PHẦN I: ĐỀ CƯƠNG CHI TIẾT HỌC PHẦN

TOÁN RỜI RẠC (Discrete mathematics)

I. Thông tin về học phần

- Mã học phần: PTH02014
- Số tín chỉ: 3 (3 – 0 – 6)
- Giờ tín chỉ đối với các hoạt động học tập:
  + Nghe giảng lý thuyết trên lớp: 28
  + Làm bài tập trên lớp: 14
  + Thảo luận trên lớp: 3
  + Thực hành trong phòng thí nghiệm: 0
  + Thực tập thực tế ngoài trường: 0
  + Tự học: 90
- Đơn vị phụ trách học phần:
  - Bộ môn: Toán – tin ứng dụng
  - Khoa: Công nghệ thông tin
- Là học phần: bắt buộc
- Thuộc khối kiến thức: cơ sở ngành
- Học phần học trước: Đại số tuyến tính

II. Thông tin về người viết bài giảng

1. Họ và tên: **PGS.TS Nguyễn Văn Định**
2. Họ và tên: **Nguyễn Thị Thúy Hạnh**
   -- Chức danh, học hàm, học vị: Thạc sĩ
   - Địa chỉ liên hệ: Bộ môn Toán – tin ứng dụng, Khoa CNTT, Học viện Nông nghiệp Việt Nam.
   - Điện thoại: 0915674502. Email: ntthuyhanh@vnua.edu.vn

III. Mục tiêu học phần

- ***Về kiến thức:***
  - Người học trình bày lại được các nguyên lý của bài toán đếm.

- Trình bày lại được các khái niệm cơ bản về đồ thị, các đồ thị đặc biệt như: Đồ thị phân đôi, Đồ thị Euler, Đồ thị Hamilton, Đồ thị phẳng và các thuật toán để nhận biết chúng; Cây cùng các ứng dụng đặc biệt của đồ thị này.
- Trình bày lại được các bài toán ứng dụng quan trọng của lý thuyết đồ thị như: Bài toán cây khung nhỏ nhất, Bài toán đường đi ngắn nhất, Bài toán luồng cực đại, Bài toán du lịch … và những thuật toán để giải quyết chúng.
- Nhận diện được các khái niệm cơ bản về toán logic và biết dịch các câu thông thường thành các biểu thức logic để có thể sử dụng các biểu thức này trong việc lập trình logic và trí tuệ nhân tạo.

- ***Về kỹ năng:***
    - Người học biết vận dụng các nguyên lý của bài toán đếm để tìm số lượng hoặc liệt kê một cấu hình tổ hợp nào đó.
    - Biết vận dụng các thuật toán đưa ra để giải quyết một số bài toán ứng dụng quan trọng của Lý thuyết đồ thị, nâng cao tư duy toán và tư duy thuật toán trong việc giải quyết các vấn đề thực tế.

- ***Về năng lực tự chủ và trách nhiệm:***
    - Hình thành năng lực tự học, tự nghiên cứu và sáng tạo trong phạm trù công nghệ thông tin nói riêng và trong cuộc sống nói chung.

IV. Cấu trúc nội dung học phần

STT	**Chương**	**Chủ đề**	**Số bài học**	**Mục tiêu cụ thể**	**Phương pháp giảng dạy**	**Mối quan hệ với các HP có liên quan và chủ đề của HP**
1	Bài toán đếm	Bài toán đếm	1	Người học biết vận dụng các nguyên lý của bài toán đếm để tìm số lượng một cấu hình tổ hợp nào đó.	Thuyết trình – giải thích – minh họa – vấn đáp	
		Bài toán liệt kê	1	Người học biết ứng dụng phương pháp sinh phần tử kế tiếp, phương pháp quay lui để liệt kê tất cả các cấu hình cần đếm hoặc các cấu hình thỏa	Thuyết trình – giải thích – minh họa – vấn đáp	

				mãn thêm một hoặc một số điều kiện nào đó.		
2	Các khái niệm cơ bản về đồ thị	Biểu diễn hình học và một số dạng đồ thị đăc biệt	1	Người học xác định được một số dạng đồ thị như đồ thị đầy đủ K_n, đồ thị vòng C_n, ...	Thuyết trình – giải thích – minh họa – vấn đáp	
		Biểu diễn dạng đại số của đồ thị. Sự đẳng cấu giữa các đồ thị	1	Người học xác định và trình bày lại được các cách biểu diễn đồ thị trên máy tính. Nhận diện được hai đồ thị cho trước có đẳng cấu hay không.	Thuyết trình – giải thích – minh họa – vấn đáp	
		Tính liên thông trong đồ thị	1	Người học xác định và nhận diện được đường đi, chu trình, đồ thị con, đồ thị bộ phận, đồ thị liên thông, đỉnh cắt, cạnh cắt.	Thuyết trình – giải thích – minh họa – vấn đáp	
		Các số đặc trưng của đồ thị	2	Người học xác định được số ổn định trong, số ổn định ngoài, nhân và sắc số của đồ thị. Ứng dụng sắc số vào bài toán lập lịch thi và tô màu bản đồ.	Thuyết trình – giải thích – minh họa – vấn đáp	
3	Đồ thị Euler, đồ thị Hamilton, đồ thị phẳng	Đồ thị Euler. Đồ thị nửa Euler	1	Người học xác định và nhận diện được đồ thị Euler, nửa Euler. Ứng dụng được đồ thị Euler vào để giải bài toán người đưa thư Trung Hoa.	Thuyết trình – giải thích – minh họa – vấn đáp	
		Đồ thị Hamilton. Đồ thị nửa Hamilton	1	Người học xác định và nhận diện được đồ thị Hamilton, nửa Hamilton. Ứng dụng được đồ thị Hamilton vào để giải bài toán sắp xếp chỗ ngồi.	Thuyết trình – giải thích – minh họa – vấn đáp	
		Đồ thị phẳng. Đồ thị phân đôi.	1	Người học xác định và nhận diện được đồ thị phẳng, cũng như đồ thị không phẳng. Đặc biệt, biết sử dụng thuật toán nhận biết đồ thị phân đôi để	Thuyết trình – giải thích – minh họa – vấn đáp	

				nhận diện đồ thị phân đôi.		
4	Cây và các ứng dụng của cây	Cây và các tính chất cơ bản của cây. Ứng dụng cây trong việc mã hóa thông tin	2	Người học xác định và trình bày lại được các tính chất cơ bản của cây, cây m – phân. Trình bày lại được các phép duyệt cây nhị phân. Nhận diện được mã tiền tố và ứng dụng cây để tìm mã tiền tố tối ưu.	Thuyết trình – giải thích – minh họa – vấn đáp	
		Cây khung của đồ thị. Cây khung nhỏ nhất	2	Người học xác định được cây khung và cây khung nhỏ nhất của đồ thị.	Thuyết trình – giải thích – minh họa – vấn đáp	
5	Một số bài toán tối ưu trên đồ thị	Đường đi ngắn nhất trên đồ thị	1	Người học xác định được đường đi ngắn nhất trên đồ thị, tâm và bán kính của đồ thị.	Thuyết trình – giải thích – minh họa – vấn đáp	
		Mạng và luồng	1	Người học xác định được luồng cực đại và lát cắt hẹp nhất của một mạng G cho trước.	Thuyết trình – giải thích – minh họa – vấn đáp	
		Bài toán du lịch	1	Người học xác định được hành trình theo thứ tự như thế nào để chi phí là nhỏ nhất trong Bài toán du lịch.	Thuyết trình – giải thích – minh họa – vấn đáp	
6	Đại cương về toán logic	Logic mệnh đề	1	Người học tóm tắt được các phép toán trên mệnh đề sơ cấp; nhận diện được công thức đồng nhất đúng, công thức đồng nhất sai. Người học biết vận dụng các quy tắc suy diễn để xác định một suy luận là ĐÚNG hay SAI, cũng như để chứng minh một mệnh đề hằng đúng.	Thuyết trình – giải thích – minh họa – vấn đáp	
		Logic vị từ	1	Người học xác định được giá	Thuyết	

				trị chân lý của một công thức có chứa lượng từ "với mọi" và "tồn tại" ; nắm được ý nghĩa của lượng từ đối với vị từ hai ngôi. Người học xác định được phủ định của các mệnh đề lượng từ hóa và biết dịch các câu thông thường thành các biểu thức logic để có thể sử dụng các biểu thức này trong việc lập trình logic và trí tuệ nhân tạo.	trình – giải thích – minh họa – vấn đáp	

Thảo luận:

Nội dung: Một số bài toán tối ưu trên đồ thị.

Yêu cầu: Người học vận dụng một số bài toán tối ưu trên đồ thị vào các bài toán thực tế.

V. Tài liệu học tập

Giáo trình: *Vũ Kim Thành*, Toán rời rạc, NXB Đại học Sư phạm, 2008.

Tài liệu tham khảo:

- *Nguyễn Hữu Anh*, Toán rời rạc, NXB giáo dục, 2000.
- *Đỗ Đức Giáo*, Toán rời rạc, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2008.
- *Hoàng Chí Thành*, Đồ thị và các thuật toán, NXB giáo dục, 2007.
- *Nguyễn Đức Nghĩa – Nguyễn Tô Thành*, Toán rời rạc, NXB Đại học quốc gia Hà Nội, 2003.
- *Kenneth H. Rosen*, Toán rời rạc (Bản dịch tiếng Việt của Phạm Văn Thiều – Đặng Hữu Thịnh), Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ Thuật Hà Nội.

VI. Yêu cầu của giảng viên

Giảng đường: Có máy chiếu, mic.

Đối với sinh viên:

- Dự lớp: Tối thiểu 80% số tiết lý thuyết là điều kiện để tham gia thi kết thúc học phần
- Thảo luận: Tích cực tham gia thảo luận nhóm và thảo luận trên lớp
- Thi cuối học kỳ: Sinh viên sẽ được dự thi kết thúc học phần nếu đạt các yêu cầu về dự lớp. Hình thức thi: Tự luận trong 90 phút.

VII. Tiêu chuẩn đánh giá

- Dự lớp: 0,1
- Kiểm tra giữa kỳ: 0,3
- Thi hết học phần: 0,6

Điểm của học phần tính theo thang điểm 10.

VIII. Hình thức tổ chức dạy học

Lịch trình chung: (ghi tổng số giờ tín chỉ cho mỗi cột)

Nội dung	Hình thức tổ chức dạy học					Tổng
	Lên lớp			Thực hành, thí nghiệm	Tự học, tự nghiên cứu	
	Lý thuyết	Bài tập	Thảo luận			
Chương 1	4	2			12	18
Chương 2	6	3			18	27
Chương 3	4	2			12	18
Chương 4	4	2			12	18
Chương 5	6	3	3		24	36
Chương 6	4	2			12	18
Tổng	**28**	**14**	**3**		**90**	**135**

PHẦN II. NỘI DUNG BÀI GIẢNG HỌC PHẦN

Chương 1.

BÀI TOÁN ĐẾM.

Mục tiêu: Người học biết vận dụng các nguyên lý của bài toán đếm để tìm số lượng một cấu hình tổ hợp nào đó. Người học biết ứng dụng phương pháp sinh phần tử kế tiếp, phương pháp quay lui để liệt kê tất cả các cấu hình cần đếm hoặc các cấu hình thỏa mãn thêm một hoặc một số điều kiện nào đó.

1.1 BÀI TOÁN ĐẾM

1.1.1 Nguyên lý cộng, nguyên lý nhân, nguyên lý bù trừ

Kí hiệu: *N(X) là số phần tử của tập hợp X*

Nguyên lý cộng:

Nếu $A \cap B = \emptyset$ thì $\boxed{N(A \cup B) = N(A) + N(B)}$. Đặc biệt $A \cup \bar{A} = X$ thì $N(A) = N(X) - N(\bar{A})$.

Nếu $\begin{cases} X = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m \\ A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i \neq j;\ i,j = \overline{1,m}) \end{cases}$ thì $\boxed{N(X) = N(A_1) + N(A_2) + \ldots + N(A_m)}$.

Nguyên lý nhân: $\boxed{N(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m) = N(A_1) \times N(A_2) \times \ldots \times N(A_m)}$.

Nguyên lý bù trừ: $\boxed{N(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) = N_1 - N_2 + \cdots + (-1)^{m-1} N_m}$.

với $N_k = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le m} N\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right)$ là số các phần tử thuộc về ít nhất *k* tập hợp khác nhau lấy từ *m* tập đã cho.

Ví dụ 1: Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài 6 bit?

Giải.

Đặt A = {0;1}. Mỗi xâu nhị phân độ dài 6 được coi là một phần tử của tích Đề-cac $A^6 = A \times A \times \ldots \times A$. *Do vậy số xâu nhị phân độ dài 6 =* $N(A^6) = 2^6 = 64$.

Ví dụ 2: Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài 10 bắt đầu 00 hoặc kết thúc 11?

Giải.

Gọi A_0 = Tập hợp tất cả các xâu nhị phân có độ dài 10 bắt đầu bằng 00,

A_1 = Tập hợp tất cả các xâu nhị phân có độ dài 10 kết thúc bằng 11.

⇨ *A_0A_1 = Tập hợp tất cả các xâu nhị phân có độ dài 10 bắt đầu bằng 00 và kết thúc bằng 11.*

Vậy số xâu nhị phân thỏa mãn yêu cầu bài toán là $N(A_0 \cup A_1) = N(A_0) + N(A_1) - N(A_0A_1) =$

$$= 2^8 + 2^8 - 2^6 = 448$$

<u>Ví dụ 3:</u> Từ 1 đến 1000 có bao nhiêu số không chia hết cho bất cứ số nào trong các số 3, 5, 7?

Giải.

Gọi A_3 = Tập tất cả các số từ 1 đến 1000 mà chia hết cho 3.

A_5 = Tập tất cả các số từ 1 đến 1000 mà chia hết cho 5.

A_7 = Tập tất cả các số từ 1 đến 1000 mà chia hết cho 7.

Số các số thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $N(\overline{A_3 \cup A_5 \cup A_7}) = 1000 - N(A_3 \cup A_5 \cup A_7)$.

$$N(A_3 \cup A_5 \cup A_7) = N(A_3) + N(A_5) + N(A_7) - N(A_3A_5) - N(A_5A_7) - N(A_3A_7) + N(A_3A_5A_7)$$

$$= \left[\frac{1000}{3}\right] + \left[\frac{1000}{5}\right] + \left[\frac{1000}{7}\right] - \left[\frac{1000}{15}\right] - \left[\frac{1000}{35}\right] - \left[\frac{1000}{21}\right] + \left[\frac{1000}{105}\right]$$

$$= 333 + 200 + 142 - 66 - 28 - 47 + 9 = 543$$

Vậy số các số thỏa mãn bài toán là : 1000 – 543 = 457 (số).

1.1.2 Chỉnh hợp – hoán vị - tổ hợp

Chỉnh hợp: Một chỉnh hợp chập *k* của *n* phần tử là một bộ có thứ tự gồm *k* phần tử khác nhau lấy từ *n* phần tử đã cho ($k \le n$).

Số chỉnh hợp chập *k* của *n* phần tử là $\boxed{A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}}$

Hoán vị: Một hoán vị của *n* phần tử là một cách sắp xếp có thứ tự *n* phần tử đó

Số hoán vị của *n* phần tử là $\boxed{P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)\dots 2.1 = n!}$

Tổ hợp: Một tổ hợp chập *k* của *n* phần tử là một cách chọn ra một tập con gồm *k* phần tử khác nhau không phân biệt thứ tự từ *n* phần tử đã cho (*k* <= *n*).

$$\boxed{C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}}$$

Số tổ hợp chập *k* của *n* phần tử là

Chú ý: $C_n^0 = 1;\ C_n^1 = n;$

$C_n^k = C_n^{n-k};$

$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n;$

$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \cdots + (-1)^n C_n^n = 0.$

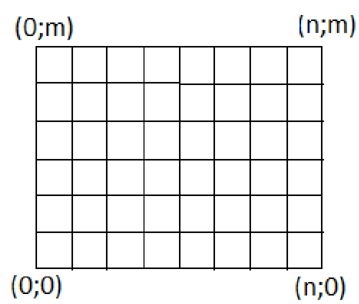
<u>*Ví dụ 1:*</u> *Cho tập A có 10 phần tử.*

(1) Tập hợp A có bao nhiêu tập con khác nhau?
(2) Có bao nhiêu tập con của A có số phần tử lẻ?

Giải.

(1) Số tập con của A là $C_{10}^0 + C_{10}^1 + \cdots + C_{10}^{10} = 2^{10} = 1024.$
(2) Số tập con của A có số phần tử lẻ là $C_{10}^1 + C_{10}^3 + \cdots + C_{10}^9 = C_{10}^0 + C_{10}^2 + \cdots + C_{10}^{10} = \frac{1}{2}(C_{10}^0 + C_{10}^1 + \cdots + C_{10}^{10}) = 2^9 = 512.$

<u>*Ví dụ 2:*</u> *Cho một lưới gồm các ô vuông. Các nút được đánh số từ 0 đến n theo hàng ngang từ trái qua phải và từ 0 đến m theo hàng dọc từ dưới lên trên. Hỏi có bao nhiêu cách đi khác nhau từ nút (0,0) đến nút (n,m) nếu chỉ cho phép đi trên các cạnh ô vuông theo chiều ngang từ trái sang phải và theo chiều dọc từ dưới lên trên.*



Giải.
Một đường đi như vậy có thể coi gồm n+m bước, mỗi bước đi sẽ nhận một trong hai giá trị là 0 nếu đi sang ngang từ trái qua phải hoặc là 1 nếu đi từ dưới lên trên. Như vậy mỗi đường đi sẽ tương ứng với một và chỉ một xâu nhị phân có độ dài n+m trong đó có đúng n bít 0 và m bít 1. Vậy số đường đi là C_{n+m}^m.

<u>*Ví dụ 3:*</u> *Có bao nhiêu cách lấy ra k phần tử trong n phần tử xếp trên một đường thẳng sao cho không có hai phần tử kề nhau nào được lấy ra.*

Giải.

Khi lấy ra k phần tử, ta còn lại n – k phần tử. Giữa n – k phần tử này có n – k + 1 khoảng trống, kể cả hai đầu, ứng với các khả năng vị trí của k phần tử được lấy ra. Mỗi cách lấy k phần tử theo yêu cầu bài toán tương ứng với một cách chọn ra k khoảng trống trong n – k +1 khoảng trống này. Vậy số cách lấy là C_{n-k+1}^{k} .

<u>*Ví dụ 4:*</u> *Như ví dụ 3 nhưng k phần tử nằm trên một đường tròn.*

Giải.

Cố định một phần tử A nào đó trong n phần tử. Chia cách lấy ra làm 2 nhóm: Nhóm các cách có chọn phần tử A và nhóm các cách không chọn phần tử A.

- *Nếu A được chọn thì hai phần tử kề A không được chọn và chỉ cần lấy k -1 phần tử từ n – 3 phần tử còn lại, các phần tử này được coi như xếp trên đường thẳng. Theo Ví dụ 3 ở trên, số cách thuộc nhóm này là* C_{n-k-1}^{k-1}.
- *Nếu không chọn A, thì bỏ đi phần tử A, ta phải lấy k phần tử từ n – 1 phần tử cũng đươc coi như xếp trên đường thẳng. Số cách thuộc nhóm này là* C_{n-k}^{k}. *Theo nguyên lý cộng, số cách cần tìm là* $C_{n-k-1}^{k-1} + C_{n-k}^{k}$.

1.1.3 Chỉnh hợp lặp - Tổ hợp lặp

Chỉnh hợp lặp: Một chỉnh hợp lặp chập *k* của *n* phần tử là một bộ sắp thứ tự *k* phần tử lấy từ *n* phần tử đã cho, trong đó mỗi phần tử có thể lấy nhiều lần (có thể *k* > *n*).

Số chỉnh hợp lặp chập *k* của *n* phần tử là $\boxed{\bar{A}_n^k = n^k}$

Tổ hợp lặp: Một tổ hợp lặp chập *k* của *n* phần tử là một cách chọn ra *k* phần tử không phân biệt thứ tự lấy từ *n* phần tử đã cho, trong đó mỗi phần tử có thể được lấy nhiều lần (có thể *k* > *n*).

Số tổ hợp lặp chập *k* của *n* phần tử là $\boxed{\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k}$

<u>*Ví dụ 1:*</u> *Số tổ hợp lặp chập 3 của 2 phần tử {a ; b} là* $\bar{C}_2^3 = C_4^3 = 4$. *Đó là {a;a;a} ; {a;a;b} ; {a;b;b} ; {b;b;b}.*

<u>*Ví dụ 2:*</u> *Tìm số nghiệm nguyên không âm của PT x + y + z = 6 (1).*

Giải.

Mỗi nghiệm nguyên không âm của PT(1) tương ứng với một và chỉ một tổ hợp lặp chập chập 6 của 3 phần tử x, y, z. Chẳng hạn nghiệm (x = 1, y = 2, z = 3) ⇔ tổ hợp lặp {x,y,y,z,z,z}.

Vậy số nghiệm nguyên không âm của PT(1) = $\bar{C}_3^6 = C_8^6 = 28$.

<u>Ví dụ 3:</u> Tìm số nghiệm nguyên của PT x +y +z +t =15 (2) thỏa mãn $x \geq 1, y \geq 2, z \geq 3, t \geq 4$ *(*).*

Giải.

Viết lại PT(2) ⇔ (x – 1) + (y – 2) + (z – 3) + (t – 4) = 5.

Từ đó suy ra, số nghiệm nguyên của PT(2) thỏa mãn (*) bằng số nghiệm nguyên không âm của PT(2') : x' + y' + z' + t' = 5   (2')

Vậy số nghiệm của PT(2) thỏa mãn (*) là $\bar{C}_4^5 = C_8^5 = 56$

1.1.4 Định nghĩa bằng đệ quy và hệ thức truy hồi

Khái niệm định nghĩa bằng đệ quy: Kỹ thuật xác định một đối tượng thông qua chính nó gọi là định nghĩa bằng đệ quy.

<u>Ví dụ 1:</u> Ta có thể định nghĩa một hàm số f xác định trên tập các số nguyên không âm như sau:

$f(0) = 1; f(n+1) = 3f(n) + 2 \ (n \geq 0)$.

Bảng giá trị của hàm f là:

n	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	....
f(n)	*1*	*5*	*17*	*53*	*161*	....

<u>Ví dụ 2:</u> Định nghĩa bằng đệ quy của dãy số Fibonacci. Cho dãy số $f_0, f_1, f_2, \ldots$ *xác định như sau:*

$f_0 = 0; f_1 = 1; f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \ (\forall n \geq 2)$.

