Đặt U = { $u_1 = (1, 1, 1)$} thì U là hệ sinh của ker *f*. Do U chỉ có 1 vector khác không nên U là hệ độc lập tuyến tính. Vậy U = { $u_1 = (1, 1, 1)$} là một cơ sở của ker *f*.

- Cơ sở U của ker *f* chỉ gồm 1 vector $\Rightarrow$ dim(ker *f*) = 1.

Bài II. Nhân - Ảnh và Hạng của ánh xạ tuyến tính

2.1 Nhân của ánh xạ tuyến tính

- *Thí dụ 5*. Cho *ánh xạ f*: $R^3 \to R^2$, xác định như sau:

$$\forall u = (x, y, z) \in R^3 \text{ thì } f(u) = (x + y , y - z)$$

a/. Ch/m *f* là ánh xạ tuyến tính.

b/. Tìm ker *f* . Chỉ ra một cơ sở và tính số chiều của ker *f*

- *ĐA:* ker $f = \{u = (-x , x , x) \mid x \in R \}$; dim(ker f) = 1

- *Thí dụ 6.* Cho *ánh xạ f*: $R^2 \to R^3$, xác định như sau:

$$\forall u = (x, y) \in R^2 \text{ thì } f(u) = (x + y , x - y , 2x - 3y)$$

a/. Ch/m *f* là ánh xạ tuyến tính.

b/. Tìm ker *f* . Chỉ ra một cơ sở và tính số chiều của ker *f*

- *ĐA:* ker $f = \{ \theta \}$; dim(ker f) = 0.

2.2 Ảnh của ánh xạ tuyến tính

- *Định nghĩa 3*. Cho *ánh xạ tuyến tính* f: $V \to V_1$, khi đó ảnh của ánh xạ tuyến tính f được ký hiệu và xác đinh như sau:

$$\mathrm{Im}\, f = \{v \in V_1 \mid \exists\, u \in V \text{ sao cho } v = f(u)\}$$

- *Vậy Im f là tập con của V_1, gồm các vector là ảnh của các vector nguồn trong V.*

- *Định lý 2.* Cho *ánh xạ tuyến tính* f: $V \to V_1$, khi đó ảnh của ánh xạ tuyến tính f là một không gian vector con của V_1.

Chứng minh:

- Ch/m Im $f \neq \varnothing$: do $f(\theta) = \theta_1 \in V_1$, vậy $\theta_1 \in \mathrm{Im}\, f \Rightarrow \mathrm{Im}\, f \neq \varnothing$ (1)
- $\forall v_1, v_2 \in \mathrm{Im}\, f$ thì $\exists\, u_1, u_2 \in V$ để $v_1 = f(u_1)$, $v_2 = f(u_2)$,
  vậy $v_1 + v_2 = f(u_1) + f(u_2) = f(u_1 + u_2)$, với $u_1 + u_2 \in V$. Vậy $v_1 + v_2 \in \mathrm{Im}\, f$ (2)
- $\forall v \in \mathrm{Im}\, f$, $\forall k \in R$ thì do $v \in \mathrm{Im}\, f$ nên $\exists\, u \in V$ sao cho $v = f(u)$
  $\Rightarrow k.v = k.f(u) = f(ku)$, với $ku \in V$. Vậy $k.v \in \mathrm{Im}\, f$. (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow$ *Im f là không gian vector con của V_1.*

2.2 Ảnh của ánh xạ tuyến tính

- *Thí dụ 7*. Cho *ánh xạ f*: $R^2 \to R^3$, xác định như sau:

$$\forall u = (x, y) \in R^2 \text{ thì } f(u) = (x - y , x - y , x + y)$$

a/. Ch/m *f* là ánh xạ tuyến tính.

b/. Tìm Im *f* . Chỉ ra một cơ sở và tính số chiều của Im *f*

Giải: a/. sv tự ch/m xem như là bài tập về nhà (tương tự thí dụ 1, mục 1.2).

Giải b/. Tìm Im *f.*

Bước 1. Chọn cơ sở chính tắc của R^2: E = {e_1=(1, 0), e_2 =(0, 1)}.