Các số hạng tiếp theo của dãy số là: 0; 1; 1; 2; 3; 5; 8; ...

Định nghĩa hệ thức truy hồi:

(i) *Hệ thức truy hồi* (hay còn gọi là *công thức truy hồi, biểu thức truy hồi*) đối với dãy số $\{a_n\}$ là công thức biểu diễn a_n qua một hay nhiều số hạng đi trước của dãy, cụ thể là biểu diễn qua các số hạng $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ với mọi *n* nguyên, $n \geq n_0$, trong đó n_0 là nguyên không âm.

(ii) Cho dãy số $\{a_k, k \in \mathbb{N}\}$. Một *hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc k* với hệ số hằng là một hệ thức truy hồi có dạng $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k}$ (*) trong đó $c_1, c_2, \ldots, c_k$ là các số thực và $c_k \neq 0$.

(iii) Phương trình $r^k = c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} + \ldots + c_k$ được gọi là *phương trình đặc trưng* (PTĐT) của công thức (*). Số *r* thỏa mãn PTĐT được gọi là một nghiệm đặc trưng của nó.

<u>Ví dụ 3:</u>

(1) *Trong định nghĩa đệ quy của dãy Fibonacci hệ thức $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ là hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc 2. PTĐT của hệ thức này $r^2 = r + 1$. Các điều kiện $f_0 = 0$; $f_1 = 1$ gọi là các điều kiện ban đầu của dãy Fibonacci.*

(2) *Hệ thức $a_n = 2a_{n-3}$ là hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc 3. PTĐT của hệ thức này là $r^3 = 2$.*

<u>Ví dụ 4:</u> Hệ thức $a_n = 3a_{n-2} + (a_{n-3})^2$ là không phải là hệ thức truy hồi tuyến tính.

Hệ thức $b_n = 2b_{n-1} + 3$ là không thuần nhất. Hệ thức $c_n = n.c_{n-2}$ không có hệ số là hằng số.

Mô hình hóa bằng hệ thức truy hồi.

<u>Ví dụ 5:</u> Bài toán lãi kép. Một người gửi tiết kiệm 100 triệu đồng tại một ngân hàng A với lãi suất 6,8% mỗi năm. Hết một năm, nếu không rút tiền ra người đó được cộng số lãi vào gốc và được tính lãi cho năm tiếp theo (lãi kép). Hỏi sau 10 năm gửi mà trước đó không rút ra một lần nào thì số tiền người đó rút được cả gốc lẫn lãi là bao nhiêu?

Giải.

Gọi P_n là tổng số tiền cả gốc và lãi của người đó sau n năm. Số tiền P_n bằng số tiền P_{n-1} của người đó có được sau n-1 năm cộng với lãi suất của năm thứ n.

Ta có $P_0 = 100$ (triệu); $P_1 = P_0 + 0{,}068P_0 = 1{,}068P_0$; ... ; $P_n = P_{n-1} + 0{,}068P_{n-1} = 1{,}068P_{n-1}$ (1).

Dùng phương pháp lặp ta tìm công thức tính P_n như sau. Dễ thấy rằng:

$P_2 = 1{,}068P_1 = 1{,}068^2P_0$.

$P_3 = 1{,}068P_2 = 1{,}068^3P_0$.

...

$P_n = 1{,}068.P_{n-1} = 1{,}068^n.P_0$.

Vậy sau 10 năm người đó rút được số tiền là $P_{10} = 1{,}068^{10}.100 = 193$ (triệu).

<u>Ví dụ 6:</u> Tìm công thức truy hồi tính số xâu nhị phân có độ dài n mà không có 2 bít 0 liên tiếp.

Giải.

Kí hiệu ω_n là một xâu nhị phân có độ dài n.Gọi a_n là số xâu nhị phân có độ dài n mà không có 2 bít 0 liên tiếp $(n \geq 1)$.

Với n = 1 thì có 2 xâu là 1; 0 => $a_1 = 2$.

Với n = 2 thì có các xâu là 11 ; 10 ; 01 => $a_2 = 3$.

Với $\forall n \geq 3$ thì xảy ra hai trường hợp :

TH1: Nếu bít đầu tiên bên trái của xâu ω_n là 1 thì ω_n phải có dạng $\omega_n = 1\omega_{n-1}$. Số xâu nhị phân độ dài n mà không có 2 bít 0 liên tiếp trong trường hợp 1 là a_{n-1}.

TH2: Nếu bít đầu tiên bên trái của xâu ω_n là 0 thì ω_n phải có dạng $\omega_n = 01\omega_{n-2}$. Số xâu nhị phân độ dài n mà không có 2 bít 0 liên tiếp trong trường hợp 2 là a_{n-2}.

Vậy với $\forall n \geq 3$ thì $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$; $a_1 = 2$ và $a_2 = 3$.

Giải các hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng

Định lý: Cho công thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc hai $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ *(*)* với c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$.

(i) Nếu PTĐT $r^2 = c_1 r + c_2$ có hai nghiệm thực phân biệt r_1, r_2 thì công thức tính trực tiếp a_n hay nghiệm của công thức (*) là $a_n = \propto_1 . r_1^n + \propto_2 . r_2^n$ trong đó $\propto_1, \propto_2$ là các hằng số được xác định nhờ các điều kiện ban đầu của công thức truy hồi.

(ii) Nếu PTĐT $r^2 = c_1 r + c_2$ có nghiệm kép $r_1 = r_2 = r_0$ thì công thức tính trực tiếp của a_n là $a_n = \propto_1 . r_0^n + \propto_2 . n. r_0^n$ trong đó $\propto_1, \propto_2$ là các hằng số được xác định nhờ các điều kiện ban đầu của công thức truy hồi.

<u>Ví dụ 7:</u> Tìm số xâu nhị phân có độ dài 10 mà không có 2 bít 0 liên tiếp.

Giải.

Theo ví dụ 2, gọi a_n là số xâu nhị phân có độ dài n mà không có 2 bít 0 liên tiếp, ta có công thức truy hồi: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ $(\forall n \geq 3)$; $a_1 = 2$ và $a_2 = 3$.

PTĐT là $r^2 = r + 1 \Leftrightarrow r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Công thức trực tiếp của a_n là: $a_n = k.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + m.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Từ $a_1 = 2$ và $a_2 = 3$ suy ra $\begin{cases} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)k + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)m = 2 \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 k + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 m = 3 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} + 1\right)k = 3 - 2.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\ \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} + 1\right)m = 3 - 2.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases}$

$\leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \\ m = \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \end{cases}$. *Vậy* $\boxed{a_n = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \forall n \geq 1.}$

Với n = 10 thì số xâu nhị phân có độ dài 10 mà không có hai bít 0 liên tiếp là: $a_{10} = 144$.

<u>Ví dụ 8:</u> Tìm nghiệm của các hệ thức truy hồi sau:

a) *$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ với $\forall n \geq 2$, điều kiện ban đầu $a_0 = 1$; $a_1 = 0$.*
b) *$a_n = 3a_{n-1} - 4a_{n-3}$ với $\forall n \geq 3$, điều kiện ban đầu $a_0 = 4$; $a_1 = 3$; $a_2 = 5$*

Giải.

a) *PTĐT: $r^2 = 2r - 1 \Leftrightarrow r_1 = r_2 = 1$.*
   Công thức nghiệm $a_n = k.1^n + m.n.1^n = k+m.n$
   Từ $a_0 = 1$; $a_1 = 0$ suy ra $\begin{cases} k + m.0 = 1 \\ k + m.1 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ m = -1 \end{cases}$.
   Vậy $\boxed{a_n = 1 - n, \forall n \geq 0}$
b) *PTĐT: $r^3 = 3r^2 - 4 \Leftrightarrow r^3 - 3r^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow r_1 = r_2 = 2$; $r_3 = -1$.*
   Công thức nghiệm $a_n = k.2^n + m.n.2^n + s.(-1)^n$.
   Từ $a_0 = 4$; $a_1 = 3$; $a_2 = 5$ suy ra $\begin{cases} k + m.0 + s = 4 \\ 2k + 2m - s = 3 \\ 4k + 8m + s = 5 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ m = -1 \\ s = 1 \end{cases}$.
   Vậy $\boxed{a_n = 3.2^n - n.2^n + (-1)^n, \forall n \geq 0}$

1.2 BÀI TOÁN LIỆT KÊ

Xét các ví dụ sau. *Ví dụ 1:* Một người du lịch cần đi tham quan ở 6 thành phố khác nhau, hãy tìm một hành trình đi qua các thành phố theo thứ tự nào để chi phí ít nhất. Một cách giải bài toán này là ta phải xác định chi phí đi lại cho mỗi một trong *6! = 720* thứ tự khác nhau đi qua 6 thành phố, sau đó chọn một hành trình có chi phí nhỏ nhất. *Ví dụ 2:* Một phòng làm việc có 15 nhân viên. Để thực hiện hiện một đề án cần 3 người và 8 kỹ năng (mỗi nhân viên có thể biết một hoặc nhiều trong 8 kỹ năng đó). Một cách tìm ra những nhóm 3 người thực hiện đề án đó là: liệt kê tất cả các tập con 3 người của tập hợp gồm 15 người và sau đó kiểm tra xem từng nhóm có thể thực hiện được 8 kỹ năng đã cho không.

Trong nhiều bài toán, nhiều khi ta cần chỉ ra (liệt kê) tất cả các hoán vị hay các cấu hình tổ hợp chứ không phải đếm số lượng của chúng. Việc liệt kê các cấu hình cần phải thỏa mãn các nguyên tắc sau:

(1) Không được lặp lại một cấu hình đã đếm.
(2) Không được để sót một cấu hình nào.

1.2.1 Phương pháp sinh phần tử kế tiếp

Phương pháp sinh có thể áp dụng để giải bài toán liệt kê tổ hợp nếu hai điều kiện sau được thỏa mãn:

(1) Có thể *xác định được một thứ tự* trên tập các cấu hình tổ hợp cần liệt kê. Từ đó xác định được cấu hình đầu tiên và cấu hình cuối cùng theo thứ tự đó.
(2) Có thể *xây dựng được thuật toán*: từ cấu hình đang xét, chưa phải là cuối cùng, đưa ra cấu hình kế tiếp.

Bài toán 1: Liệt kê tất cả các xâu nhị phân có độ dài n.

Giải.

Vì mỗi xâu nhị phân b có độ dài n có thể coi là biểu diễn nhị phân của một số nguyên dương $p(b)$ nào đó. Do vậy, trong tập tất cả các xâu nhị phân có độ dài n, ta có thể xác định thứ tự như sau: Dãy $b = b_1b_2...b_n$ đứng trước $b'=b'_1b'_2...b'_n$ nếu số nguyên $p(b) < p(b')$.

Theo thứ tự này (gọi là thứ tự tự nhiên hay thứ tự từ điển), xâu nhị phân đầu tiên là *00…0,* xâu cuối cùng là *11…1* và hai xâu liền kề nhau hơn kém nhau *1* đơn vị theo hệ cơ số *2* có nhớ, tức là xâu liền sau = xâu liền trước cộng *1* theo hệ cơ số *2* có nhớ.

Thuật toán sinh xâu nhị phân kế tiếp $b = b_1b_2...b_n$ (b khác *11…1*) được mô tả như sau:

(1) Tìm từ phải qua trái, chỉ số i đầu tiên mà bít $b_i = 0$.
(2) Gán lại $b_i = 1$ và các bít ở bên phải b_i gán $= 0$ (tức là $b_j = 0$ với mọi $j > i$) ta được xâu cần tìm.

Ví dụ 1: Liệt kê tất cả các xâu nhị phân có độ dài 3 theo thứ tự tự nhiên.

Giải.

Áp dụng thuật toán sinh phần tử kế tiếp, theo thứ tự tự nhiên, tất cả các xâu nhị phân có độ dài 3 là: 000; 001; 010; 011; 100; 101; 110; 111 (có $2^3 = 8$ *xâu).*

Ví dụ 2: Theo thứ tự tự nhiên, dãy nhị phân có độ dài 10 kế tiếp dãy 1011010111 là: 1011011000.

Bài toán 2: Liệt kê tất cả các tập con có m phần tử của tập X gồm n phần tử được đánh số từ 1 đến n.

Giải.

Mỗi tập con m phần tử của X được coi là một bộ có thứ tự m thành phần $a = (a_1, a_2, ..., a_m)$ thỏa mãn $1 \le a_1 < a_2 < ... < a_m \le n$. Trong tập tất cả các tập con m phần tử của tập X ta xác định thứ tự như sau: Tập con $a = (a_1, a_2, ..., a_m)$ đứng trước tập con $a' = (a'_1, a'_2, ..., a'_m)$ nếu tồn tại chỉ số k $(1 \le k \le m)$ sao cho: $a_1 = a'_1$; $a_2 = a'_2$; ...; $a_{k-1} = a'_{k-1}$; $a_k < a'_k$ (hay xét từ trái qua phải, bỏ qua các phần tử bằng nhau, tập con nào có phần tử đầu tiên bé hơn thì đứng trước).

Theo thứ tự này, tập con đầu tiên là $\{1, 2, ..., m\}$, tập con cuối cùng là $\{n-m+1, n-m+2, ..., n\}$.

Thuật toán sinh phần tử kế tiếp tập $a = (a_1, a_2, ..., a_m)$, với $(a_1, a_2, ..., a_m) \neq c = \{n - m+1, n - m+2, ..., n\}$, được mô tả như sau:

(1) Tìm từ phải qua trái, chỉ số i đầu tiên mà $a_i < c_i$ (với $c_i = n - m + i$; a_i gọi là **phần tử tăng**).
(2) Thay a_i , a_{i+1}, ..., a_m lần lượt bởi $a_i + 1, (a_i + 1) + 1, ..., (a_i + 1) + m - i$.

Ví dụ 1: Liệt kê tất cả các tập con có 3 phần tử của tập $X = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Giải.

Các tập con có 3 phần tử của X là {1;2;3}, {1;2;4}, {1;2;5}, {1;3;4}, {1;3;5}, {1;4;5}, {2;3;4}, {2;3;5}, {2;4;5}, {3;4;5}. (Có $C_3^5 = 10$ tổ hợp).

Ví dụ 2: Trong tất cả các tập con có 4 phần tử của tập {1; 2; ...; 10}, theo thứ tự tự nhiên tập con kế tiếp tập {3; 6; 7; 10} là : {3; 6; 8; 9}.

Bài toán 3: Liệt kê các hoán vị của n phần tử được đánh số từ 1 đến n.

Giải.

Thứ tự của các hoán vị xác định như bài toán 2. Theo thứ tự này, hoán vị đầu tiên là $\{1, 2, ...,n\}$ và hoán vị cuối cùng là $\{n, n-1, n-2, ..., 1\}$.

Thuật toán sinh hoán vị kế tiếp của hoán vị $a = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, $a \neq \{n, n-1, n-2, ..., 1\}$ được mô tả như sau:

(1) Tìm từ phải qua trái chỉ số j đầu tiên thỏa mãn $a_j < a_{j+1}$. (a_j gọi là **phần tử hoán đổi**)
(2) Tìm phần tử a_k nhỏ nhất trong các số ở bên phải a_j mà lớn hơn a_j.
(3) Đổi chỗ a_j và a_k, sau đó thay đoạn $a_{j+1}, ..., a_n$ bằng hoán vị đầu tiên của $n - j$ phần tử này (tức sắp xếp lại $n - j$ phần tử bên phải theo thứ tự tăng dần).

<u>Ví dụ 1:</u> Liệt kê tất cả các hoán vị của 4 phần tử {1; 2; 3; 4}.

Giải. Các hoán vị của 4 phần tử đã cho là

{1;2;3;4}, {1;2;4;3}, {1;3;2;4}, {1;3;4;2}, {1;4;2;3}. {1;4;3;2},

{2;1;3;4}, {2;1;4;3}, {2;3;1;4}, {2;3;4;1}, {2;4;1;3}, {2;4;3;1},

{3;1;2;4}, {3;1;4;2}, {3;2;1;4}, {3;2;4;1}, {3;4;1;2}, {3;4;2;1},

{4;1;2;3}, {4;1;3;2}, {4;2;1;3}, {4;2;3;1}, {4;3;1;2}, {4;3;2;1}. (Có 4! = 24 hoán vị)

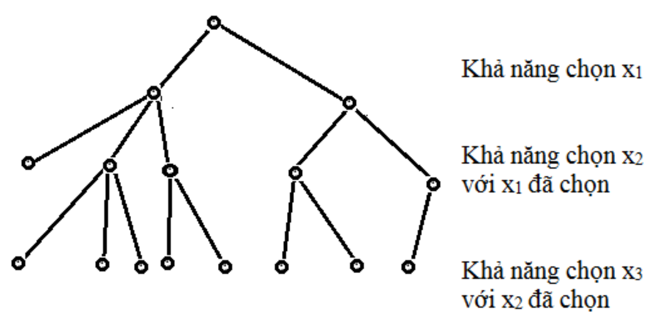
<u>Ví dụ 2:</u> Trong tất cả các hoán vị của tập X = {1; 2; ...;10}, theo thứ tự tự nhiên hoán vị kế tiếp hoán vị {3; 6; 7; 10; 9; 8; 5; 4; 2; 1} là : {3; 6; 8; 1; 2; 4; 5; 7; 9; 10}.

1.2.2 Phương pháp quay lui

Nội dung của thuật toán này là tìm dần các thành phần của cấu hình bằng cách thử tất cả các khả năng. Giả thiết cấu hình cần tìm được mô tả bằng một bộ gồm n thành phần $x_1, x_2, ..., x_n$ và đã tìm được $k-1$ thành phần $x_1, x_2, ..., x_{k-1}$. Thành phần x_k tiếp theo của cấu hình được xác định theo cách sau:

(1) Gọi T_k là tập tất cả các khả năng mà x_k có thể nhận được.
(2) Thử lần lượt tất cả các phần tử x_j thuộc T_k. Nếu chấp nhận x_j tức là x_k đã tìm được thì tiếp tục tìm x_{k+1}. Nếu không chấp nhận mọi x_j, tức là không tìm được x_k thì quay lại bước trước để xác định lại x_{k-1}.

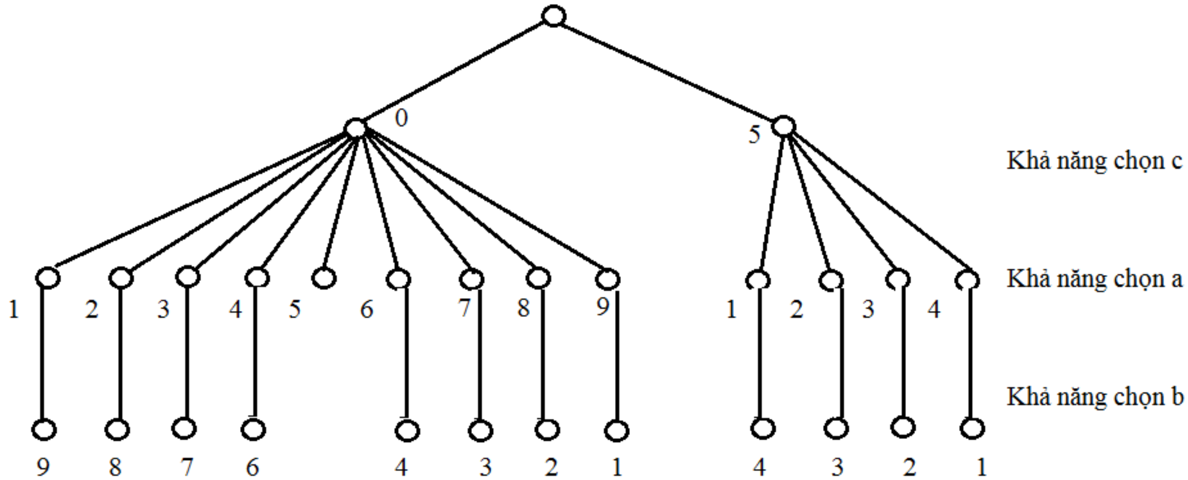
Phương pháp quay lui có thể được mô tả bằng cây tìm kiếm với n mức tương ứng với n thành phần của cấu hình. Mỗi đường đi từ gốc đến đỉnh mức n là một cấu hình cần tìm.



Hình 1.1. Cây liệt kê lời giải cho thuật toán quay lui.

<u>Ví dụ 1:</u> Liệt kê tất cả các số có ba chữ số khác nhau chia hết cho 5, tổng ba chữ số của nó bằng 10.

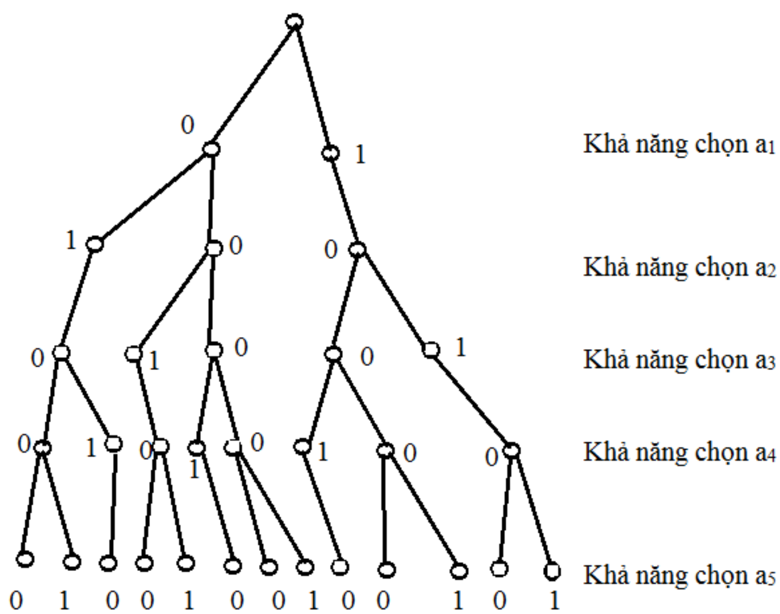
Giải. Gọi số cần lập là $\overline{abc}$.
Ta có $a \in \{1; 2; \ldots; 9\}; b \in \{0; 1; 2; \ldots; 9\}; c \in \{0; 5\};\ a \neq b \neq c;\ a + b + c = 10.$
Cây liệt kê lời giải :



Hình 1.2. Cây liệt kê các số có 3 chữ số khác nhau, chia hết cho 5 và có tổng các chữ số bằng 10.

Vậy có tất cả 12 số thỏa mãn yêu cầu bài toán. Đó là: 190; 280; 370; 460; 640; 730; 820; 910; 145; 235; 325; 415.

<u>Ví dụ 2:</u> Liệt kê tất cả các xâu nhị phân có độ dài 5 mà không có hai bít 1 đứng liền nhau.
Giải.
Gọi xâu nhị phân độ dài 5 có dạng $a_1a_2a_3a_4a_5$. Cây liệt kê lời giải như sau:



Hình 1.3. Cây liệt kê các xâu nhị phân độ dài 5 mà không có hai bít 1 đứng liền nhau.

Vậy có tất cả 13 xâu thỏa mãn bài toán. Đó là: 01000; 01001; 01010; 00100; 00101; 00010; 00000; 00001; 10010; 10000; 100001; 10100; 10101.

BÀI TẬP CHƯƠNG 1.

1.1. Có 15 hộp bánh được xếp vào 3 thùng hàng chưa đầy, thùng 1 có thể xếp thêm tối đa 5 hộp, thùng 2 có thể xếp thêm 10 hộp và thùng 3 có thể xếp thêm 7 hộp. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 15 hộp bánh vào 3 thùng hàng đó?

1.2. Mỗi biển đăng kí xe máy tại Hà Nội có dạng *VV-C-NNNN*, trong đó *VV* là mã vùng, *C* là một chữ cái bất kì trong bảng chữ cái tiếng Anh, *NNNNN* là *5* chữ số được lấy ngẫu nhiên. Mã vùng của Hà Nội có thể các số sau là *29, 30, 31, 32, 33* hoặc *40*. Hỏi có nhiều nhất bao nhiêu biển đăng kí xe khác nhau?

1.3. *Dự án đánh số điện thoại.* Dạng của số điện thoại ở Bắc Mỹ được quy định như sau trong *dự án đánh số*. Số điện thoại gồm *10* chữ số được tách ra thành một nhóm mã vùng gồm 3 chữ số, nhóm mã chi nhánh gồm 3 chữ số và nhóm mã máy gồm 4 chữ số. Vì những nguyên nhân kỹ thuật nên có một số hạn chế đối với các một số chữ đó. Để xác định dạng cho phép, giả sử *X* biểu thị chữ số có thể nhận các giá trị từ *0* đến *9*, *N* là chữ số có thể nhận các giá trị từ *2* đến *9* và *Y* là các chữ số có thể nhận giá trị là *0* hoặc *1*. Hai dự án đánh số gọi là dự án cũ và dự án mới sẽ được thảo luận (Dự án cũ được dùng từ những năm 1960 và sau đó cuối cùng dự án mới đã được dùng thay thế ở Bắc Mỹ). Trong dự án cũ *mã vùng-mã chi nhánh-mã máy* tương ứng là *NYX-NNX-XXXX*, còn theo dự án mới là *NXX-NXX-XXXX*. Hãy xác định xem có bao nhiêu số điện thoại khác nhau ở Bắc Mỹ?

1.4. Trong một cuộc điều tra 300 khách hàng sử dụng điện thoại, người ta thấy có 195 khách hàng sử dụng mạng Vinaphone, 135 người dùng mạng Viettel, 124 người dùng MobiFone, 85 người dùng cả hai mạng Vinaphone và Viettel, 68 người dùng Viettel và MobiFone, 79 người dùng Vinaphone và MobiFone và có 14 người dùng cả ba mạng trên. Hỏi có bao nhiêu khách hàng sử dụng điện thoại mà không dùng cả 3 mạng này?

1.5. Trong tổng số 854 sinh viên của một khoa trong một trường đại học có 673 đã học ngôn ngữ lập trình Pascal, 547 đã học ngôn ngữ Fortran và 245 đã học ngôn ngữ C. Ngoài ra còn biết 152 sinh viên học cả C và Fortran, 445 sinh viên đã học Pascal và Fortran và 138 sinh viên đã học Pascal và C. Nếu có 105 sinh viên đã học cả Pascal, Fortran và C thì trong trường đó có bao nhiêu sinh viên chưa học môn nào trong cả ba môn Pascal, Fortran, C?

1.6. Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài *8* có chứa một số chẵn bit *0*?

1.7. Một tài xế xe buýt phải trả tiền vé cầu đường là 45000 đồng. Với các đồng mệnh giá *20000, 10000* và 5000 thì tài xế đó có bao nhiêu cách thanh toán?

1.8. Cho phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 30$. Có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm thỏa mãn từng trường hợp sau:

a) $x_i \geq 1 \quad \forall i = \overline{1;5}$.
b) $x_1 \geq 1; \;\; x_2 \geq 2; \;\; x_3 \geq 3; \;\; x_4 \geq 4; \;\; x_5 \geq 5.$
c) $x_1 \leq 5.$
d) $x_1 < 5$ và $x_2 > 6.$

1.9. Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài 9 bắt đầu *000* hoặc kết thúc *1111*?

1.10. Mật khẩu của một máy tính phải có *6, 7* hoặc *8* kí tự. Mỗi kí tự có thể là một chữ số hoặc một chữ cái. Mỗi mật khẩu phải chứa ít nhất một chữ số. Hỏi có bao nhiêu mật khẩu như vậy?

1.11. Dùng phương pháp lặp, hãy tìm nghiệm của các hệ thức truy hồi với các điều kiện đầu tương ứng như sau:

a) $a_n = a_{n-1} + n, \quad a_0 = 1.$
b) $a_n = a_{n-1} + 2n - 3, \quad a_0 = 3.$
c) $a_n = 2a_{n-1} + 2, \quad a_0 = 1.$
d) $a_n = n.a_{n-1}, \quad a_0 = 5.$

1.12. Giả sử dân số thế giới năm *2016* là *7,3* tỷ người và tăng với tốc độ *1,2%* một năm.

a) Hãy lập hệ thức truy hồi cho dân số thế giới *n* năm sau năm 2016.
b) Tìm công thức tường minh cho dân số thế giới *n* năm sau năm 2016.
c) Dân số thế giới vào năm *2030* là bao nhiêu?

1.13. Tìm hệ thức truy hồi tính số xâu nhị phân có độ dài *n:*

a) Chứa hai bít *0* liên tiếp? Có bao nhiêu xâu như vậy có độ dài *8*?
b) Chứa xâu *01*? Có bao nhiêu xâu như vậy có độ dài *7*?
c) Có một số chẵn bít *0*? Có bao nhiêu xâu như vậy có độ dài *10*?

1.14. Một người thuê nhà với hợp đồng như sau: Năm thứ nhất phải trả *3 500 000* đồng, kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm anh ta phải trả thêm *5%* tiền thuê nhà của năm trước và thêm *250 000* đồng.

a) Hãy tìm hệ thức truy hồi tính tiền thuê nhà người đó phải trả trong năm thứ *n.*
b) Hãy tìm công thức tường minh tính số tiền người thuê nhà phải trả trong năm thứ *n?* Số tiền thuê nhà phải trả sau 5 năm là bao nhiêu?

1.15. Tính số cách đi lên vượt qua *n* bậc thang, biết mỗi lần bước là một hoặc hai bậc.

HD: $a_1 = 1; a_2 = 2; a_3 = a_1 + a_2; \ldots; a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. *Đs:* $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$.

1.16. Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi với các điều kiện đầu như sau:

a) $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$ với $n \geq 2$; $a_0 = 3$ và $a_1 = 6$.
b) $a_n = 2a_{n-2}$ với $n \geq 2$; $a_0 = 5$ và $a_1 = -1$.
c) $a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ với $n \geq 2$; $a_0 = 3$ và $a_1 = -3$.
d) $a_n = 7a_{n-2} + 6a_{n-3}$ với $n \geq 3$; $a_0 = 9, a_1 = 10, a_2 = 32$.

1.17. Hãy xây dựng thuật toán sinh tập con của tập có *n* phần tử. Liệt kê tất cả các tập con của tập $\{1; 2; 3; 4\}$ theo thuật toán đó.

1.18. Hãy xây dựng thuật toán sinh ra chỉnh hợp chập *r* của *n* phần tử. Liệt kê tất cả các chỉnh hợp chập *3* của *5* phần tử $\{1; 2; 3; 4; 5\}$ theo thuật toán đó.

1.19. Áp dụng thuật toán quay lui, liệt kê tất cả các xâu nhị phân có độ dài *5* mà có ít nhất hai bít *1* đứng liền nhau.

Chương 2.

CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ ĐỒ THỊ.

Mục tiêu: Người học xác định được một số dạng đồ thị như đồ thị đầy đủ K_n, đồ thị vòng C_n, ...Người học xác định và trình bày lại được các cách biểu diễn đồ thị trên máy tính. Nhận diện được hai đồ thị cho trước có đẳng cấu hay không. Người học xác định và nhận diện được đường đi, chu trình, đồ thị con, đồ thị bộ phận, đồ thị liên thông, đỉnh cắt, cạnh cắt. Người học xác định được số ổn định trong, số ổn định ngoài, nhân và sắc số của đồ thị. Ứng dụng sắc số vào bài toán lập lich thi và tô màu bản đồ.

2.1. BIỂU DIỄN HÌNH HỌC CỦA ĐỒ THỊ VÀ MỘT SỐ DẠNG ĐỒ THỊ ĐẶC BIỆT.

2.1.1. Các định nghĩa

Định nghĩa 1: *Đồ thị* là một cấu trúc rời rạc bao gồm các *đỉnh* và các *cạnh* nối các đỉnh này.

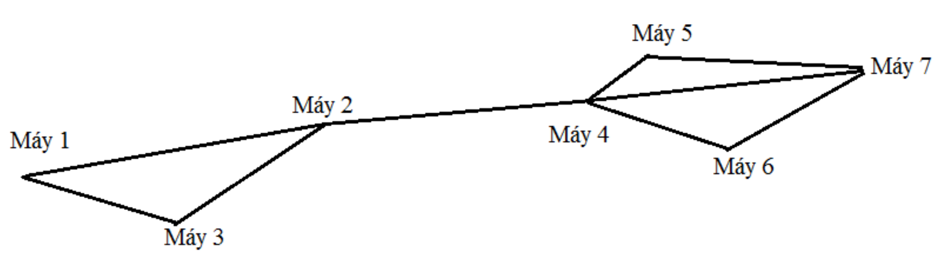
Kí hiệu đồ thị *G = (X, U)*, trong đó

$$\begin{cases} X \text{ là tập các đỉnh} - \text{là tập các đối tượng nào đó.} \\ U \subset X \times X \text{ là tập các cạnh, mỗi cạnh (x,y) nối đỉnh } x \text{ với } y\ (x, y \in X). \end{cases}$$

Ta gọi *G* là một *đồ thị hữu hạn* nếu *G* có tập đỉnh *X* hữu hạn, ngược lại nếu *X* là tập vô hạn thì *G* gọi là *đồ thị vô hạn*.

Hơn nữa, nếu mọi cạnh $(x, y) \in U$ không phân biệt thứ tự đỉnh đầu và đỉnh cuối thì *G* được gọi là *đồ thị vô hướng*. Ngược lại, nếu mọi cạnh $(x, y) \in U$ có phân biệt thứ tự *x* là đỉnh đầu và *y* là đỉnh cuối thì đồ thị *G* gọi là *đồ thị có hướng*. Trong trường hợp cần chỉ rõ, ta gọi các cạnh trong đồ thị vô hướng là các *cạnh vô hướng*, còn các cạnh trong đồ thị có hướng các *cạnh có hướng* (hoặc *cung*).

<u>Ví dụ 1:</u> Xét sơ đồ một mạng máy tính tại cơ quan A, mạng này gồm các máy tính và các đường điện thoại. Trong mạng này, có nhiều nhất một đường điện thoại giữa hai máy, mỗi đường điện thoại hoạt động theo cả hai chiều và không có máy tính nào có đường điện thoại nối đến chính nó. Ta có thể biểu diễn mỗi máy tính bằng một điểm và mỗi đường điện thoại bằng một cạnh như hình vẽ sau:



Hình 2.1. Sơ đồ mạng máy tính có nhiều nhất một đường điện thoại.

Như vậy, mạng này có thể mô hình bằng một đồ thị vô hướng, với các đỉnh biểu diễn các máy tính, và các cạnh vô hướng biểu diễn các đường điện thoại.

Trường hợp các đường điện thoại hoạt động chỉ một chiều, thì các đường điện thoại hai chiều được biểu diễn bằng một cặp cạnh có chiều ngược nhau. Mạng máy tính này có thể mô hình bằng một đồ thị có hướng.

Trong mạng máy tính trên, giữa hai máy có nhiều nhất một đường điện thoại, mỗi đường hoạt động cả hai chiều, và không máy tính nào có đường điện thoại nối đến chính nó. Đồ thị mô hình cho sơ đồ mạng máy tính có nhiều nhất một đường điện thoại (**Hình 2.1**) là một đơn đồ thị vô hướng.

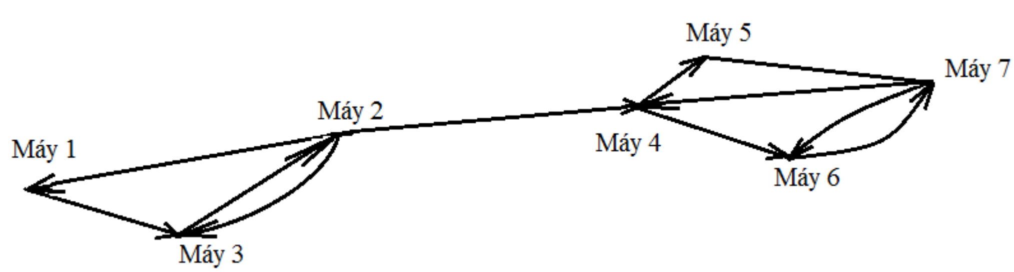
Định nghĩa 2: Cho đồ thị *G = (X, U).*

(1) Nếu cạnh $u = (x, x) \in U$ thì *u* được gọi là một *khuyên* và *x* được gọi là đỉnh có khuyên.
(2) Nếu hai cạnh $u, v \in U$ có chung đỉnh đầu và chung đỉnh cuối thì *u, v* được gọi là các *cạnh (cung) bội*. Nói cách khác các cạnh bội nối cùng một cặp đỉnh.
(3) Đồ thị *G* gọi là *đơn đồ thị* nếu *G* không có khuyên, không có cạnh bội; *G* gọi là *đa đồ thị* nếu *G* không có khuyên nhưng có cạnh bội; và *G* gọi là *giả đồ thị* nếu *G* có khuyên.

Biểu diễn hình học của đồ thị:

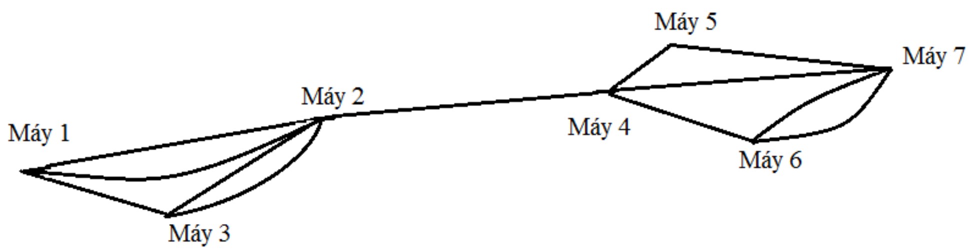
(1) Mỗi đỉnh biểu diễn bởi một điểm trên mặt phẳng.
(2) Mỗi cạnh trong đồ thị vô hướng được biểu diễn bởi một đoạn thẳng hoặc cung cong.
(3) Mỗi cung *u = (x, y)* trong đồ thị có hướng được biểu diễn bởi đoạn thẳng hoặc cung cong có mũi tên chỉ hướng từ đỉnh đầu *x* đến đỉnh cuối *y*.
(4) Mỗi khuyên (*x, x*) được biểu diễn bởi một vòng xuyến từ *x* đến chính nó.

*<u>Ví dụ 2:</u> Đồ thị mô hình cho một mạng máy tính có các đường điện thoại một chiều là một đồ thị có hướng (**Hình 2.2**).*



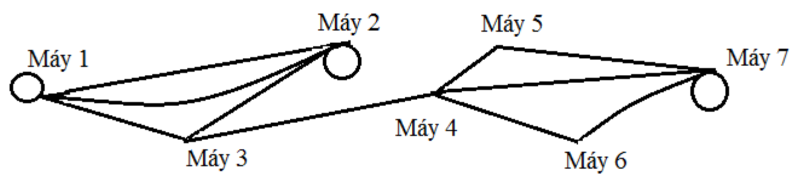
Hình 2.2. Sơ đồ mạng máy tính có các đường điện thoại một chiều.

*Đồ thị mô hình cho một mạng máy tính trong trường hợp có nhiều đường điện thoại giữa các máy tính chính là một đa đồ thị (**Hình 2.3**).*



Hình 2.3. Sơ đồ mạng máy tính có nhiều đường điện thoại.

*Và đồ thị mô hình cho một mạng máy tính có đường điện thoại từ một máy tới chính nó là một giả đồ thị (**Hình 2.4**).*



Hình 2.4. Sơ đồ mạng máy tính có các đường điện thoại nội bộ.

Định nghĩa 3: Cho $G = (X, U)$.

(1) Cho $x, y \in X$ là hai đỉnh và $u = (x, y) \in U$ là một cạnh (cung) của G thì:

Ta nói: $\begin{cases} \text{hai đỉnh } x, y \text{ } k\grave{e}\ nhau; \\ x, y \text{ là các } \mathit{đỉnh\ kề} \text{ (điểm đầu mút)của cạnh } u; \\ u \text{ là } \mathit{cạnh\ kề} \text{ hay } \mathit{cạnh\ liên\ thuộc} \text{ với các đỉnh } x \text{ và đỉnh } y. \end{cases}$

(2) Hai cạnh (cung) *u*, *v* gọi là *hai cạnh (cung) kề nhau* nếu chúng có chung một đỉnh.

(3) Trong đồ thị vô hướng *G*, *bậc* của đỉnh *x*, kí hiệu là *deg(x)*, là một số thực xác định như sau:

$$\boxed{deg(x) = \text{Số cạnh kề đỉnh } x}$$

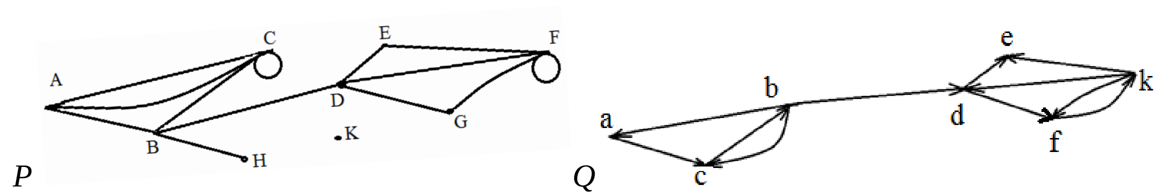
(Đặc biệt, khuyên tại một đỉnh được tính hai lần cho bậc của nó)

Tương tự, trong đồ thị có hướng ***G***, *bán bậc vào* và *bán bậc ra* của đỉnh *x*, kí hiệu lần lượt là $deg^-(x)$ và $deg^+(x)$ được xác định :

$$\boxed{deg^-(x) = \text{Số cung đi vào đỉnh } x} \quad \boxed{deg^+(x) = \text{Số cung đi ra từ đỉnh } x}$$

(4) *Đỉnh cô lập* trong đồ thị vô hướng là đỉnh có bậc bằng 0, còn trong đồ thị có hướng là đỉnh có tổng bán bậc vào và bán bậc ra bằng 0.
(5) *Đỉnh treo* là đỉnh có bậc bằng 1 (hoặc tổng bán bậc vào và bán bậc ra bằng 1).
(6) *Cạnh* (*cung*) *treo* là cạnh (cung) kề với đỉnh treo.

<u>Ví dụ 3:</u> Xác định bậc của các đỉnh; đỉnh treo; đỉnh cô lập; cạnh (cung) treo trong các đồ thị sau.



Hình 2.5. Đồ thị vô hướng *P* và đồ thị có hướng *Q*.

Ta có bậc của các đỉnh trong P là:

Đỉnh	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*K*
Bậc	*3*	*4*	*5*	*4*	*2*	*5*	*2*	*1*	*0*

Vậy trong đồ thị vô hướng P có: K là đỉnh cô lập; H là đỉnh treo; Cạnh (B,H) là cạnh treo.

Ta có bán bậc vào và bán bậc ra của các đỉnh trong Q là:

Đỉnh x	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*k*
$deg^{-}(x)$	*1*	*1*	*2*	*2*	*2*	*2*	*1*
$deg^{+}(x)$	*1*	*3*	*1*	*2*	*0*	*1*	*3*

Vậy trong đồ thị có hướng Q: không có đỉnh cô lập, đỉnh treo, cung treo.

Một số tính chất về bậc của các đỉnh trong đồ thị:

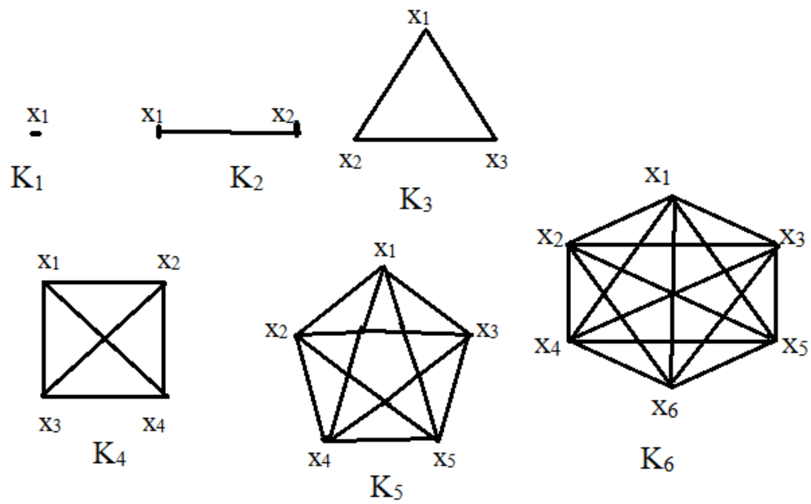
(1) **:** Trong đồ thị vô hướng $G = (X, U)$: $\sum_{x \in X} \deg(x) = 2N(U)$.
Trong đồ thị có hướng $G = (X, U)$: $\sum_{x \in X} \deg^{+}(x) = \sum_{x \in X} \deg^{-}(x) = N(U)$.
(2) **:** Trong đồ thị vô hướng số đỉnh bậc lẻ là một số chẵn.
(3) **:** Trong đơn đồ thị vô hướng, luôn tồn tại ít nhất hai đỉnh cùng bậc.

2.1.2. Một số dạng đơn đồ thị vô hướng đặc biệt

Đồ thị đầy đủ K_n .

Đồ thị đầy đủ K_n là một đồ thị có *n* đỉnh mà hai đỉnh bất kì luôn kề nhau.