Bước 2. Tính ảnh của các vector cơ sở của R^2: $f(e_1)$ = (1, 1, 1), $f(e_1)$ = (-1, -1, 1).

Bước 3. Im *f* = *span* {f(e_1), f(e_2)} $\Rightarrow$ Im *f* = *span* {v_1 =(1, 1, 1), v_2= (-1, -1, 1)}

- S = {v_1 =(1, 1, 1), v_2= (-1, -1, 1)} gồm 2 vector không tỷ lệ , vậy S là hệ ĐLTT. Vậy cơ sở của Im *f* là S = {v_1 =(1, 1, 1), v_2= (-1, -1, 1)}
- Cơ sở S gồm 2 vector $\Rightarrow$ dim (Im *f*) = 2

2.3 Hạng của ánh xạ tuyến tính

- *Định nghĩa 4*. Cho *ánh xạ tuyến tính* f: $V \to V_1$, khi đó hạng của ánh xạ tuyến tính f bằng số chiều của Im f và được ký hiệu là $r(f)$. Tức là ta có:

$$r(f) = \dim(\operatorname{Im} f)$$

- *Vậy hạng của ánh xạ tuyến tính f bằng số vector trong một cơ sở của Im f.*

- *Định lý 3*. (*Định lý nhân-ảnh*) Cho *ánh xạ tuyến tính* f: $V \to V_1$, giả sử V là không gian n chiều, khi đó:

$$\dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\ker f) = n$$

- *Thí dụ 8*. Cho *ánh xạ* f: $R^2 \to R^3$: $\forall u = (x, y) \in R^2$ thì $f(u) = (x, y, x - y)$

Hãy tìm Im f, hạng của ánh xạ f và ker f.

- <u>*Giải:*</u> Xét một cơ sở chính tắc của R^2 là $E = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$.

Tính được : $f(e_1) = (1, 0, 1) = u_1$; $f(e_2) = (0, 1, 1) = e_2 \Rightarrow$ Im f = span$\{u_1, u_2\}$.
Dễ thấy $\{u_1, u_2\}$ là đltt nên $\{u_1, u_2\}$ là một cơ sở của Im f. Vậy $r(f) = 2$.

- Theo định lý nhân-ảnh: dim (ker f) = 0. Vậy ker $f = \{\theta\}$.

CHƯƠNG 3
Bài III. Ma trận của ánh xạ tuyến tính

3.1 Ma trận của ánh xạ tuyến tính trong 2 cơ sở

- *Định nghĩa 5*. Cho *ánh xạ tuyến tính* f: $V \to V_1$, giả sử:

  V có cơ sở : $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$

  V_1 có cơ sở : $S_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$

Nếu tồn tại ma trận $A_{m \times n}$ sao cho $f(u)_{[S1]} = A.u_{[S]}$ thì A gọi là *ma trận của ánh xạ tuyến tính f trong hai cơ sở S và S_1.*

- Tìm ma trận A:
- Tính các $f(u_i)$ rồi biểu diễn các vector $f(u_i)$ *qua các vector cơ sở v_i của V_1*:

$$\begin{aligned} f(u_1) &= a_{11} v_1 + a_{21} v_2 + \dots + a_{m1} v_m \\ f(u_2) &= a_{12} v_1 + a_{22} v_2 + \dots + a_{m2} v_m \qquad (*) \\ &\dots\dots\dots\dots \\ f(u_n) &= a_{1n} v_1 + a_{2n} v_2 + \dots + a_{mn} v_m \end{aligned}$$

- Từ mỗi đẳng thức của (*), xác định các a_{ij} rồi lập ma trận $A = (a_{ij})_{m \times n}$
- Trong công thức $f(u)_{[S1]} = A.u_{[S]}$ thì $u_{[S]}$ là tọa độ cột của $u \in V$ trong cơ sở S ; $f(u)_{[S1]}$ là tọa độ cột của $f(u) \in V$ trong cơ sở S_1.