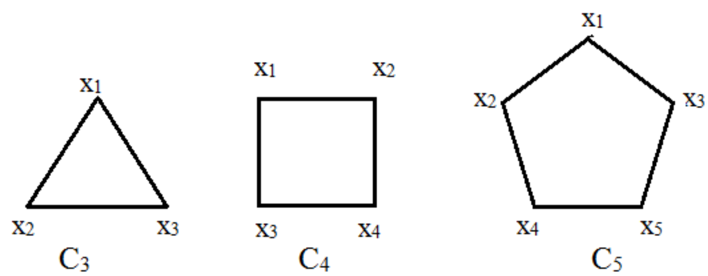
Như vậy, K_n có $\begin{cases} n \text{ đỉnh (mọi đỉnh đều có bậc } n-1) \\ \frac{n(n-2)}{2} \text{ cạnh} \end{cases}$.



Hình 2.6. Đồ thị vô hướng đầy đủ K_n.

Đồ thị vòng C_n .

Đồ thị vòng C_n là một đồ thị có n đỉnh ($n \geq 3$): $x_1; x_2; \ldots; x_n$ cùng có bậc bằng 2 và có n cạnh nối tiếp nhau tạo thành một vòng tròn: (x_1, x_2); (x_2, x_3); …; (x_{n-1}, x_n); (x_n, x_1).

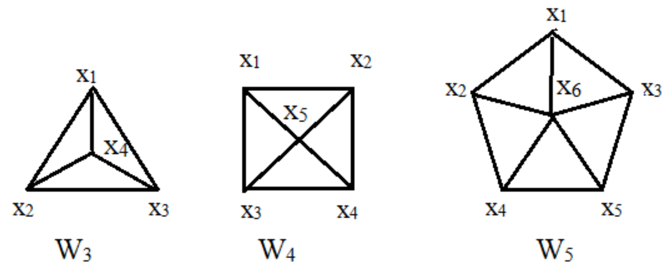


Hình 2.7. Đồ thị vòng C_n

Đồ thị bánh xe W_n .

Đồ thị bánh xe W_n là một đồ thị có $n+1$ đỉnh được sinh ra từ đồ thị vòng C_n bằng cách thêm một đỉnh và nối đỉnh này với tất cả các đỉnh của C_n bởi n cạnh mới.

Như vậy, W_n có $\begin{cases} n+1 \text{ đỉnh } (n \text{ đỉnh bậc } 3 \text{ và một đỉnh bậc } n) \\ 2n \text{ cạnh} \end{cases}$.

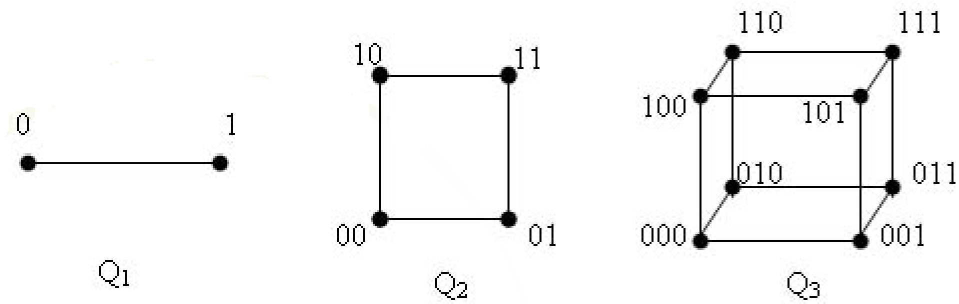


Hình 2.8. Đồ thị bánh xe W_n .

Đồ thị lập phương Q_n .

Đồ thị lập phương Q_n là một đồ thị có 2^n đỉnh, mỗi đỉnh biểu diễn bằng một xâu nhị phân có độ dài n, và giữa hai đỉnh có một cạnh nối nếu các xâu nhị phân biểu diễn chúng khác nhau đúng một bít.

Như vậy, Q_n có $\begin{cases} 2^n \text{ đỉnh (mọi đỉnh đều có bậc } n) \\ n.2^{n-1} \text{ cạnh} \end{cases}$.



Hình 2.9. Đồ thị lập phương Q_n.

2.2. BIỂU DIỄN DẠNG ĐẠI SỐ CỦA ĐỒ THỊ. SỰ ĐẲNG CẤU GIỮA CÁC ĐỒ THỊ.

Có nhiều cách biểu diễn đồ thị. Để lưu trữ đồ thị và thực hiện các thuật toán khác nhau với đồ thị trên máy tính cần phải chọn được cách biểu diễn thích hợp nhất, điều này có tác động rất lớn đến hiệu quả của thuật toán. Sau đây là các cách khác nhau để biểu diễn đồ thị.

2.2.1. Biểu diễn đồ thị bằng danh sách kề

Một cách biểu diễn đồ thị không có cạnh bội là liệt kê tất cả các cạnh (cung). Cụ thể, với mỗi đỉnh của đồ thị, ta xây dựng một danh sách móc nối chứa các đỉnh kề với đỉnh này. Danh sách này được gọi là danh sách kề. Danh sách kề chỉ rõ các đỉnh nối với mỗi đỉnh của đồ thị.

Định nghĩa: Cho *G = (X, U) không có cạnh bội.*

(1) Mỗi *x* ∈ *X*, đặt *Ke(x)* = {*y*∈*X* | (*x, y*) ∈ *U*}. *Ke(x)* là *tập đỉnh có cạnh (cung) đi từ x đến.*
(2) Tập hợp $\{Ke(x), x \in X\}$ được gọi là *danh sách kề* của đồ thị *G*. Nói cách khác, danh sách kề là danh sách liệt kê tất cả các cạnh (cung) của đồ thị.

Ví dụ : Dùng danh sách kề để mô tả các đồ thị sau.

Hình 2.10. Đồ thị vô hướng *G* và đồ thị có hướng *H* có khuyên nhưng không có cạnh bội.

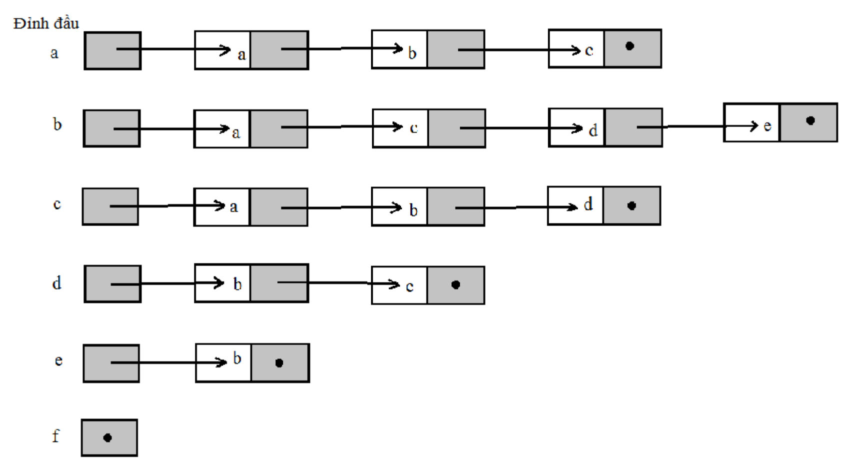
Giải.

Bảng 2.1a. Danh sách kề của đồ thị vô hướng *G*

Đỉnh đầu	*Đỉnh cuối*
a	*a, b, c*
b	*a, c, d, e*
c	*a, b, d*
d	*b, c*
e	*b*
f	∅

Hay

Bảng 2.1b. Mảng các danh sách kề biểu diễn đồ thị vô hướng *G*

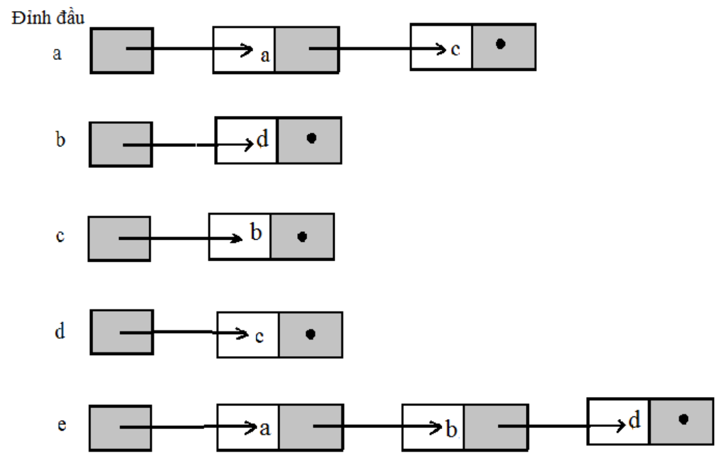


Bảng 2.2a. Danh sách kề của đồ thị có hướng *H*

Đỉnh đầu	*Đỉnh cuối*
a	*a, c*
b	*d*
c	*b*
d	*c*
e	*a, b, d*

Hay

Bảng 2.2b. Mảng các danh sách kề biểu diễn đồ thị có hướng *H*



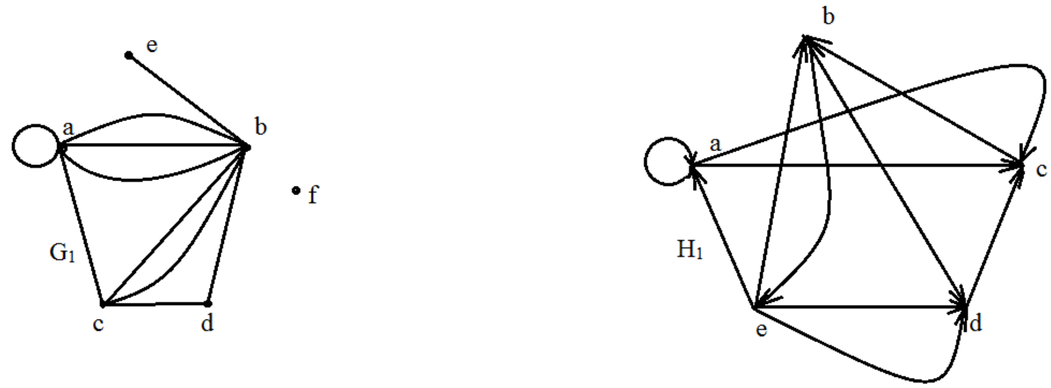
Trong trường hợp đồ thị có nhiều cạnh (cung) thì việc biểu diễn đồ thị bằng danh sách kề sẽ rất cồng kềnh, thậm chí *không thể biểu diễn được bằng danh sách kề* nếu đồ thị *có cạnh (cung) bội*. Để khắc phục điều này, ta có thể biểu diễn đồ thị bằng ma trận kề hoặc ma trận liên thuộc.

2.2.2.Biểu diễn đồ thị bằng ma trận kề đỉnh-đỉnh

Định nghĩa: Cho đồ thị $G = (X, U)$ với tập đỉnh X đã được sắp xếp đánh số theo thứ tự: $X = \{1, 2, ..., n\}$. *Ma trận kề* của đồ thị G là một ma trận vuông $A = (a_{ij})$ cấp n có các phần tử xác định như sau:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } (i,j) \notin U \\ d & \text{nếu có } d \text{ cạnh (cung) nối } i,j \end{cases}$$

Ví dụ : *Xác định ma trận kề của các đồ thị sau.*



Hình 2.11. Đồ thị vô hướng G_1 và đồ thị có hướng H_1 có cạnh bội.

Giải.

Ma trận kề của G_1 ứng với sự sắp xếp các đỉnh theo thứ tự a, b, c, d, e, f là như sau:

$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d & e & f \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Và ma trận kề của H_1 ứng với sự sắp xếp các đỉnh theo thứ tự a, b, c, d, e là:

$$B = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Tính chất:

(1) Ma trận kề của đồ thị tùy thuộc vào thứ tự liệt kê (đánh số) các đỉnh. Mỗi đồ thị *n* đỉnh thì có *n!* ma trận kề khác nhau vì có *n!* cách sắp xếp *n* đỉnh.

(2) Ma trận kề của đồ thị vô hướng là một ma trận đối xứng cấp *n*. Ma trận kề của một đồ thị có hướng thì không đối xứng (vì với $i \neq j$ thì $a_{ij} \neq a_{ji}$).

(3) Tổng các phần tử trên dòng *i* bằng bậc (hay bán bậc ra) của đỉnh *i*. Tổng các phần tử trên cột *j* bằng bậc (hay bán bậc vào) của đỉnh *j*.

(4) Đồ thị không có khuyên thì các phần tử trên đường chéo chính bằng *0*. Đồ thị không có cạnh bội thì ma trận kề là ma trận *0-1 (*chỉ toàn số *0* và *1).*

2.2.3.Biểu diễn đồ thị bằng ma trận liên thuộc đỉnh-cạnh

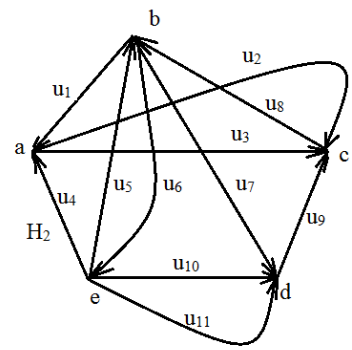
Định nghĩa : Cho đồ thị *G = (X, U) không có khuyên* với tập đỉnh *X* và tập cạnh (cung) *U* đã được đánh số thứ tự là : $X = \{1; 2; \ldots; n\}$; $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$. *Ma trận liên thuộc* của *G* là ma trận $M = (m_{ij})$ cấp $n \times m$ có các phần tử xác định như sau :

(1) Nếu G là đồ thị vô hướng thì $m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu đỉnh } i \text{ kề cạnh } u_j \\ 0 & \text{nếu đỉnh } i \text{ không kề cạnh } u_j \end{cases}.$

(2) Nếu G là đồ thị có hướng thì $m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu đỉnh } i \text{ là đỉnh đầu của cung } u_j \\ -1 & \text{nếu đỉnh } i \text{ là đỉnh cuối của cung } u_j \\ 0 & \text{nếu đỉnh } i \text{ không kề cung } u_j \end{cases}.$

<u>*Ví dụ :*</u>

Xác định ma trận liên thuộc của đồ thị H_2 với các cạnh được đánh số như sau :



Hình 2.12. Đồ thị có hướng H_2 không có khuyên.

Giải. Ma trận liên thuộc của đồ thị không có khuyên H_2 là :

$$M = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} & u_{11} \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

2.2.4. Sự đẳng cấu giữa các đồ thị

Một đồ thị có nhiều cách biểu diễn dạng hình học, cũng như biểu diễn dạng đại số khác nhau. Vấn đề đặt ra là cần xét xem các dạng đó có phải là biểu diễn khác nhau của cùng một đồ thị hay không. Các dạng biểu diễn khác nhau của cùng một đồ thị được gọi là đẳng cấu với nhau.

Định nghĩa: Hai đơn đồ thị $G_1 = (X_1, U_1)$ và $G_2 = (X_2, U_2)$ được gọi là đẳng cấu với nhau nếu tồn tại một song ánh $f: X_1 \to X_2$ sao cho $\boxed{f(Ke(x)) = Ke(f(x)),\ \forall x \in X_1.}$

(Ảnh của đỉnh kề với x thì cũng kề với $f(x)$)

Tức là $(x, y) \in U_1 \leftrightarrow (f(x), f(y)) \in U_2$, hay f bảo toàn quan hệ liền kề giữa các đỉnh.

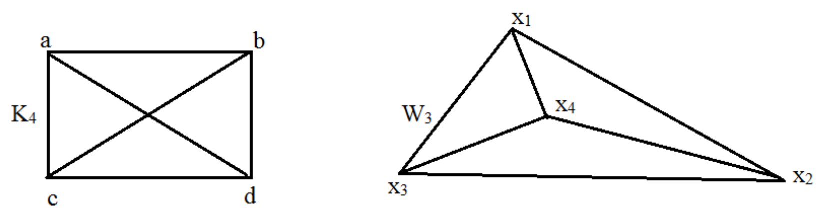
Tính chất bất biến của hai đơn đồ thị đẳng cấu $G_1 = (X_1, U_1)$ và $G_2 = (X_2, U_2)$:

Nếu G_1, G_2 vô hướng thì $deg(f(x)) = deg(x)$ với $\forall x \in X_1$. Tức là đỉnh x bậc k trong G_1 phải tương ứng với đỉnh $f(x)$ bậc k trong G_2.

Tương tự, đối với đồ thị có hướng G_1, G_2 thì $deg^{\pm}(f(x)) = deg^{\pm}(x)$ với $\forall x \in X_1$.

Nói cách khác, hai đồ thị đẳng cấu thì chúng có **cùng số đỉnh**, đặc biệt **cùng số đỉnh bậc *k*** hoặc cùng số đỉnh có bán bậc ra (bán bậc vào) bằng k. Do đó hai đồ thị đẳng cấu với nhau thì cũng **có cùng số cạnh (cung)**.

Ví dụ 1: Hai đồ thị K_4 và W_3 là đẳng cấu với nhau :



Hình 2.13. Đồ thị vô hướng đầy đủ K_4 và đồ thị bánh xe W_3.

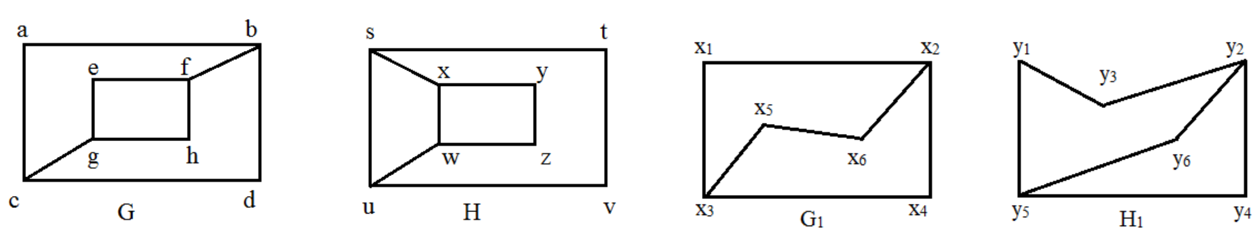
Vì có song ánh $f: \{a; b; c; d\} \to \{x_1; x_2; x_3; x_4\}$ như sau : $f(a) = x_1$; $f(b) = x_2$; $f(c) = x_3$; $f(d) = x_4$ bảo toàn tính liền kề giữa các đỉnh. Thật vậy, dễ dàng kiểm tra thấy :

$$f: \begin{array}{l} a \mapsto x_1 \\ b \mapsto x_2 \\ c \mapsto x_3 \\ d \mapsto x_4 \end{array}$$

$Ke(a) = \{b; c; d\}$ => $f(\{b; c; d\}) = \{x_2 ; x_3; x_4\} = Ke(f(a))$; Vậy $f(Ke(a)) = Ke(f(a))$. Tương tự có:

$f(Ke(b)) = Ke(f(b))$; $f(Ke(c)) = Ke(f(c))$; $f(Ke(d)) = Ke(f(d))$ ■

Ví dụ 2 : Xét xem các đồ thị sau có đẳng cấu với nhau không?



Hình 2.14. Các đồ thị vô hướng G và H ; G_1 và H_1 .

Giải.

(1) Ta có bậc của các đỉnh:

Đồ thị G									*Đồ thị H*								
Đỉnh	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*Đỉnh*	*s*	*t*	*u*	*v*	*x*	*y*	*w*	*z*
Bậc	*2*	*3*	*3*	*2*	*2*	*3*	*3*	*2*	*Bậc*	*3*	*2*	*3*	*2*	*3*	*2*	*3*	*2*

G và H cùng có 4 đỉnh bậc 2 và 4 đỉnh bậc 3. Ta xây dựng song ánh :

$$f:\{a;b;c;d;e;f;g;h\} \longrightarrow \{s;t;u;v;x;y;w;z\}.$$

Do deg(f(a)) = deg(a) = 2 nên f(a)$\in \{t;v;y;z\}$.

Mặt khác Ke(a) = $\{b;c\}$ *là hai đỉnh bậc 3 và Ke(f(a)) = f(Ke(a)) =* $\{f(b);f(c)\}$ *, nên f(a) cũng chỉ kề với đúng hai đỉnh f(b) và f(c) bậc 3.*

Nhưng cả 4 đỉnh $t;v;y;z$ *đều kề với một đỉnh bậc 2 nên không xác định được đỉnh tương ứng của đỉnh a trong H.*

Vậy G và H không đẳng cấu với nhau.

(2) Ta có bậc của các đỉnh

Đồ thị G_1							*Đồ thị H_1*						
Đỉnh	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	*Đỉnh*	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
Bậc	*2*	*3*	*3*	*2*	*2*	*2*	*Bậc*	*2*	*3*	*2*	*2*	*3*	*2*

G_1 và H_1 cùng có 2 đỉnh bậc 3 và 4 đỉnh bậc 2. Ta xây dựng song ánh :

$$f:\{x_1;x_2;x_3;x_4;x_5;x_6\} \to \{y_1;y_2;y_3;y_4;y_5;y_6\}$$

Có $f(x_2) \in \{y_2;y_5\}$*. Mà Ke(*x_2*) =* $\{x_1;x_4;x_6\}$ *là ba đỉnh bậc 2 nên* $f(x_2)$ *phải kề với ba đỉnh bậc 2. Chọn* $f(x_2) = y_2$ *thì* $f(x_3) = y_5$*.*

Có Ke(x_1*) =* $\{x_2;x_3\}$ *nên Ke(f(*x_1*)) =* $\{f(x_2);f(x_3)\} = \{y_2;y_5\}$*. Vậy* $f(x_1) = y_6$*.*

Tương tự suy ra $f(x_4) = y_4;\ f(x_5) = y_1;\ f(x_6) = y_3$*.*

Vậy có song ánh f bảo toàn quan hệ liền kề giữa các đỉnh như sau:

$$
\begin{aligned}
f:\quad & x_1 \mapsto y_6 & Ke(f(x_1)) = f(\{x_2;x_3\}) = \{y_2;y_5\} \\
& x_2 \mapsto y_2 & Ke(f(x_2)) = f(\{x_1;x_4;x_6\}) = \{y_6;y_4;y_3\} \\
& x_3 \mapsto y_5 & Ke(f(x_3)) = f(\{x_1;x_4;x_5\}) = \{y_6;y_4;y_1\} \\
& x_4 \mapsto y_4 & Ke(f(x_4)) = f(\{x_2;x_3\}) = \{y_2;y_5\} \\
& x_5 \mapsto y_1 & Ke(f(x_5)) = f(\{x_3;x_6\}) = \{y_5;y_3\} \\
& x_6 \mapsto y_3 & Ke(f(x_6)) = f(\{x_2;x_5\}) = \{y_2;y_1\}
\end{aligned}
$$

Suy ra : G_1 và H_1 đẳng cấu với nhau (biểu diễn cùng một đồ thị). ■

2.3. TÍNH LIÊN THÔNG TRONG ĐỒ THỊ.

2.3.1. Đường đi và chu trình

Định nghĩa: Cho đồ thị $G = (X, U)$.

i. *Đường đi α* từ đỉnh x_0 đến đỉnh x_k trong đồ thị G là một dãy các đỉnh $<x_0; x_1; \ldots; x_k>$ thỏa mãn mỗi đỉnh trong dãy (trừ đỉnh cuối cùng) đều nối với đỉnh ngay sau nó bằng một cạnh nào đó, tức là $(x_0,x_1), (x_1,x_2), \ldots, (x_{k-1},x_k) \in U$. Đỉnh x_0 gọi là *đỉnh đầu*, x_k là *đỉnh cuối* của đường đi. *Độ dài* của đường đi α là số cạnh (cung) có trên đường đi đó.

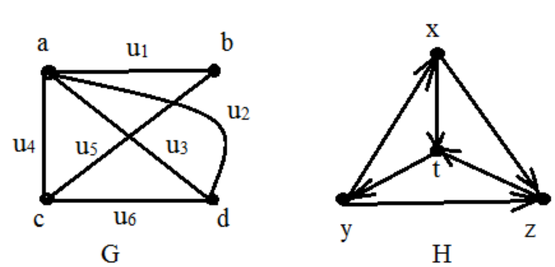
ii. *Chu trình* là một đường đi có đỉnh đầu và đỉnh cuối trùng nhau.

iii. Đường đi (chu trình) gọi là *đường đi (chu trình) đơn* nếu nó không đi qua cạnh (cung) nào quá một lần.

iv. Đường đi (chu trình) gọi là *đường đi (chu trình) sơ cấp* nếu nó không đi qua đỉnh nào quá một lần.

Khi G là một đa đồ thị, cần phân biệt các cạnh bội, ta sẽ kí hiệu đường đi bằng dãy các cạnh $<u_1, u_2, \ldots, u_k>$ thay cho dãy các đỉnh $<x_0; x_1; \ldots; x_k>$, vì có thể có nhiều đường đi qua dãy các đỉnh này.

<u>Ví dụ 1:</u> Xét các đồ thị dưới đây.



Hình 2.15. Đồ thị vô hướng *G* và đồ thị có hướng *H*.

Trong đồ thị vô hướng G, đường đi <u_1; u_2 ; u_3 ; u_4> là đường đi đơn từ đỉnh b đến đỉnh c nhưng không phải đường đi sơ cấp (đi qua đỉnh a hai lần); chu trình <u_1; u_5; u_6; u_2; u_4; u_6; u_3> - xuất phát từ đỉnh a, không phải là chu trình đơn (đi qua cạnh u_6 hai lần).

Trong đồ thị có hướng H, dãy các đỉnh <x; z; t; y; x> là một chu trình đơn có độ dài 4; dãy các đỉnh <x; y; z; t> không phải là một đường đi (vì không có cung nối từ x đến y).

Một số tính chất về đường đi trên đồ thị.

Định lý 1: Cho *A* là ma trận kề của đồ thị *G*. Kí hiệu $a_{ij}^{(k)}$ là phần tử ở hàng *i*, cột *j* của ma trận tích $A^k = A \times A \times \ldots \times A$. Khi đó, số đường đi khác nhau từ đỉnh *i* đến *j* cùng có độ dài *k* bằng $a_{ij}^{(k)}$.

Chứng minh: Giả sử đồ thị có *n* đỉnh đã được đánh số từ *1* đến *n*. Chứng minh ***Định lý 1*** bằng quy nạp theo độ dài *k* của đường đi. Thật vậy:

k =1 . Theo định nghĩa của ma trận kề suy ra định lý đúng với *k = 1*.

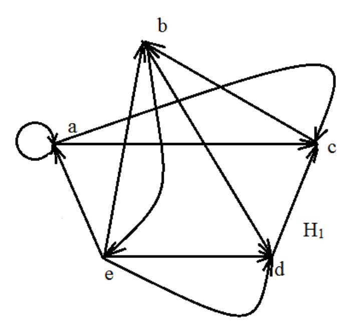
Giả sử định lý đúng với $k = k_0$. Đặt $A = [a_{ij}]$; $A^{k_0} = [b_{ij}]$; $C = A^{k_0+1} = [c_{ij}]$; Theo giả thiết quy nạp, số đường đi khác nhau từ đỉnh *i* đến đỉnh *q* có độ dài bằng k_0 là b_{iq} $(1 \le q \le n)$.

Vậy số đường đi khác nhau từ đỉnh *i* đến đỉnh *j* có độ dài bằng k_0+1 có đi qua đỉnh *q* là $b_{iq}.a_{qj}$, và do đó số đường đi khác nhau từ đỉnh *i* đến đỉnh *j* có độ dài bằng k_0+1 là $\sum_{q=1}^{n} b_{iq}a_{qj} = c_{ij}$. Định lý đúng với $k = k_0+1$. ■

<u>Ví dụ 2:</u> Tìm số đường đi độ dài 3 từ đỉnh a đến đỉnh b của đồ thị H_1 trong đồ thị sau:

Giải.
Ma trận kề của H_1 là :

$$B = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$



Hình 2.16. Đồ thị có hướng *H₁*

Đặt $C = B \times B$; $B^3 = C \times B$. Phần tử ở hàng a, cột b của ma trận B^3 là $C^{a\blacksquare} \times B^{\blacksquare b}$.

(kí hiệu $C^{a\blacksquare}$ là hàng a của ma trận C ; $B^{\blacksquare b}$ là cột b của ma trận B).

Có $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Suy ra : $C^{a\blacksquare} = [B^{a\blacksquare} \times B^{\blacksquare a} \quad B^{a\blacksquare} \times B^{\blacksquare b} \quad B^{a\blacksquare} \times B^{\blacksquare c} \quad B^{a\blacksquare} \times B^{\blacksquare d} \quad B^{a\blacksquare} \times B^{\blacksquare e}]$

$= [1 \quad 2 \quad 2 \quad 0 \quad 0]$

Vậy số đường đi có độ dài 3 từ đỉnh a đến đỉnh b trong H_1 *là :* $[1 \quad 2 \quad 2 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2$.

Định lý 2 : Giả sử đồ thị G có n đỉnh. Khi đó, tồn tại đường đi từ đỉnh a đến đỉnh b trên đồ thị G khi và chỉ khi tồn tại một đường đi từ đỉnh a đến đỉnh b trên đồ thị này với độ dài không vượt quá $n-1$.

Chứng minh. Giả sử tồn tại đường đi α từ đỉnh a đến đỉnh b, không làm mất tính tổng quát từ đường đi này ta luôn chọn được một đường đi sơ cấp từ a đến b có độ dài k với các đỉnh là $<a = x_0 ; x_1 ; \ldots ; x_k = b>$, trong đó x_i và x_j đôi một khác nhau. Thật vậy, nếu trên đường đi có hai đỉnh trùng nhau $x_i = x_j$ thì ta thu gọn thành đường đi là $<a = x_0 ; x_1 ; \ldots ; x_i ; x_{j+1} ; \ldots ; x_k = b>$.

Mặt khác, G chỉ có n đỉnh khác nhau nên $k \leq n-1$. Tức là ta luôn chọn được một đường đi sơ cấp từ a đến b với độ dài không vượt quá $n-1$. ■

Hệ quả **:** Cho đồ thị G có n đỉnh xác định bởi ma trận kề A, và a, b là hai đỉnh của G. Đặt $T = A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{n-1}$. Khi đó, trên đồ thị G tồn tại ít nhất một đường đi từ đỉnh a đến đỉnh b khi và chỉ khi $T[a,b] \geq 1$ (với $T[a,b]$ là phần tử ở hàng a, cột b của ma trận tổng các lũy thừa T).

2.3.2. Đồ thị con và đồ thị bộ phận

Định nghĩa: Cho đồ thị $G = (X, U)$.

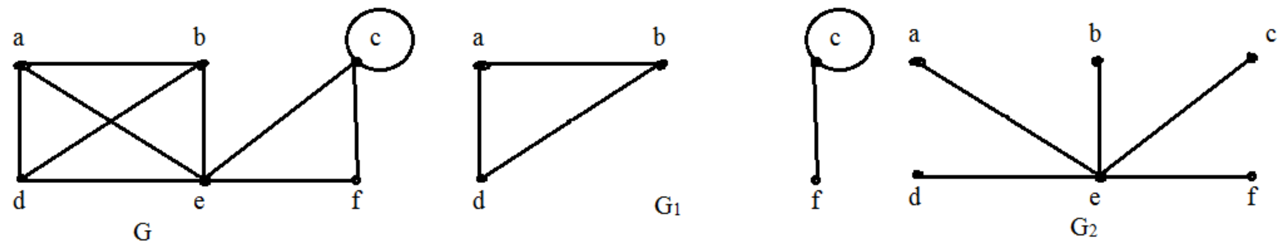
(1) *Đồ thị con* của đồ thị G là phần còn lại của G sau khi bỏ bớt đi một số đỉnh cùng với một số cạnh (cung) kề với các đỉnh đó.

(2) *Đồ thị bộ phận* của đồ thị G là phần còn lại của G sau khi bỏ bớt đi một cạnh (cung) nhưng giữ nguyên số đỉnh.

Tóm lại: $G_1 = (X_1, U_1)$ là một đồ thị con của $G = (X, U)$ ⇔ $\begin{cases} X_1 \subset X \\ U_1 = U \cap (X_1 \times X_1) \end{cases}$.

$$G_2 = (X_2, U_2) \text{ là một đồ thị bộ phận của } G = (X, U) \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = X \\ U_1 \subset U \end{cases}.$$

<u>Ví dụ:</u> Cho đồ thị G như sau:



Hình 2.17. Đồ thị con G_1 và đồ thị bộ phận G_2 của G.

Xóa đi đỉnh e và các cạnh kề với e ta được đồ thị con G_1 của G.

Giữ nguyên 6 đỉnh, xóa đi một số cạnh để không còn chu trình ta được đồ thị bộ phận G_2 của G.

2.3.3. Đồ thị liên thông. Đỉnh cắt, cạnh cắt.

Đồ thị liên thông.

Định nghĩa 1: Đồ thị vô hướng *G* gọi là *đồ thị vô hướng liên thông* nếu luôn tìm được đường đi giữa hai đỉnh bất kì của nó. Nếu *G* không liên thông thì một đồ thị con liên thông của *G* gọi là một *thành phần liên thông* của *G*.

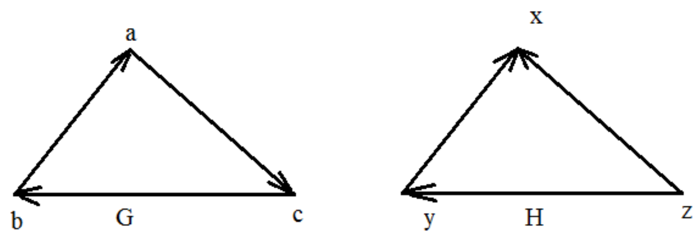
Dễ thấy, đồ thị vô hướng *G* liên thông khi và chỉ khi *G* có một thành phần liên thông duy nhất.

<u>Ví dụ :</u> Đồ thị G và G_2 là các đồ thị vô hướng liên thông. Đồ thị G_1 là một đồ thị không liên thông, G_1 có hai thành phần liên thông.

Định nghĩa 2:

(1) Đồ thị có hướng *G* gọi là *đồ thị có hướng liên thông mạnh* nếu luôn tìm được đường đi giữa hai đỉnh bất kì của nó.
(2) Đồ thị có hướng *G* gọi là *đồ thị có hướng liên thông yếu* nếu đồ thị vô hướng tương ứng với nó (là đồ thị đã thay cung bằng cạnh) là liên thông.

<u>Ví dụ :</u>



Hình 2.18a. Đồ thị có hướng liên thông mạnh *G* và đồ thị có hướng liên thông yếu *H*.

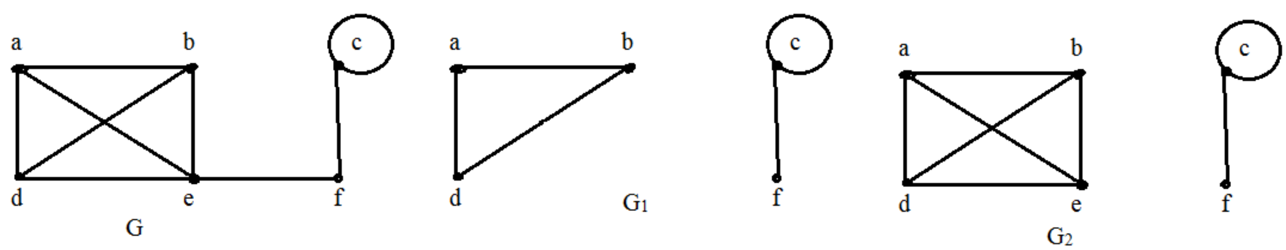
Ta có chu trình <a; b; c; a> đi qua tất cả các đỉnh của G nên luôn tìm được đường đi giữa hai đỉnh bất kì của G. Vậy G là đồ thị có hướng liên thông mạnh.

H không phải là đồ thị liên thông mạnh vì không có đường đi từ đỉnh x đến đỉnh z. H là một đồ thị có hướng liên thông yếu.

Đỉnh cắt, cạnh cắt (cầu).

Định nghĩa: Một đỉnh của *G* gọi là *đỉnh cắt (hay điểm khớp)* nếu khi ta xóa đi đỉnh đó và các cạnh liên thuộc với nó thì nhận được một đồ thị con có số thành phần liên thông nhiều hơn so với đồ thị *G* ban đầu. Một cạnh của *G* gọi là *cạnh cắt (cầu)* nếu khi loại cạnh đó ra khỏi *G* thì nhận được một đồ thị bộ phận có số thành phần liên thông nhiều hơn so với *G*.

Ví dụ:



Hình 2.18bc. Đồ thị vô hướng *G* có đỉnh cắt (điểm khớp) và cạnh cắt (cầu).

Đồ thị *G* là đồ thị vô hướng liên thông, xóa bỏ đỉnh *e* và bốn cạnh kề với nó ta được đồ thị con G_1 có hai thành phần liên thông nên *e là một điểm khớp* của *G*.

Xóa bỏ cạnh *(e; f)* ta được đồ thị bộ phận G_2 có hai thành phần liên thông, nên *(e; f) là một cầu* của *G*. Xét tương tự, cạnh *(f; c)* cũng là một cầu của *G*.

Vậy *G* có một điểm khớp *e* và hai cầu *(e; f)* và *(f; c)*.

Chú ý:

(1) Một đồ thị vô hướng liên thông có *n* đỉnh thì có ít nhất *n – 1* cạnh.

(2) ***Dấu hiệu nhận biết đồ thị liên thông:*** Đồ thị vô hướng G là liên thông (hoặc đồ thị có hướng G là liên thông mạnh) khi và chỉ khi ma trận tổng các lũy thừa $T = A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{n-1}$ có mọi phần tử đều khác không (ở đây, n là số đỉnh và A là ma trận kề của G).

(3) Khi xóa đi đỉnh cắt hoặc cầu ra khỏi một đồ thị liên thông thì đồ thị nhận được là không liên thông (tính liên thông mất đi).

(4) Đỉnh kề với một cầu là đỉnh cắt khi và chỉ khi nó không phải là một đỉnh treo.

(5) Một cạnh trong đơn đồ thị là cầu khi và chỉ khi cạnh này không có mặt trong bất kì chu trình đơn nào của đồ thị.

2.4. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG CỦA ĐỒ THỊ.

2.4.1. Tập ổn định trong. Số ổn định trong

Định nghĩa: Cho đồ thị $G = (X, U)$.

(1) Tập đỉnh A gọi là một *tập ổn định trong (ÔĐT)* của G nếu hai đỉnh tùy ý của nó không kề nhau. Hay nói cách khác, $\forall x, \forall y \in A$ thì $y \notin Ke(x)$.

(2) Tập đỉnh A^* gọi là *tập ÔĐT cực đại* của G nếu A^* là một tập ÔĐT và thêm bất kì đỉnh nào cũng làm mất tính ổn định trong của nó. Hay nói cách khác, $\forall x \notin A^*$ thì $A^* \cup \{x\}$ không là tập ÔĐT.

(3) Tập đỉnh A_0 gọi là *tập ÔĐT lớn nhất* của G nếu A_0 là một tập ÔĐT cực đại có số đỉnh nhiều nhất. Ta gọi số phần tử của tập ÔĐT lớn nhất là *số ÔĐT của G*, kí hiệu là $\alpha(G)$.

Chú ý:

(1) Khái niệm ÔĐT không phụ thuộc vào hướng các cung của đồ thị, tức hai đỉnh được coi là kề nhau nếu có ít nhất một cung nối chúng.

(2) Nếu tập đỉnh A là một tập ÔĐT thì tập con $A' \subset A$ cũng là một tập ÔĐT.

(3) Kí hiệu: T là tập hợp tất cả các tập ÔĐT của G, $N(A)$ là số phần tử của tập hợp A thì $\alpha(G) = \max_{A \in T}\{N(A)\}$. Hay nói cách khác, không có tập ÔĐT nào có số đỉnh nhiều hơn $\alpha(G)$.

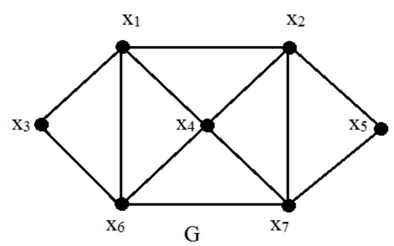
Thuật toán tìm số ÔĐT α(G) (hay tìm tập ổn định trong lớn nhất):

(1) : Chọn một đỉnh nào đó của G.

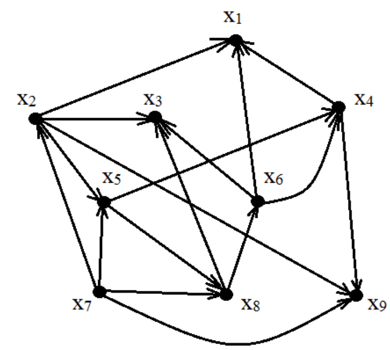
(2) : Bổ sung dần các đỉnh để được một tập ÔĐT cực đại của G.

(3) : Ta tìm một tập ÔĐT A_0 có k đỉnh mà mọi tập chứa $k+1$ đỉnh bất kì đều không phải là tập ÔĐT. Khi đó A_0 là tập ÔĐT cực đại có số phần tử lớn nhất. Và $\alpha(G) = N(A_0) = k$.

<u>*Ví dụ 1:*</u> *Tìm số ÔĐT của các đồ thị sau:*



Hình 2.19. Đồ thị vô hướng *G*.



Hình 2.20. Đồ thị có hướng *H*.

Giải. Áp dụng thuật toán tìm số ÔĐT ta có bảng kết quả đối với đồ thị vô hướng G:

Đỉnh (Bậc) / *Tập ÔĐT*	$x_1(4)$	$x_2(4)$	$x_3(2)$	$x_4(4)$	$x_5(2)$	$x_6(4)$	$x_7(4)$	$N(A_i)$
A_1	0	0	×	×	×	0	0	3
A_2	×	0	0	0	×	0	0	2
	...	...	...					

Vậy $A_1 = \{x_3; x_4; x_5\}$ là tập ÔĐT lớn nhất và $\boxed{\alpha(G) = N(A_1) = 3}$ *(không có tập ÔĐT nào có nhiều hơn 3 đỉnh).*

Bảng kết quả đối với đồ thị có hướng H:

Đỉnh / *Tập ÔĐT*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	$N(A_i)$
A_1	×	0	×	0	×	0	0	0	×	4
A_2	0	×	0	×	0	0	0	×	0	3
	...	...	...							

Vậy $A_1 = \{x_1, x_3, x_5, x_9\}$ là tập ÔĐT lớn nhất nên $\boxed{\alpha(H) = N(A_1) = 4}$ *(không có tập ÔĐT nào có nhiều hơn 4 đỉnh).*

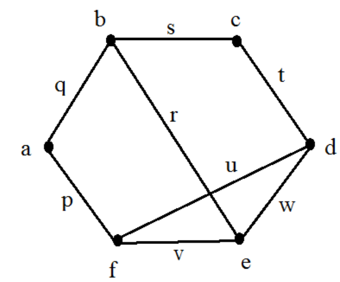
<u>Ví dụ 2:</u> (Bài toán về dung lượng thông tin). Giả sử một máy phát có thể truyền đi 6 tín hiệu: a, b, c, d, e, f. Ở máy thu mỗi tín hiệu có thể cho các cách hiểu khác nhau như sau: $a \to p, q; b \to q, r, s; c \to s, t; d \to t, u, w; e \to r, v, w; f \to p, u, v$. Hỏi số các tín hiệu nhiều nhất có thể sử dụng để máy thu không bị nhầm lẫn là bao nhiêu?

Giải. Ta xây dựng đồ thị mô hình cho bài toán trên như sau:

Mỗi đỉnh biểu diễn cho một tín hiệu; hai đỉnh là kề nhau nếu hai tín hiệu đó có thể bị nhầm lẫn ở máy thu (Chẳng hạn, máy thu bị nhầm lẫn tín hiệu a và b bởi chúng có cùng cách hiểu là q).

Khi đó, tập các tín hiệu mà máy thu không bị nhầm lẫn chính là một tập ÔĐT của đồ thị mô hình cho bài toán này.

Tập ÔĐT lớn nhất của đồ thị trên là A = {a; c; e}. Vậy số tín hiệu nhiều nhất có t hể sử dụng để máy thu không nhầm lẫn là 3, các tín hiệu sử dụng là: a, c, e.



Hình 2.21. Đồ thị biểu diễn sự nhầm lẫn của các tín hiệu

<u>Ví dụ 3:</u> Trong một đơn vị nào đó,giả sử có quan hệ "xích mích" giữa người với người. Thế thì, tập ÔĐT cực đại ở đây được hiểu theo đúng nghĩa xã hội của nó. Đó là một nhóm nhiều người nhất, đôi một không xích mích với nhau. Để giữ đoàn kết trong đơn vị thì cần phải xây dựng nhóm này càng lớn càng tốt.

2.4.2.Tập ổn định ngoài. Số ổn định ngoài

Định nghĩa: Cho đồ thị $G = (X, U)$.