CHƯƠNG 3
Bài III. Ma trận của ánh xạ tuyến tính

3.1 Ma trận của ánh xạ tuyến tính trong 2 cơ sở

- *Thí dụ 9*. Cho *ánh xạ tt* $f: R^3 \to R^2$, xác định bởi $f(x, y, z) = (x-y, z-y)$.

Giả sử: R^3 có cơ sở : $S = \{u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (1, 1, 0), u_3 = (0, 1, 1)\}$

R^2 có cơ sở : $S_1 = \{v_1 = (1, 1), v_2 = (1, 2)\}$

1/. Hãy tìm ma trận của ánh xạ tuyến tính *f* trong hai cơ sở trên

2/. Tính $f(u)$, với u = (1, 2, 3)

Giải 1/. Tính các $f(u_i)$ rồi biểu diễn các $f(u_i)$ qua các vector cơ sở v_i

$f(u_1) = (0, 0) \Rightarrow a_{11} v_1 + a_{21} v_2 = (0, 0)$

$f(u_2) = (0,-1) \Rightarrow a_{12} v_1 + a_{22} v_2 = (0,-1)$

$f(u_3) = (-1, 0) \Rightarrow a_{13} v_1 + a_{23} v_2 = (-1,0)$

$\Rightarrow$ tính được các a_{ij}, vậy A = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Giải 2/. Áp dụng công thức $f(u)_{[S1]} = A.u_{[S]}$

- <u>*Bước 1*</u>: Tính tọa độ cột $u_{[S]} = (2, -1, 1)^T \Rightarrow f(u)_{[S1]} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$
- <u>*Bước 2:*</u> $f(u) = -3.v_1 + 2.v_2 \Rightarrow f(1, 2, 3) = (-1, 1) \in R^2$

CHƯƠNG 3
Bài III. Ma trận của ánh xạ tuyến tính

3.2 Ma trận của phép biến đổi tuyến tính trong 1 cơ sở

- *Định nghĩa 6*. Cho *phép biến đổi tuyến tính* f: $V \to V$, (f còn gọi là toán tử tuyến tinh trong V). Giả sử V có cơ sở : $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$.

  Nếu tồn tại ma trân vuông A cấp n sao cho $f(u)_{[S]} = A.u_{[S]}$ thì A gọi là *ma trận của phép biến đổi tuyến tính f trong cơ sở S.*

- Tìm ma trận A:

- Tính các $f(u_i)$ rồi biểu diễn các vector $f(u_i)$ *qua các vector cơ sở u_i của S*:

$$\begin{aligned} f(u_1) &= a_{11} u_1 + a_{21} u_2 + \dots + a_{n1} u_n \\ f(u_2) &= a_{12} u_1 + a_{22} u_2 + \dots + a_{n2} u_n \qquad (*) \\ &\dots\dots\dots\dots \\ f(u_n) &= a_{1n} u_1 + a_{2n} u_2 + \dots + a_{nn} u_n \end{aligned}$$

- Từ mỗi đẳng thức của (*), xác định các a_{ij} rồi lập ma trận $A = (a_{ij})_{n \times n}$

- Chú ý rằng trong công thức $f(u)_{[S]} = A.u_{[S]}$ thì $u_{[S]}$ là tọa độ cột của $u \in V$ trong cơ sở S ; $f(u)_{[S]}$ là tọa độ cột của $f(u) \in V$ trong cơ sở S.

3.2 Ma trận của phép biến đổi tuyến tính

- *Thí dụ 10*. (35). Cho *ánh xạ tuyến tính* $f: R^3 \to R^3$, xác định bởi:

$$\forall u = (x, y, z) \in R^3,\ f(u) = (x + 2y, 3y + z, 3x - 2z).$$

1/. Tìm ker *f* , Im *f* và hãy chỉ ra cho mỗi không gian đó một cơ sở.

2/. Tìm hạng của ánh xạ *f.*

2/. Tìm ma trận của *f* trong cơ sở U của R^3, với:

$$U = \{u_1 = (0, 1, 1), u_2 = (1, 0, 1), u_3 = (1, 1, 1)\}$$

- *Thí dụ 11*. (36). Giả sử $f: R^2 \to R^2$ là một ánh xạ tuyến tính sao cho $f(1, 1) = (3, 4)$ và $f(2, 3) = (5, 2)$.

1/. Tìm $f(3, -4)$

2/. Xác định $f(x, y)$ $\forall (x, y) \in R^2$.

3/. Tìm ma trận của *f* trong cơ sở chính tắc của R^2.

CHƯƠNG 3
Bài III. Ma trận của ánh xạ tuyến tính

3.3 Liên hệ giữa hai ma trân của một phép biến đổi tuyến tính

- Xét phép biến đổi tuyến tính f trong không gian vector V. $f: V \to V$
- Giả sử không gian V có 2 cơ sở : S = $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ và $S_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$
- Gọi P là ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở S sang cơ sở S_1.
- Giả sử A là ma trận của f trong cơ sở S và B là ma trận của f trong cơ sở S_1.

- *Định lý 4.* Sự liên hệ giữa hai ma trận A và B của phép biến đổi tuyến tính f được xác định bởi công thức:

$$B = P^{-1}.A.P \quad (\text{ hoặc } A = P.B.P^{-1})$$

- *Định nghĩa7.* Cho A và B là hai ma trận vuông cùng cấp. Nếu tồn tại một ma trận vuông P không suy biến sao cho $B = P^{-1}.A.P$ (hay $A = P.B.P^{-1}$) thì hai ma trận A và B gọi là đồng dạng, ký hiệu A ~ B.
- *Nhận xét:* Như vậy hai ma trận của cùng một phép biến đổi tuyến tính f trong hai cơ sở khác nhau là hai ma trận đồng dạng.

CHƯƠNG 3
Bài III. Ma trận của ánh xạ tuyến tính

3.3 Liên hệ giữa hai ma trân của một phép biến đổi tuyến tính

- *Thí dụ 12*. (39) Cho ánh xạ tt $f : R^3 \to R^3$ có ma trận là $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ trong cơ sở chính tắc E = {e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1}.

1/. Tìm công thức xác định ánh xạ tuyến tính *f*.

2/. Tìm ma trận B của *f* trong cơ sở U = {u_1= (1, 0, 0), u_2= (1, 0, 1), u_3= (1, 1, 1)}

Giải 1. $\forall u = (x, y, z) \in R^3$ thì $u = x.e_1 + y.e_2 + z.e_3 \Rightarrow f(u) = x.f(e_1) + y.f(e_2) + z.f(e_3)$ (*)

- Do A là ma trận của f trong cơ sở E, nên $f(e_1) = 0.e_1 + 1.e_2 + 1.e_3$,= (0, 1, 1) ; tương tự ta tính được $f(e_2)$ = (1, 0, 1) và $f(e_3)$ = (1, 1, 0).
- Thay $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$ vào (*), tính được: $f(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$

Giải 2. SV tự thực hiện, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

* Có thể tính B theo định nghĩa 6 (mục 3.2)
* Nếu đã biết ma trận chuyển cơ sở P thì tính theo định lý 4: $B = P^{-1}.A.P$

CHƯƠNG 3
Bài IV. Vector riêng – Giá trị riêng

4.1 Giá trị riêng và vector riêng của phép biến đổi tuyến tính

- *Định nghĩa 8.* Cho phép biến đổi tuyến tính f: $V \to V$, vector $v \in V$, $v \neq \theta$ thỏa mãn $f(v) = \lambda.v$, thì v được gọi là vector riêng của phép biến đổi tuyến tính f, số λ được gọi là giá trị riêng ứng với vector riêng v.
- *Thí dụ 13.* Cho các phép biến đổi tuyến tính *trong* không gian R^2 :

1/. f : $R^2 \to R^2$ xác định : $\forall u = (x, y) \in R^2$ thì $f(x, y) = (y, x)$

- Với $v_1 = (1, -1) \in R^2$, *ta có* $f(v_1) = (-1, 1) = -1. (1, -1). \Rightarrow f(v_1) = -1. v_1$

  Vậy $v_1 = (1, -1)$ là một vector riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = -1$ của f.