(1) Tập đỉnh B gọi là *tập ổn định ngoài (ÔĐN)* của G nếu từ mỗi đỉnh nằm ngoài B đều có ít nhất một cạnh (cung) đi vào B.
Hay nói cách khác: $\forall y \notin B$ thì $\exists x \in B$ để $x \in Ke(y)$ tức $(y,x) \in U$.
(2) Tập đỉnh B^* gọi là *tập ÔĐN cực tiểu* của G nếu B^* là một tập ÔĐN và bớt đi bất kì đỉnh nào của nó cũng làm mất đi tính ÔĐN.
Hay nói cách khác, với mỗi $x \in B^*$ thì $B^* \backslash \{x\}$ không là tập ÔĐN.
(3) Tập B_0 gọi là *tập ÔĐN bé nhất* nếu B_0 là tập ÔĐN cực tiểu có số đỉnh ít nhất. Ta gọi số phần tử của tập *ÔĐN* bé nhất là *số ÔĐN* của G, kí hiệu là $\beta(G)$.

Chú ý :

(1) Nếu B là một tập ÔĐN thì tập $B' \supset B$ cũng là một tập ÔĐN .
(2) Gọi M là tập tất cả các tập ÔĐN của G, $N(B)$ là số phần tử của tập hợp B thì ta có: $\beta(G) = \min_{B \in M}\{N(B)\}$. Hay nói cách khác, không có tập ÔĐN nào có số đỉnh ít hơn $\beta(G)$.

Thuật toán tìm số ÔĐN β(G) (hay tìm tập ÔĐN bé nhất):

(1) : Với mỗi $x_i \in X$, ta xác định tập đỉnh $\Delta(x_i)$ như sau:

$$\Delta(x_i) = \{x_i\} \cup \{y \in X \mid x_i \in Ke(y) \text{ hay } (y, x_i) \in U\}.$$

(2) : Tìm tập con B_0 chứa số ít nhất các đỉnh x_i sao cho $\bigcup_{x_i \in B_0} \Delta(x_i) = X$. Khi đó B_0 là tập ÔĐN bé nhất của G. Và $\beta(G) = N(B_0)$.

*<u>Ví dụ 1 :</u> Tìm số ÔĐN của các đồ thị G và H trên **Hình 2.19** và **Hình 2.20***

Giải. Bảng kết quả xác định các tập đỉnh $\Delta(x_i)$ của G:

Đỉnh *Tập* $\Delta(x_i)$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$N(\Delta(x_i))$
$\Delta(x_1)$	×	×	×	×		×		5
$\Delta(x_2)$	×	×		×	×		×	5
$\Delta(x_3)$	×		×			×		3
$\Delta(x_4)$	×	×		×		×	×	5
$\Delta(x_5)$		×			×		×	3
$\Delta(x_6)$	×		×	×		×	×	5
$\Delta(x_7)$		×		×	×	×	×	5

Ta có cần ít nhất 2 tập: $\Delta(x_1) \cup \Delta(x_2) = X$ nên $B_0 = \{x_1; x_2\}$ là một tập ÔĐN bé nhất của G.

Vậy $\boxed{\beta(G) = N(B_0) = 2}$. *(Không có tập ÔĐN nào có số đỉnh ít hơn 2).*

Bảng kết quả xác định các tập đỉnh $\Delta(x_i)$ của H:

Đỉnh *Tập* $\Delta(x_i)$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	$N(\Delta(x_i))$
$\Delta(x_1)$	×	×		×		×				4
$\Delta(x_2)$		×					×			2
$\Delta(x_3)$		×	×			×		×		4
$\Delta(x_4)$				×	×	×				3
$\Delta(x_5)$		×			×		×			3
$\Delta(x_6)$						×		×		2
$\Delta(x_7)$							×			1
$\Delta(x_8)$					×		×	×		3
$\Delta(x_9)$		×		×			×		×	4

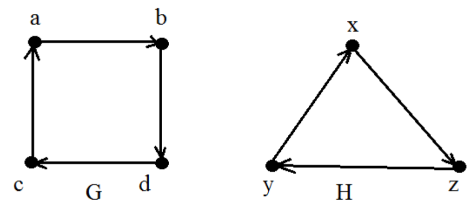
Ta có cần ít nhất 4 tập: $\Delta(x_1) \cup \Delta(x_3) \cup \Delta(x_9) \cup \Delta(x_4) = X$ nên $B_0 = \{x_1; x_3; x_9; x_4\}$ là tập ÔĐN bé nhất. Vậy: $\boxed{\beta(H) = 4}$ *. (Không có tập ÔĐN nào có ít hơn 4 phần tử).*

<u>Ví dụ 2:</u> Giả sử cần xây dựng một hệ thống trạm bảo vệ cho tất cả các đối tượng trong một khu vực nào đó (nhà máy, trường học, căn cứ quân sự, ...). Thế thì, hệ thống trạm tối thiểu làm tròn được trách nhiệm chính là một tập ÔĐN bé nhất của đồ thị biểu diễn khu vực này.

2.4.3. Nhân của đồ thị

Định nghĩa: Cho đồ thị *G = (X, U)*. Tập đỉnh *C* gọi là một nhân của *G* nếu *C* vừa là một tập ÔĐT, vừa là một tập ÔĐN. Hay nói cách khác, *C* là nhân của *G* ⇔ $\begin{cases}\forall x \in C, \forall y \in C \text{ thì } y \notin Ke(x) \\ \forall y \notin C \text{ thì } \exists x \in C | x \in Ke(y)\end{cases}$.

<u>Ví dụ 1:</u> Đồ thị G có hai nhân là $C_1 = \{a; d\}$ và $C_2 = \{b; c\}$. Đồ thị H không có nhân (Vì H có 3 tập ÔĐT đều có một đỉnh nhưng cả 3 tập này đều không phải là tập ÔĐN).



Hình 2.22. Đồ thị có nhân *G* và đồ thị không có nhân *H*.

Các tính chất của nhân:

(1) Nhân của đồ thị không chứa đỉnh nút (đỉnh kề với một khuyên). Nếu đỉnh *x* không có cạnh (cung) đi ra, tức $Ke(x) = \emptyset$, thì nhân *C* của *G* (nếu có) phải chứa đỉnh này.
(2) Trong đồ thị vô hướng, không có khuyên, *mọi tập ÔĐT cực đại đều là nhân của đồ thị.*
(3) Nếu *C là nhân của G* thì *C là một tập ÔĐT cực đại*. Suy ra, $N(C) \le \alpha(G)$.
(4) Nếu C_0 là *nhân bé nhất* (có số đỉnh ít nhất) của *G* thì *C_0 là tập ÔĐN cực tiểu của G.* Suy ra $N(C_0) \ge \beta(G)$.
(5) Nếu một đồ thị có *số ÔĐT $\alpha(G)$ bé hơn số ÔĐN $\beta(G)$* thì đồ thị ấy *không có nhân*.
(6) Mọi đồ thị *không có chu trình độ dài lẻ luôn có nhân*. Hệ quả: đồ thị *không có chu trình thì cũng luôn có nhân*.

Thuật toán tìm nhân bé nhất (hay tất cả các nhân của đồ thị G):

(1) : Tìm tất cả các tập ÔĐN bé nhất của *G*.
(2) : Chọn một tập ÔĐN bé nhất ở trên, kiểm tra xem nó có phải là tập ÔĐT không. Nếu đúng thì nhận được nhân bé nhất cần tìm (có ít đỉnh nhất).
(3) : Tăng dần số phần tử của tập ÔĐN, lặp lại bước 2 để tìm tất cả các nhân của *G*.

<u>Ví dụ 2:</u> Tìm tất cả các nhân (nếu có) của các đồ thị G và H trong ***Hình 2.19*** *và* ***Hình 2.20****.*

Giải.

Từ bảng xác định các tập Δ(x_i) suy ra:

Các tập ÔĐN cực tiểu của G là B_1 = {1; 2}, B_2 = {1; 5}, B_3 = {1; 7}, B_4 = {2, 3}; B_5 = {2; 6}, B_6 = {3; 4; 5}, B_7 = {3; 7}, B_8 = {5; 6}, B_9 = {6; 7}. Vậy G có tất cả 7 nhân là: B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8.

Các tập ÔĐN cực tiểu của H là B_1 = {1; 3; 9; 4}, B_2 = {1; 3; 9; 5}, B_3 = {1; 3; 9; 8}. Vậy H có một nhân duy nhất, đó là B_2 = {1; 3; 9; 5}.

2.4.4. Sắc số của đồ thị - Sắc số của đồ thị phẳng - Ứng dụng.

Bài toán tô màu đồ thị: Hãy tô màu các đỉnh của đồ thị đã cho, sao cho hai đỉnh kề nhau phải được tô bằng hai màu khác nhau.

Định nghĩa: Cho $G = (X, U)$. Sắc số của đồ thị G, kí hiệu là $\lambda(G)$, là số màu tối thiểu cần dùng để tô màu cho các đỉnh của G sao cho hai đỉnh kề nhau có màu khác nhau.

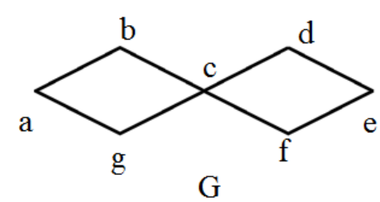
Nhận xét:

(1) Hai đỉnh tô cùng màu không kề nhau. Hay nói cách khác, gọi A_k là tập gồm tất cả các đỉnh được tô màu k, thế thì A_k là một tập ổn định trong của G.
(2) Mỗi cách tô màu các đỉnh của G ứng với một cách phân hoạch tập đỉnh X thành các tập ÔĐT A_k không giao nhau, mỗi tập ứng với một màu.

<u>Ví dụ 1:</u>

Tô màu 1 cho các đỉnh a; c; e. Màu 2 cho các đỉnh b; d; g; f.

Vậy $\lambda(G)$ = 2. (Không thể dùng ít hơn hai màu để tô cho các đỉnh của G).



Hình 2.23. Đồ thị không có chu trình lẻ *G*.

Một số tính chất của sắc số:

(1) : Đồ thị đầy đủ K_n có sắc số $\lambda(K_n) = n$. *Hệ quả:* Nếu G có một đồ thị con là K_n thì $\lambda(G) \geq n$.
(2) : Đồ thị vô hướng G có sắc số $\lambda(G)$= 2 khi và chỉ khi *G không có chu trình có độ dài lẻ.*
Hệ quả: Nếu G chứa một chu trình độ dài 3 (hay độ dài lẻ) thì $\lambda(G) \geq 3$.
(3) : Nếu bậc lớn nhất của các đỉnh trong G là r thì $\lambda(G) \leq r+1$.
(4) : Nếu đồ thị vô hướng G có n đỉnh và sắc số $\lambda(G) = k$ thì $\alpha(G) \geq \frac{n}{k}$.

(5) : Nếu G là đồ thị phẳng thì sắc số $\lambda(G) \leq 4$. (Khái niệm đồ thị phẳng và dấu hiệu nhận biết đồ thị phẳng xem trong ***Chương 3***)

Thuật toán tìm sắc số $\lambda(G)$ của đồ thị không có khuyên:

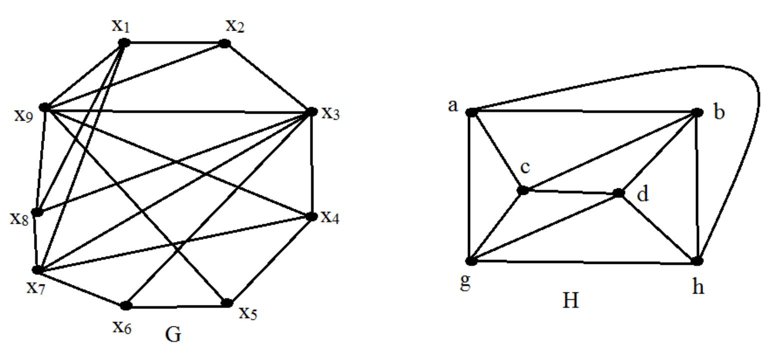
(1) : Liệt kê các đỉnh theo thứ tự bậc giảm dần: $deg(x_1) \geq deg(x_2) \geq .... \geq deg(x_n)$.

(2) : Tìm tập ÔĐT ∇_1 chứa đỉnh có bậc cao nhất x_1 (các đỉnh theo thứ tự ưu tiên bậc cao đưa vào trước). Hay nói cách khác, tô màu 1 cho đỉnh có bậc cao nhất x_1 cùng các đỉnh không kề với x_1, đồng thời không kề với các đỉnh đã tô màu 1.

(3) : Lặp lại B1-B2 đối với các đỉnh chưa được chọn (tô màu), dừng khi tất cả các đỉnh đã được chọn hết.

Kết luận: Sắc số của đồ thị $\lambda(G)$ = Số tập ÔĐT ∇_i .

<u>Ví dụ 2:</u> Tô màu các đỉnh cho hai đồ thị sau:

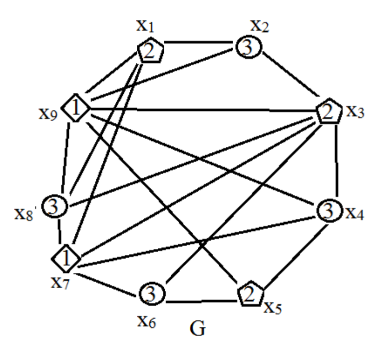


Hình 2.24. Đồ thị *G* và đồ thị *H*

Giải.

a) Tô màu các đỉnh cho đồ thị G

Đỉnh x	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
Deg(x)	*4*	*3*	*6*	*4*	*3*	*3*	*5*	*4*	*6*
Thứ tự đỉnh	***9***	***3***	***7***	***1***	***4***	***8***	***2***	***5***	***6***
Màu	1	2	1	2	3	3	3	2	3

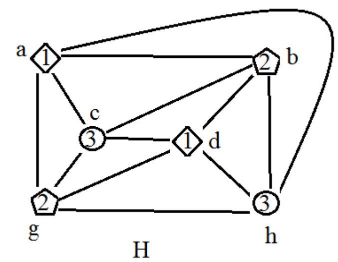


Hình 2.24a. Tô màu đồ thị *G*.

Vậy λ(G) = 3 (Không thể dùng ít hơn 3 màu để tô cho các đỉnh của G sao cho các đỉnh kề nhau được tô màu khác nhau).

b) *Tô màu các đỉnh cho đồ thị H.*

Đỉnh x	*a*	*b*	*c*	*d*	*g*	*h*
Deg(x)	*4*	*4*	*4*	*4*	*4*	*4*
Thứ tự đỉnh	***a***	***b***	***c***	***d***	***g***	***h***
Màu	1	2	3	1	2	3



Hình 2.24b. Tô màu đồ thị *H*.

Vậy λ(G) = 3 (Không thể dùng ít hơn 3 màu để tô cho các đỉnh của G sao cho các đỉnh kề nhau được tô màu khác nhau).

Ứng dụng của sắc số:

Bài toán 1 (lập lịch thi): Lập lịch thi *n* môn học (hay cần tổ chức bao nhiêu ca thi) cho các sinh viên, sao cho không có hai sinh viên nào có hai môn thi vào cùng một thời điểm.

Giải. Ta xây dựng một đồ thị mô hình cho bài toán trên như sau: Mỗi đỉnh là một môn thi, giữa hai đỉnh có một cạnh nối nếu có ít nhất một sinh viên phải thi cả hai môn tương ứng với hai đỉnh đó.

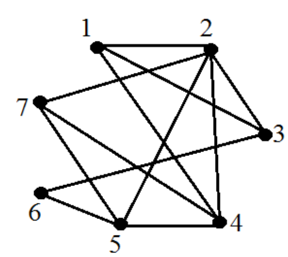
Ta tô màu cho các đỉnh của đồ thị. Các đỉnh cùng màu được phép thi cùng một ca thi.

Vậy: Số ca thi bằng sắc số của đồ thị đã lập.

<u>Ví dụ 3:</u> Trong một học kì, một bộ môn cần tổ chức 7 môn thi được đánh số từ 1 đến 7. Có ít nhất một sinh viên phải thi các nhóm môn thi sau: (1; 2; 3), (1; 2; 4), (2; 5), (2; 7), (3; 6), (4; 5), (4;7), (5; 6), (5; 7). Hãy lập lịch thi cho nhóm sinh viên này.

Giải.

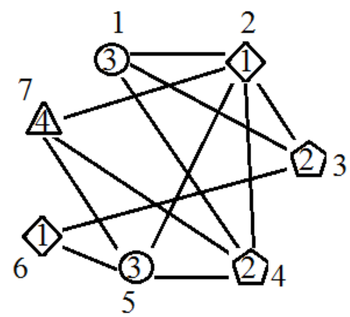
Đồ thị mô hình cho ví dụ này là:



Hình 2.25. Đồ thị mô hình cho bài toán lập lịch thi

Tô màu các đỉnh của đồ thị trên:

Đỉnh x	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
Deg(x)	*3*	*5*	*3*	*4*	*4*	*2*	*3*
Thứ tự đỉnh	***2***	***4***	***5***	***1***	***3***	***7***	***6***
Màu	1	2	3	3	2	4	1



Hình 2.26. Tô màu đồ thị lập lịch thi

Vậy : λ(G) = 4. Cần tổ chức ít nhất 4 ca thi khác nhau cho 7 môn này: Ca 1 thi môn {2;6}; Ca 2 thi môn {3;4}; Ca 3 thi môn {1;5}; Ca 4 thi môn {7}.

Bài toán 2 (tô màu bản đồ): Cần dùng tối thiểu bao nhiêu màu để tô màu một bản đồ sao cho hai miền có chung đường biên phải được tô bằng hai màu khác nhau.

Giải. Ta xây dựng đồ thị mô hình cho bài toán trên như sau: Mỗi miền trên bản đồ đặt tương ứng với một đỉnh, giữa hai đỉnh có một cạnh nối nếu hai miền tương ứng có chung đường biên.

Ta tô màu cho các đỉnh của đồ thị. Hai đỉnh được tô cùng một màu thì hai miền tương ứng không có chung đường biên. Vậy số màu ít nhất cần dùng bằng sắc số của đồ thị đã lập.

Bài toán 3 (phân chia kênh truyền hình): Giả sử mỗi đài phát truyền hình được phát nhiều kênh truyền hình khác nhau, mỗi kênh truyền hình phủ sóng trong phạm vi bán kính 100km. Khu vực đồng bằng Bắc Bộ có tất cả 25 đài phát truyền hình. Hỏi phải cần tối thiểu bao nhiêu kênh phát sóng và phân chia cho các đài như thế nào để không có hai đài phát nào bị trùng kênh trong vùng phủ sóng của nó.

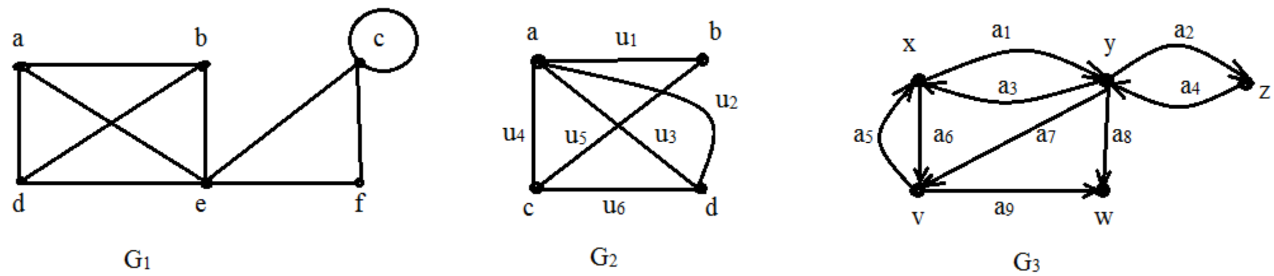
Giải. Ta xây dựng đồ thị mô hình cho bài toán: Mỗi đỉnh tương ứng với một đài phát. Hai đài phát có khoảng cách từ 200km trở xuống được nối với nhau bằng một cạnh. Hai đỉnh không kề nhau được phép phát cùng một kênh.

Để phân chia các kênh truyền hình cho các đài phát ta tô màu cho các đỉnh của đồ thị. Khi đó, các đỉnh cùng màu được phép phát cùng một kênh. Số kênh tối thiểu cần dùng bằng sắc số của đồ thị đó.

BÀI TẬP CHƯƠNG 2.

2.1*. Cho tập hợp X có n phần tử. Xây dựng đồ thị vô hướng mà mỗi đỉnh của nó là một tập con thực sự của tập X. Hai đỉnh được nối với nhau bằng một cạnh khi và chỉ khi các tập con tương ứng với chúng giao nhau. Hỏi đồ thị trên có bao nhiêu đỉnh, bao nhiêu cạnh.

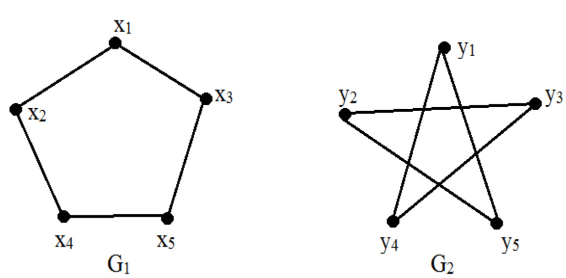
2.2. Cho các đồ thị:



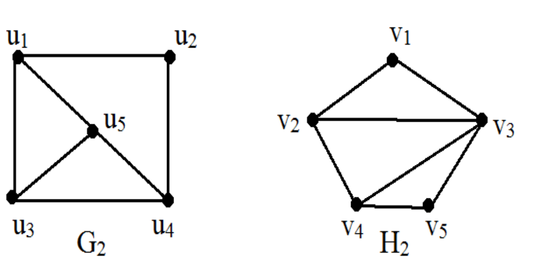
a) Đồ thị nào là đơn đồ thị, đa đồ thị, giả đồ thị vô hướng (có hướng)?
b) Hãy xác định danh sách kề của G_1.
c) Hãy xác định ma trận kề và ma trận liên thuộc của G_2; G_3.
d) Có bao nhiêu đường đi có độ dài 2 từ đỉnh a đến đỉnh c trong G_2?
e) Có bao nhiêu đường đi có độ dài 3 từ đỉnh x đến đỉnh w trong G_3?

2.3. Các cặp đơn đồ thị sau có đẳng cấu với nhau không? Tại sao?

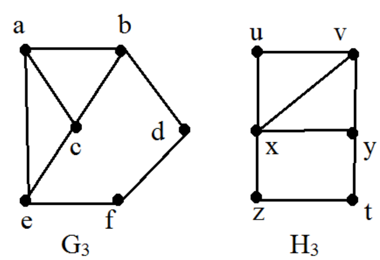
a)



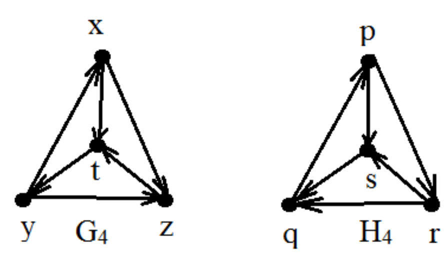
b)



c)



d)



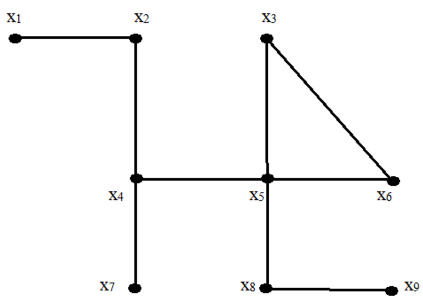
2.4. Hãy xét xem các đồ thị cho bởi ma trận kề sau có liên thông mạnh không? Tại sao?