2/. g : $R^2 \to R^2$ xác định $\forall u = (x, y) \in R^2$ thì $g(x, y) = (3x, 8x - y)$

- Với $v_2 = (1, 2) \in R^2$, *ta có* $g(v_2) = (3, 6) = 3. (1, 2). \Rightarrow g(v2) = 3. v_2$
- *Vậy* $v_2 = (1, 2)$ là một vector riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = 3$ của g.

- *Chú ý quan trọng: Do mỗi phép biến đổi tuyến tính đều có một ma trận A trong một cơ sở, nên việc tìm vector riêng và giá trị riêng của phép biến đổi tuyến tính được đưa về tìm vector riêng và giá trị riêng của ma trận.*

CHƯƠNG 3
Bài IV. Vector riêng – Giá trị riêng

4.2 Giá trị riêng và vector riêng của ma trận

- *Định nghĩa 9*. Cho A là ma trận vuông cấp n, số λ gọi là giá trị riêng của ma trận A, nếu hệ phương trình:

$$A.X = \lambda.X \qquad (1)$$

có nghiệm khác không.

- Nghiệm $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \neq (0, 0, \dots, 0)^T$ gọi là vector riêng ứng với giá trị riêng λ.

- *Thí dụ 14*. Cho ma trận A = $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$, có thể thấy rằng với λ =3 thì hệ phương trình $A.X = 3.X$ có nghiệm X = (1, 2)^T. Thật vậy, thay A, X và λ vào hệ (1) ta có:

$$A.X = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3. \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \lambda.X$$

- *Vậy* $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ là một vector riêng ứng với giá trị riêng λ =3 của ma trận A.

4.3 Tìm giá trị riêng và vector riêng của ma trận

Tìm giá trị riêng của ma trận.

Ta cần tìm λ để hệ phương trình: $A.X = \lambda.X$ (1) có nghiệm khác không.

Viết lại hệ (1): $\Rightarrow (A - \lambda.I).X = O$ (2) , với O là ma trận không cấp n.

(2) là một hệ pttt thuần nhất, điều kiện để hệ này có nghiệm khác không là:

$$\det(A - \lambda.I) = 0, \text{ hay } |A - \lambda.I| = 0 \qquad (3)$$

- Phương trình (3) là phương trình bậc n theo λ, gọi là phương trình đặc trưng của ma trân A. giải ra ta được n nghiệm $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ là các giá trị riêng của ma trận A.

- *Thí dụ 15*. Tìm các giá trị riêng của ma trận $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Giải: Ta có ma trận $A - \lambda.I = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix}$.

- Phương trình đặc trưng: $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$.
- Giải ra ta được các giá trị riêng $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 2$.

CHƯƠNG 3
Bài IV. Vector riêng – Giá trị riêng

4.3 Tìm giá trị riêng và vector riêng của ma trận

Tìm vector riêng của ma trận.

- Với mỗi giá trị riêng λ_i , thay vào (2): $(A - \lambda.I).X = O$; nhận được hệ thuần nhất. Giải hệ này tìm được nghiệm $v_i = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, khi đó v_i là vector riêng ứng với giá trị riệng λ_i của ma trận A.
- *Thí dụ 16*. Tìm các giá trị riêng và vector riêng của ma trận A = $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$.

Giải: Phương trình đặc trưng: $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 8 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0.$

- Giải ra ta được các giá trị riêng $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = 3$.
- Với A đã cho thì hệ (2) có dạng: $\begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 8 & -1-\lambda \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (2)
- Thay $\lambda_1 = -1$ vào (2) : $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

  Giải hệ này được x = 0, y tùy ý, chọn y = 1. Vậy $v_1 = (0, 1)$ là vector riêng ứng với $\lambda_1 = -1$
- Thay $\lambda_1 = 3$ vào (2) : $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

  Giải hệ này được y = 2x, x tùy ý, chọn x = 1. Vậy $v_2 = (1, 2)$ là vector riêng ứng với $\lambda_2 = 3$