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

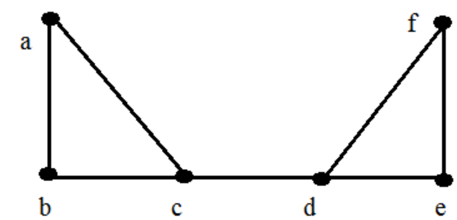
b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2.5. Tìm các đỉnh cắt và cạnh cắt của mỗi đồ thị sau:

a)

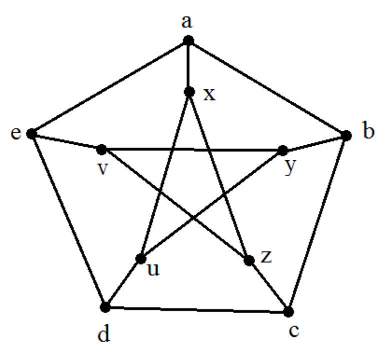


b)

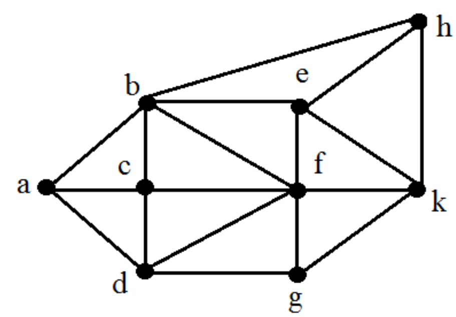


2.6. Tìm số ÔĐT, số ÔĐN, tất cả các nhân và sắc số của các đồ thị vô hướng sau:

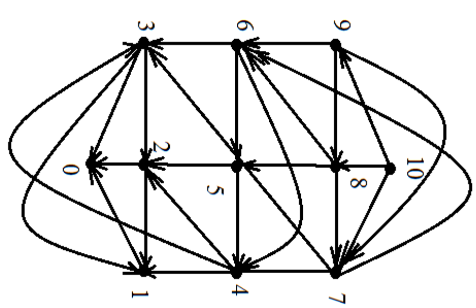
a)



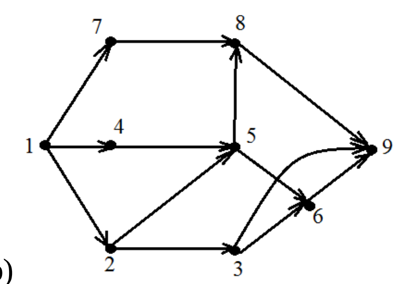
b)



2.7. Tìm số ÔĐT, số ÔĐN, tất cả các nhân và sắc số của các đồ thị có hướng sau:

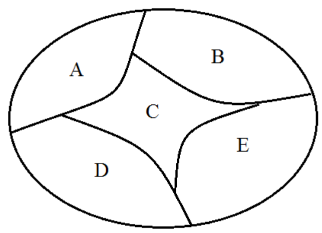


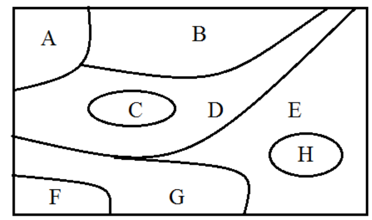
a)



b)

2.8. Tìm số màu tối thiểu cần dùng để tô hai bản đồ sau sao cho các vùng có chung đường biên được tô bởi các màu khác nhau.

a) 

b) 

2.9. Cho 9 đài truyền hình (đánh số từ 1 đến 9). Khoảng cách giữa các đài (đơn vị km) được cho bởi bảng sau:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		150	210	290	268	287	145	157	164
2	150		136	231	301	293	224	209	172
3	210	136		147	456	177	158	139	192
4	290	231	147		137	218	109	263	118
5	268	301	456	137		140	307	291	182
6	287	293	177	218	140		182	214	237
7	145	224	158	109	307	182		159	375
8	157	209	139	263	291	214	159		167
9	164	172	192	118	182	237	375	167	

Mỗi đài phủ sóng trong phạm vi 100km. Để không có hai đài phát nào bị trùng kênh trong vùng phủ sóng thì cần tối thiểu bao nhiêu kênh khác nhau để phát sóng? Hãy lập kế hoạch cụ thể để phân chia các kênh đó cho 9 đài phát?

Chương 3.

ĐỒ THỊ EULER. ĐỒ THỊ HAMILTON. ĐỒ THỊ PHÂN ĐÔI. ĐỒ THỊ PHẲNG.

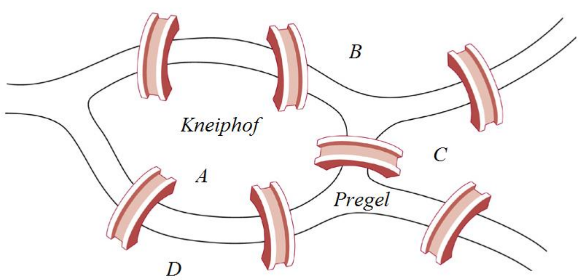
Mục tiêu: Người học xác định và nhận diện được đồ thị Euler, nửa Euler. Ứng dụng được đồ thị Euler vào để giải bài toán người đưa thư Trung Hoa. Người học xác định và nhận diện được đồ thị Hamilton, nửa Hamilton. Ứng dụng được đồ thị Hamilton vào để giải bài toán sắp xếp chỗ ngồi. Người học xác định và nhận diện được đồ thị phẳng, cũng như đồ thị không phẳng. Đặc biệt, biết sử dụng thuật toán nhận biết đồ thị phân đôi để nhận diện đồ thị phân đôi.

3.1 ĐỒ THỊ EULLER. ĐỒ THỊ NỬA EULER.

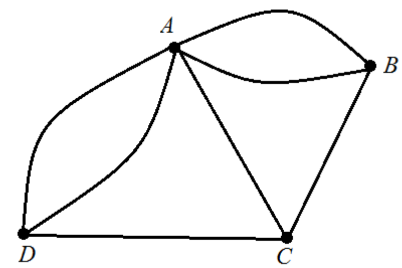
Khái niệm đồ thị Euler, đồ thị nửa Euler trong Lý thuyết đồ thị được ra đời từ bài toán nổi tiếng sau:

Bài toán 7 cây cầu ở Konigsberg:

Thành phố Konigsberg (bây giờ gọi là Kaliningrad thuộc Cộng hòa Nga) có con sông Pregel chảy qua, giữa sông có cù lao Kneiphof tạo nên 4 vùng đất. Vào giữa thế kỉ thứ 18 người ta đã xây 7 chiếc cầu nối các vùng này với nhau.



Hình 3.1. Bảy cây cầu trên sông Pregel.



Hình 3.2. Đa đồ thị biểu diễn thành phố Konigsberg.

Cư dân thành phố thường đi dạo trên cầu và tự hỏi : CÓ THỂ ĐI QUA 7 CÂY CẦU, MỖI CÂY CẦU MỘT LẦN RỒI QUAY VỀ ĐÚNG VỊ TRÍ XUẤT PHÁT KHÔNG? Họ háo hức đi thử nhưng không thành công.

Cuối cùng, nhà toán học Thụy sỹ, *Leonhard Euler* đã chứng minh được rằng không có cách đi nào thỏa mãn yêu cầu bài toán này. Lời giải của ông công bố năm 1736, Euler đã nghiên cứu bài toán này, mô hình nó bằng một đa đồ thị, bốn vùng đất được biểu diễn bằng 4 đỉnh, các cây cầu là các cạnh như trên ***Hình 3.2.***

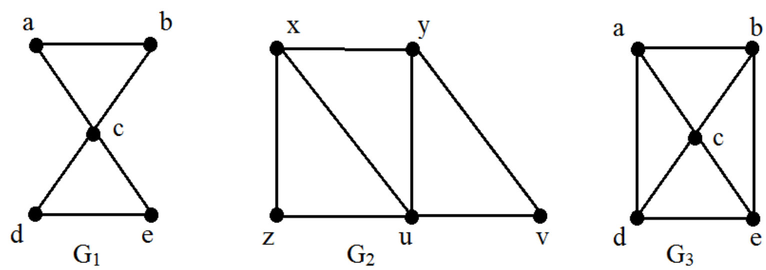
Bài toán phát biểu lại là : Có tồn tại hay không một chu trình đơn trong đồ thị này có chứa tất cả các cạnh?

3.1.1. Định nghĩa. Cho đồ thị *G = (X, U)*.

Chu trình Euler của đồ thị *G* là chu trình đơn đi qua tất cả các cạnh (cung) của *G*, mỗi cạnh (cung) đúng một lần. *Đường đi Euler* của đồ thị *G* là đường đơn đi qua tất cả các cạnh (cung) của *G*, mỗi cạnh (cung) đúng một lần. Đồ thị có chu trình Euler gọi là *đồ thị Euler*. Đồ thị không có chu trình Euler nhưng có đường đi Euler được gọi là *đồ thị nửa Euler.*

Hiển nhiên, đồ thị *G* không phải là đồ thị nửa Euler thì chắc chắn cũng không phải là đồ thị Euler.

Ví dụ 1:

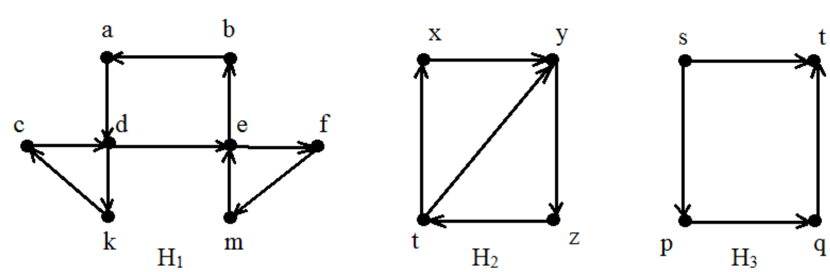


Hình 3.3. Đồ thị vô hướng Euler và đồ thị vô hướng nửa Euler.

Đồ thị vô hướng G_1 có chu trình Euler là <a; b; c; d; e; c; a>. Đồ thị G_2 không có chu trình Euler nhưng có đường đi Euler là <x; y; v; u; z; x; u; y>. Đồ thị G_3 không có chu trình Euler và không có cả đường đi Euler.

Vậy G_1 là đồ thị Euler, G_2 là đồ thị nửa Euler, G_3 không phải đồ thị Euler cũng không phải đồ thị nửa Euler.

Ví dụ 2:



Hình 3.4. Đồ thị có hướng Euler H_1 và đồ thị có hướng nửa Euler H_2.

Đồ thị có hướng H_1 có chu trình Euler là <a; d; k; c; d; e; f; m; e; b; a>. Đồ thị H_2 không có chu trình Euler nhưng có đường đi Euler là <t; x; y; z; t; y>. Đồ thị H_3 không có chu trình Euler và không có cả đường đi Euler.

Vậy H_1 là đồ thị Euler, H_2 là đồ thị nửa Euler, H_3 không phải đồ thị Euler và cũng không phải đồ thị nửa Euler.

3.1.2. Nhận biết đồ thị Euler, nửa Euler. Thuật toán tìm chu trình Euler, đường đi Euler.

Định lý Euler: Đồ thị vô hướng liên thông *G* là đồ thị Euler khi và chỉ khi *mọi đỉnh của G đều có bậc chẵn*. Đồ thị có hướng liên thông mạnh *G* là đồ thị Euler khi và chỉ khi *mọi đỉnh của nó có bán bậc vào bằng bán bậc ra (hay mọi đỉnh cân bằng).*

Hệ quả : Đồ thị vô hướng liên thông *G* là đồ thị nửa Euler khi và chỉ khi *G có đúng hai đỉnh bậc lẻ*. Đồ thị có hướng liên thông mạnh *G* là đồ thị nửa Euler khi và chỉ khi *G có đúng 2 đỉnh x, y thỏa mãn:* $deg^+(x) = deg^-(x) + 1$ *và* $deg^-(y) = deg^+(y) + 1$*, đồng thời các đỉnh còn lại của nó thì cân bằng (tức là có bán bậc vào bằng bán bậc ra).*

Thuật toán tìm chu trình Euler:

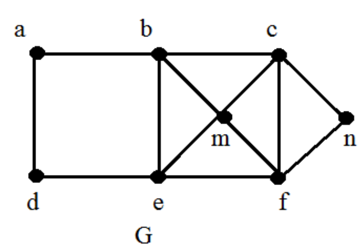
(1) **:** Kiểm tra tính liên thông, xác định bậc của các đỉnh để khẳng định *G* có chu trình (hay đường đi) Euler.

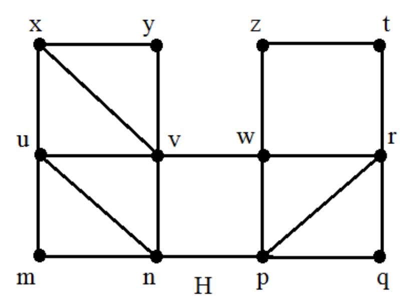
(2) **:** Từ một đỉnh bất kì của *G*, đi theo các cạnh (cung) để tìm một chu trình đơn, đồng thời đánh dấu để xóa bỏ cạnh (cung) đã đi qua, không đi qua cầu (cạnh cắt), trừ khi không còn cách nào khác.

(3) **:** Thuật toán dừng nếu chu trình đơn tìm được đã đi qua tất cả các cạnh (cung). Trái lại, đi tiếp lặp lại (2) cho đến khi tất cả các cạnh (cung) đã đi qua.

Thuật toán tìm đường đi Euler: Tương tự như tìm chu trình Euler, nhưng đường đi Euler trong đồ thị vô hướng bao giờ cũng xuất phát từ đỉnh bậc lẻ này và kết thúc ở đỉnh bậc lẻ kia ; còn trong đồ thị có hướng thì đường đi Euler bao giờ cũng đi từ đỉnh có số cung đi ra nhiều hơn và kết thúc ở đỉnh có số cung đi vào ít hơn.

<u>*Ví dụ 1:*</u> *Đồ thị sau có phải đồ thị Euler (nửa Euler) không? Tìm chu trình (đường đi) Euler nếu có?*





Hình 3.5. Đồ thị *G* và đồ thị *H*.

Giải.

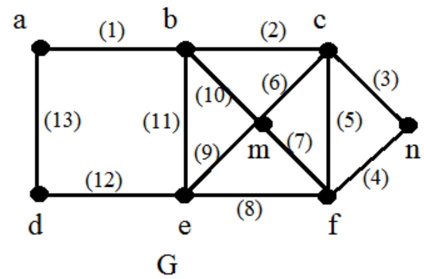
a) *Bậc của các đỉnh của G:*

Đỉnh	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*m*	*n*
Bậc	*2*	*4*	*4*	*2*	*4*	*4*	*4*	*2*

G là đồ thị vô hướng liên thông và mọi đỉnh đều có bậc chẵn nên G là đồ thị Euler.

Số cạnh của G là $m = \frac{1}{2}\sum_{x\in X} \deg(x) = \frac{26}{2} = 13$ *(cạnh)*

Một chu trình Euler của G được tìm như ***Hình 3.5a***. *Chu trình đó là : <a; b; c; n; f ; c ; m ; f; e; m; b; e; d; a> .*



Hình 3.5a. Chu trình Euler của G.
(Lưu ý : Sau khi chọn cạnh (1) thì cạnh (12) và (13) là cầu.)

b) *Bậc của các đỉnh của H:*

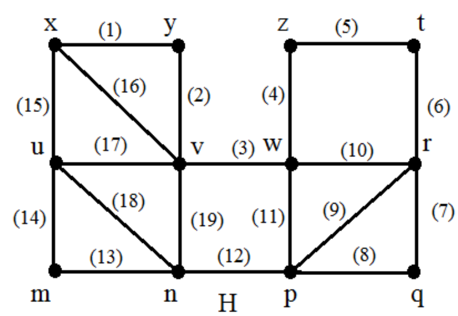
Đỉnh	*x*	*Y*	*z*	*t*	*u*	*v*	*w*	*r*	*m*	*n*	*p*	*q*
Bậc	*3*	*2*	*2*	*2*	*4*	*5*	*4*	*4*	*2*	*4*	*4*	*2*

H là đồ thị vô hướng liên thông và có đúng hai đỉnh bậc lẻ nên H là đồ thị nửa Euler.

Số cạnh của H là $m = \frac{1}{2}\sum_{x\in X} \deg(x) = \frac{38}{2} = 19$ *(cạnh)*

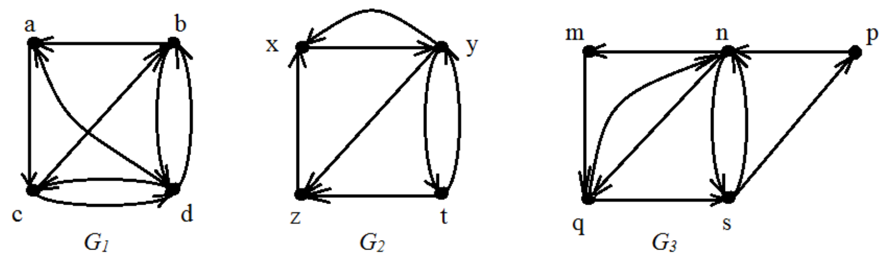
Một đường đi Euler của H đi từ đỉnh bậc lẻ x và kết thúc ở đỉnh bậc lẻ v là như ***Hình 3.5b***. *(Lưu ý: sau khi chọn cạnh (3) thì cạnh (12) là cầu).*

Đó là đường đi : <x; y; v; w; z ; t ; r ; q; p; r; w; p; n; m; u; x; v; u; n; v>.



Hình 3.5b. Đường đi Euler của *H*.

<u>*Ví dụ 2:*</u> *Trong các đồ thị có hướng sau, đồ thị nào là đồ thị Euler, đồ thị nửa Euler? Tìm chu trình, đường đi Euler nếu có?*



Hình 3.6. Đồ thị có hướng G_1 , G_2 , G_3 .

Giải.

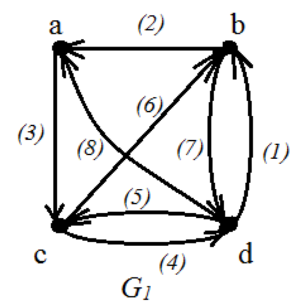
a) *Bán bậc ra và bán bậc vào của các đỉnh trong G_1 là:*

Đỉnh x_i	*a*	*b*	*c*	*d*
$Deg^+(x_i)$	*1*	*2*	*2*	*3*
$Deg^-(x_i)$	*2*	*2*	*2*	*2*

Suy ra G_1 là đồ thị nửa Euler.

Số cung của G_1 là $m = \sum_{x \in X} \deg^+(x) = 8$ *(cung)*

Một đường đi Euler của G_1 đi ra từ d và kết thúc ở đỉnh a là như ***Hình 3.6a****. (Lưu ý : sau khi chọn cung (3) thì cung (8) trở thành cầu).*



Hình 3.6a. Đường đi Euler của G_1

Đường đi đó là : <d ;b ;a ;c ;d ;c ;b ;d ;a>.

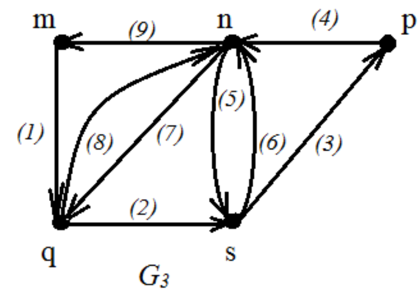
b) *Bán bậc ra và bán bậc vào của các đỉnh trong G_2 là:*

Đỉnh x_i	*x*	*y*	*z*	*t*
$Deg^+(x_i)$	*1*	*3*	*1*	*2*
$Deg^-(x_i)$	*2*	*2*	*2*	*1*

Đồ thị G_2 có hai đỉnh y, t có bán bậc ra hơn bán bậc vào 1 nên G_2 không phải là đồ thị nửa Euler.

c) *Bán bậc ra và bán bậc vào của các đỉnh trong G_3 là:*

Đỉnh x_i	m	n	p	q	s
$Deg^+(x_i)$	1	3	1	2	2
$Deg^-(x_i)$	1	3	1	2	2



Hình 3.6b. Chu trình Euler của G_3

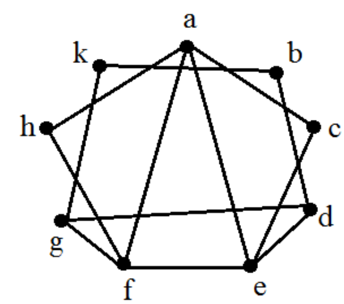
Đồ thị G_3 có bậc tại mỗi đỉnh cân bằng nên G_3 là một đồ thị Euler.

Số cung của G_3 là $m = \sum_{x \in X} \deg^+(x) = 9$ *(cung)*

Một chu trình Euler của G_3 được tìm như hình bên. (Lưu ý : sau khi chọn cung (1) thì cung (9) là cầu).

Chu trình đó là <m ;q ;s ;p ;n ;s ;n ;q ;n ;m>.

Ví dụ 3: *Bức hình trong* ***Hình 3.7*** *có vẽ được bằng một nét bút (không nhấc bút ra khỏi mặt giấy) mà không có phần nào của bức hình được vẽ lại hai lần không?*



Hình 3.7. Vẽ hình một nét

Giải.

Đồ thị trên ***Hình 3.7*** *có đúng 2 đỉnh bậc lẻ g và d nên nó có đường đi Euler. Vì vậy ta có thể vẽ bức hình này bằng một nét mà không nâng bút khỏi mặt giấy hoặc vẽ lại một phần của bức vẽ.*

Cụ thể ta vẽ theo đường đi Euler bắt đầu từ đỉnh g và kết thúc ở đỉnh d như sau: <g; k; b; d; g; f; a; e; f; h; a; c; e; d>.

3.1.3. Ứng dụng: Bài toán người đưa thư Trung Hoa.

Bài toán: Một bưu tá nhận thư ở bưu điện và phải đi qua một số phố để phát thư rồi quay về bưu điện. Bưu tá đó phải đi theo hành trình như thế nào để đường đi là ngắn nhất (giả thiết rằng mọi con phố có độ dài như nhau).