4.4 Tìm giá trị riêng và vector riêng của ma trận

Các định lý về vector riêng và giá trị riêng

- *Định lý 5*. Nếu *v* là một vector riêng của ma trận A, $\forall k \in$ R , $k \neq 0$ thì *k.v* cũng là vector riêng của A
- *Định lý 6*. Nếu $v_1, v_2, \ldots, v_k$ là *k* vector riêng ứng với *k* giá trị riêng phân biệt $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ của ma trận A, thì hệ vector U = $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ là hệ độc lập tuyến tính.
  - *Hệ quả 1*. Nếu *f* là một phép biến đổi tuyến tính trong không gian n chiều V thì *f* sẽ không có quá n giá trị riêng phân biệt.
  - *Hệ quả 2*. Nếu *f* là một phép biến đổi tuyến tính trong không gian n chiều V mà *f* có n giá trị riêng phân biệt thì các vector riêng ứng với các giá trị riêng này làm thành một cơ sở của không gian V.
  - *Hệ quả 3*. Mọi ma trận thực A cấp n có đúng n giá trị riêng khác nhau đều đồng dạng với ma trận đường cháo, mà các phần tử trên đường chéo là các giá trị riêng của ma trận A.

CHƯƠNG 3
Bài IV. Vector riêng – Giá trị riêng

4.5 Chéo hóa ma trận

Đặt vấn đề. Do các ma trận chéo có dạng đơn giản và thuận lợi khi tính toán, người ta mong muốn đưa các ma trận của các phép biến đổi tuyến tính về dạng chéo, đồng dạng với ma trận ban đầu, tức là cùng biểu diễn các phép biến đổi tuyến tính.

- *Định nghĩa 10.*
- Cho A là ma trận vuông cấp n, nếu tồn tại một ma trận đường chéo B cùng cấp và đồng dạng với A thì ta nói A là *ma trận chéo hóa được.*
- Ma trận khả nghich P gọi là *ma trận làm chéo hóa A*, nếu có $B = P^{-1}.A.P$
- *Định lý 7*. Ma trận A cấp n là chéo hóa được khi và chỉ khi A có n vector riêng độc lập tuyến tính.
- *Hệ quả 1*: Nếu ma trận A có n giá trị riêng phân biệt thì A chéo hóa được.
- *Hệ quả 2:* Ma trận làm chéo hóa A là ma trận P có các cột là các tọa độ cột của n vector riêng độc lập tuyến tính.

4.5 Chéo hóa ma trận

Tóm tắt các bước chéo hóa ma trận vuông A cấp n.

- *Bước 1*. Tìm các giá trị riêng của ma trận A, giả sử là $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \dots$

- Nếu A có đủ n giá trị riêng thực phân biệt thì chắc chắn A chéo hóa được, dạng chéo của A là ma trận chéo B với các phần tử trên đường chéo $b_{ii} = \lambda_i$
- Nếu A không có đủ n giá trị riêng phân biệt (phương trình đặc trưng có nghiệm bội) thì chuyển sang bước 2

- *Bước 2*. Tìm tất cả các vector riêng độc lập tuyến tính ứng với các giá trị riêng, nếu có đủ n vector riêng độc lập tuyến tính thì kết luận A là chéo hóa được.
- *Bước 3*. Ma trận làm chéo A, là ma trận $P = (p_{ij})_{n \times n}$ với các cột là tọa độ cột của các vector riêng độc lập tuyến tính, $v_j = (p_{1j}, p_{2j}, \dots, p_{nj})$, $j = 1, 2, \dots, n$
- *Bước 4*. Dạng chéo của A là ma trận chéo B, xác định bởi công thức:

$$B = P^{-1}.A.P$$

4.5 Chéo hóa ma trận

Các thí dụ

- *Thí dụ 17.* Cho Ma trận A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

1/. Ma trận A có chéo hóa được không, nếu A chéo hóa được hày tìm ma trận P làm chéo hóa A

2/. Tìm dạng chéo của ma trận A

- *Thí dụ 18*. Hãy chéo hóa ma trận A = $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$