Giải. Đồ thị mô hình biểu diễn sơ đồ đi của bưu tá như sau: Coi mỗi con phố là một cạnh của đồ thị, các điểm giao cắt (ngã ba, ngã tư…) giữa các con phố là các đỉnh của đồ thị.

Bài toán trên được phát biểu lại là: Cho đơn đồ thị vô hướng liên thông $G = (X, U)$. Hãy tìm một chu trình T_0 ngắn nhất đi qua tất cả các cạnh của G.

Xảy ra hai trường hợp sau:

(1) : Nếu G là đồ thị Euler thì chu trình ngắn nhất T_0 cần tìm chính là một chu trình Euler của G, và có độ dài bằng $N(U)$.

(2) : Nếu G không là đồ thị Euler thì G có chứa đỉnh bậc lẻ và không có chu trình Euler. Mọi chu trình đi qua tất cả các cạnh của G sẽ đi qua một số cạnh nào đó ít nhất hai lần. Do T_0 là chu trình ngắn nhất nên T_0 chỉ *đi qua mỗi cạnh nhiều nhất hai lần*.

Để ý rằng, bằng cách vẽ thêm một số cạnh song song với các cạnh mà T_0 đi qua hai lần thì G sẽ trở thành một đồ thị Euler G_E và T_0 chính là một chu trình Euler trong G_E.

Gọi số cạnh mà T_0 đi qua hai lần là $m(G)$. Số cạnh $m(G)$ xác định theo thuật toán sau:

(1) : Xác định tập các đỉnh bậc lẻ $X_0(G) = \{x \in X | \deg(x)\ l\mathring{e}\}$. Gọi số đỉnh bậc lẻ của G là $2k$.

(2) : Phân hoạch X_0 thành k cặp. Gọi $P = \{P_1, P_2, ..., P_j\}$ là tập hợp tất cả các phân hoạch có thể có của X_0. Với mỗi phân hoạch P_i, ta xác định độ dài của phân hoạch P_i như sau: $d(P_i) = \sum_{(x,y)\in P_i} d(x,y)$, trong đó $d(x,y)$ = độ dài đường đi ngắn nhất từ đỉnh x đến đỉnh y.

(3) : Khi đó $m(G) = \min_{P_i \in P} d(P_i)$.

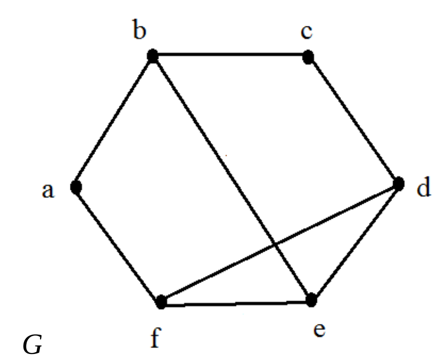
Kết luận, chu trình ngắn nhất T_0 đi qua tất cả các cạnh của G có độ dài là $N(U) + m(G)$. Chu trình đó chính là chu trình Euler trong đồ thị G_E.

<u>Ví dụ :</u> Tìm hành trình ngắn nhất của bài toán người đưa thư Trung Hoa với đồ thị sau:

Giải.

Đỉnh	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*e*
Bậc	2	3	2	3	3	3

Số cạnh của G là $m = \frac{1}{2}\sum_{x\in X}\deg(x) = 8$ *(cạnh).*



Hình 3.7a. Bài toán người đưa thư Trung Hoa.

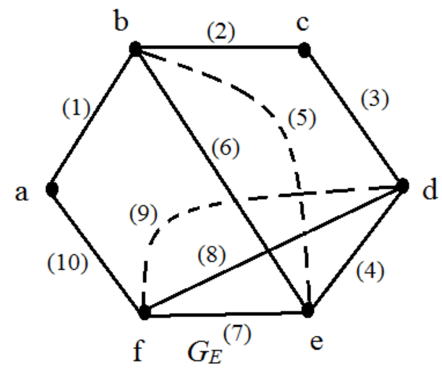
Tập các đỉnh bậc lẻ của G là $X_0 = \{b; d; e; f\}$*. Ta có 3 phân hoạch của* X_0 *là :*

$P_1 = \{(b,d) ; (e,f)\}$ => $d(P_1) = d(b,d) + d(e,f) = 2 + 1 = 3.$
$P_2 = \{(b,e) ; (d,f)\}$ => $d(P_2) = d(b,e) + d(d,f) = 1 + 1 = 2.$
$P_3 = \{(b,f) ; (d,e)\}$ => $d(P_1) = d(b,f) + d(d,e) = 2 + 1 = 3.$

Vậy $m(G) = 2$*. Chu trình ngắn nhất* T_0 *cần tìm có độ dài là* $m + m(G) = 10$ *(cạnh).*

Bằng cách vẽ thêm 2 cạnh (b, e) và (d, f) ta được đồ thị Euler G_E.

Vậy một chu trình ngắn nhất T_0 đi qua tất cả các cạnh của đồ thị G đã cho là: <a; b; c; d; e; b; e; f; d; f; a>.



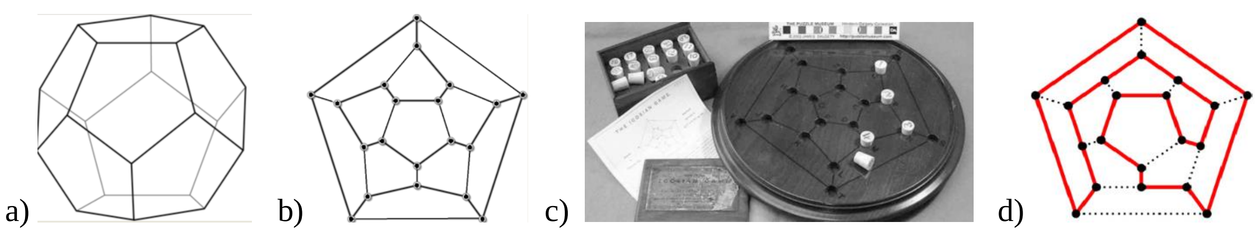
Hình 3.7b. Đồ thị Euler G_E.

3.2 ĐỒ THỊ HAMILTON. ĐỒ THỊ NỬA HAMILTON.

Khái niệm đồ thị Hamilton và đồ thị nửa Hamilton xuất phát từ trò chơi đố vui do *William Rowan Hamilton*, nhà toán học Ailen, nghĩ ra năm 1857 như sau:

Trò chơi "Vòng quanh thế giới":

Giả sử có một khối đa diện 12 mặt, mỗi mặt là một hình ngũ giác đều như **Hình 3.8a**. Mỗi đỉnh trong 20 đỉnh của khối này được đặt bằng tên của một thành phố. Hãy tìm một đường xuất phát từ một thành phố, đi dọc theo các cạnh của khối, ghé thăm 19 thành phố còn lại, mỗi thành phố đúng một lần, cuối cùng trở về thành phố ban đầu.



Hình 3.8. Trò chơi "Vòng quanh thế giới" của Hamilton.

Bài toán trên được phát biểu tương đương: Trong đồ thị trên **Hình 3.8b** có tồn tại hay không một chu trình đi qua mọi đỉnh, mỗi đỉnh đúng một lần?

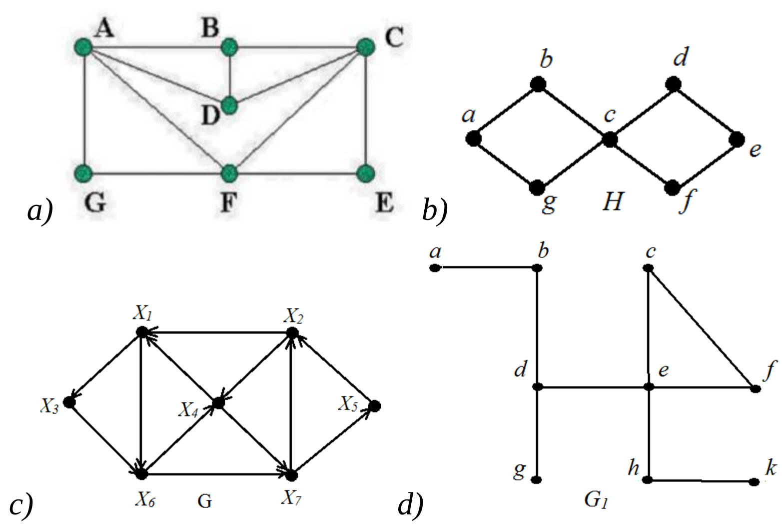
Một lời giải cho trò chơi này là **Hình 3.8d.**

3.2.1.Định nghĩa. Cho đồ thị $G = (X, U)$.

Chu trình Hamilton của đồ thị *G* là chu trình đơn đi qua tất cả các đỉnh của *G*, mỗi đỉnh đúng một lần. *Đường đi Hamilton* của *G* là đường đi đơn đi qua tất cả các đỉnh của *G*, mỗi đỉnh đúng một lần. Đồ thị có chu trình Hamilton gọi là đồ thị Hamilton. Đồ thị không có chu trình Hamilton, nhưng có đường đi Hamilton gọi là đồ thị nửa Hamilton.

Hiển nhiên, đồ thị *G* không phải là đồ thị nửa Hamilton thì chắc chắn không phải là đồ thị Hamilton.

*<u>Ví dụ :</u> Đồ thị trong **Hình 3.9a, Hình 3.9b** là đồ thị Hamilton, với các chu trình Hamilton là* $<G; A; B; D; C; E; F; G>$ *và* $<x_3; x_6; x_7; x_5; x_2; x_4; x_1; x_3>$. *Đồ thị H trong **Hình 3.9c** không có chu trình Hamilton, chỉ có đường đi Hamilton là* $<g; a; b; c; d; e; f>$. *Đồ thị trong **Hình 3.9d** không có chu trình Hamilton và không có đường đi Hamilton.*



Hình 3.9. Đồ thị Hamilton, đồ thị nửa Hamilton.

3.2.2. Nhận biết đồ thị Hamilton, nửa Hamilton.

Định lý 1: Cho đơn đồ thị vô hướng liên thông *G = (X,U)* có *n* đỉnh. Khi đó, *G* là đồ thị Hamilton khi và chỉ khi một trong các điều kiện sau xảy ra:

(1) $\forall x, y \in X,\ \deg(x) + \deg(y) \geq n$.

(2) $\forall x \in X,\ \deg(x) \geq \frac{n}{2}$.

Hệ quả :

(1) Đơn đồ thị vô hướng liên thông *G = (X,U)* có *n* đỉnh mà $\forall x \in X,\ \deg(x) \geq \frac{n-1}{2}$ thì *G* là đồ thị nửa Hamilton.

(2) Đơn đồ thị có hướng liên thông mạnh *G* mà $\forall x \in X$, $deg^{+}(x) \geq \frac{n}{2}$ và $deg^{-}(x) \geq \frac{n}{2}$ thì *G* là đồ thị Hamilton.

Định lý 2: *Đồ thị đấu loại* – là đồ thị trong đó hai đỉnh bất kì của nó được nối với nhau bởi đúng một cung, là đồ thị nửa Hamilton.

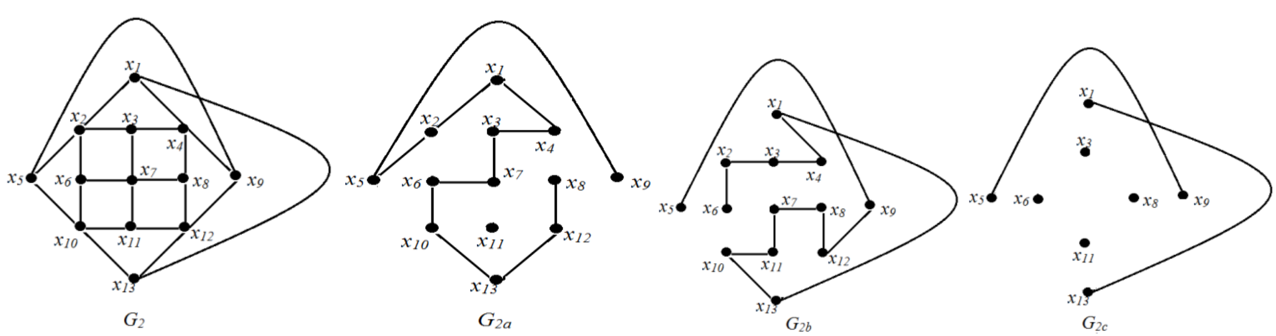
Định lý 3: Nếu xóa đi *k* đỉnh cùng các cạnh liên thuộc của một đơn đồ thị *G* liên thông mà được đồ thị con có nhiều hơn *k* thành phần liên thông thì *G* không phải là đồ thị Hamilton.

Một số quy tắc tìm chu trình (đường đi) Hamilton.

(1) Nếu G có một đỉnh bậc bé hơn 2 (tức *G* có đỉnh treo hoặc cô lập) thì *G* không phải là đồ thị Hamilton.
(2) Nếu một đỉnh *x* có bậc bằng 2 thì cả hai cạnh kề với đỉnh đó đều thuộc chu trình (đường đi) Hamilton cần tìm.
(3) Trong khi xây dựng chu trình Hamilton, sau khi lấy hai cạnh kề với một đỉnh nào đó thì phải loại bỏ mọi cạnh kề còn lại với đỉnh đó.
(4) Chu trình Hamilton không được chứa bất kì chu trình con nào. (Do vậy mọi đồ thị có một đỉnh kề với ba đỉnh bậc hai thì không phải là đồ thị Hamilton).

Chú ý: Quy tắc trên không phải là thuật toán, nên để tìm chu trình (đường đi) Hamilton phải thử tất cả các khả năng của các cạnh được chọn theo quy tắc trên.

<u>Ví dụ 1:</u> Chứng tỏ rằng đồ thị G_2 không có chu trình Hamilton nhưng có đường đi Hamilton?



Hình 3.10. Đồ thị nửa Hamilton G_2.

Đỉnh	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}
Bậc	*3*	*4*	*3*	*4*	*3*	*3*	*4*	*3*	*3*	*4*	*3*	*4*	*3*

Số cạnh N(U) = $\sum_{x \in X} \deg(x)$ *= 22 (cạnh).*

Để ý rằng khi xóa đi 5 đỉnh x_2, x_4, x_7, x_{10}, x_{12} ta được đồ thị con có 6 thành phần liên thông nên G không phải là đồ thị Hamilton.

Ta tìm đường đi Hamilton như sau:

Bước	*Cạnh chọn*	*Cạnh xóa*	*Đỉnh thăm*	*Số cạnh – đỉnh đã qua*
1	(x_1, x_2); (x_1, x_4)	(x_1, x_{13}), do đã chọn đủ 2 cạnh kề với x_1.	x_1, x_2, x_4	2 – 3
2	(x_{13}, x_{10}); (x_{13}, x_{12}), do x_{13} có bậc 2. (x_2, x_5)	(x_2, x_3); (x_2, x_6), do đã chọn đủ 2 cạnh kề x_2.	x_{13}, x_{10}, x_{12} x_5	5 – 7
3	(x_3, x_4); (x_3, x_7), do x_3 có bậc 2. (x_6, x_7); (x_6, x_{10}), do x_6 có bậc 2.	(x_4, x_8); (x_4, x_9), do đã chọn đủ 2 cạnh kề x_4. (x_7, x_8); (x_7, x_{11}), do đã chọn đủ 2 cạnh kề x_7. (x_{10}, x_{11}); (x_{10}, x_5), do đã chọn đủ 2 cạnh kề x_{10}.	x_3, x_7 x_6	9 – 10
4	(x_5, x_9) (x_8, x_{12})	(x_{12}, x_9) do tạo thành chu trình. (x_{12}, x_{11}) do đã chọn đủ 2 cạnh kề x_{12}.	x_9 x_8	11 – 12

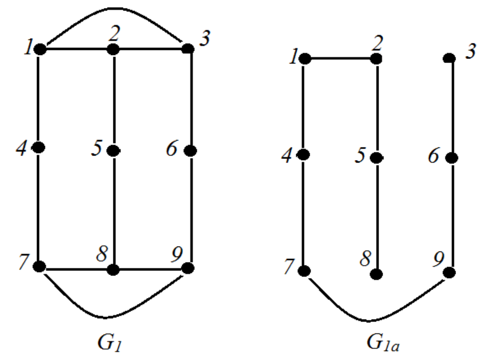
Chỉ chọn được 11 cạnh và chỉ qua được 12 đỉnh nên cách chọn này không tìm được đường đi Hamilton.

Cách chọn khác:

Bước	*Cạnh chọn*	*Cạnh xóa*	*Đỉnh thăm*	*Số cạnh – đỉnh đã qua*
1	(x_1, x_4); (x_1, x_{13})	(x_1, x_2)	x_1, x_4, x_{13}	2 – 3
2	(x_{13}, x_{10}) (x_4, x_3)	(x_{13}, x_{12}) (x_4, x_8); (x_4, x_9)	x_{10} x_3	4 – 5
3	(x_8, x_7); (x_8, x_{12}) (x_9, x_5); (x_9, x_{12})	(x_{12}, x_{11})	x_8, x_7, x_{12} x_9, x_5	8 – 10
4	(x_{11}, x_7) (x_{11}, x_{10})	(x_7, x_3); (x_7, x_6) (x_{10}, x_6); (x_{10}, x_5)	x_{11}	10 – 11
5	(x_3, x_2); (x_6, x_2)	(x_2, x_5)	x_2, x_6	12 – 13

Chọn được 12 cạnh và đi qua 13 đỉnh, có đường đi Hamilton là $<x_6, x_2, x_3, x_4, x_1, x_{13}, x_{10}, x_{11}, x_7, x_8, x_{12}, x_9, x_5>$ (13 đỉnh).

Ví dụ 2: *Xét xem G_1 có phải là đồ thị Hamilton, nửa Hamilton không? Tại sao?*



Hình 3.11. Đồ thị nửa Hamilton G_1.

Giải. Bậc của các đỉnh là:

Đỉnh	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Bậc	3	3	3	2	2	2	3	3	3

Số cạnh $N(U) = \sum_{x \in X} \deg(x) = 9$ *(cạnh).*

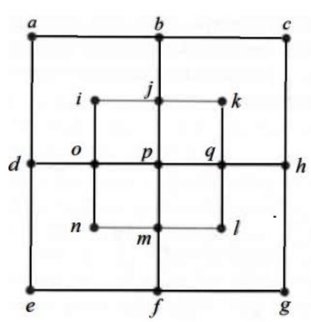
Ta có một cách chọn các cạnh như sau:

Bước	Cạnh chọn	Cạnh xóa	Đỉnh thăm	Số cạnh – đỉnh đã qua
1	(1, 4); (4, 7)		1, 4, 7	2 – 3
2	(2, 5); (5, 8)		2, 5, 8	4 – 6
3	(3, 6); (6, 9)		3, 6, 9	6 – 9
4	(1, 2)	(1, 3); (2, 3); (7, 8)		7 – 9
5	(7,9)	(8, 9)		8 – 9

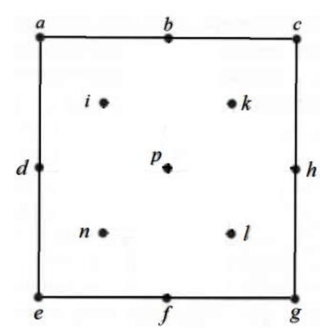
*Chọn được 8 cạnh và đi qua 9 đỉnh, có đường đi Hamilton là <3, 6, 9, 7, 4, 1, 2, 5, 8>. (Đồ thị G_{1a} trong **Hình 3.11**).*

Với các cách chọn khác cũng chỉ tìm được đường đi Hamilton nên G_1 không phải là đồ thị Hamilton, G_1 chỉ là nửa Hamilton.

Ví dụ 3. *Đồ thị sau có phải đồ thị Hamilton, nửa Hamilton không? Tìm chu trình, đường đi Hamilton nếu có?*



Hình 3.12. Đồ thị G.



Hình 3.13. Đồ thị con của G.

Giải.

Đỉnh	*a*	*b*	*c*	*h*	*g*	*f*	*e*	*d*	*o*	*i*	*j*	*k*	*q*	*t*	*m*	*n*	*p*
Bậc	*2*	*3*	*2*	*3*	*2*	*3*	*2*	*3*	*4*	*2*	*4*	*2*	*4*	*2*	*4*	*2*	*4*

Số cạnh N(U) = $\sum_{x \in X} \deg(x)$ *= 24 (cạnh)*

Để ý rằng xóa đi 4 đỉnh o, j, q, m và các cạnh kề với chúng ta thu được đồ thị con có 6 thành phần liên thông nên G không phải là đồ thị Hamilton. ***(Hình 3.13)***

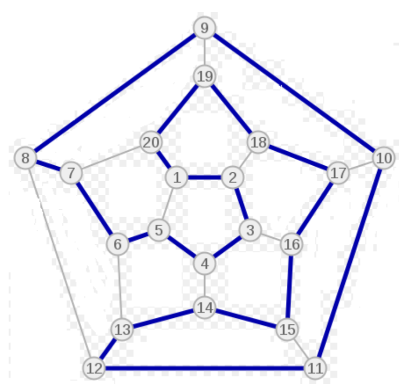
Ta tìm đường đi Hamilton như sau

Bước	Cạnh chọn	Cạnh xóa	Đỉnh thăm	Số cạnh – đỉnh đã qua
1	*(a,b); (a,d)*		*a, b, d*	*2 – 3*
2	*(e,d); (e,f)*	*(d,o)*	*e, f*	*4 – 5*
3	*(g,f); (g,h)*	*(f, m)*	*g, h*	*6 – 7*
4	*(c,b); (c,h)*	*(b, j); (h,q)*	*c*	*8 – 8*

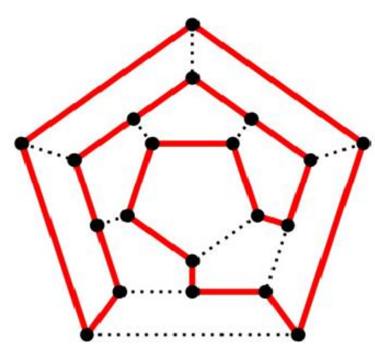
Chọn được 8 cạnh và đi qua 8 đỉnh nên có chu trình con C_1 *= <a, b, c, h, g, f, e, d, a>. Vậy G không có chu trình Hamilton.*

Tiếp tục chọn các cạnh tìm đường đi Hamilton, ta có chu trình C_2 *= <o, i, j, k, q, t, m, n, o> và đỉnh cô lập p. Không thể tạo thành đường đi Hamilton từ các chu trình* C_1*,* C_2 *và đỉnh p. Vậy G không là nửa Hamilton.*

Ví dụ 4 (Trò chơi "Vòng quanh thế giới":



a)



b)

Hình 3.14. Chu trình Hamilton trong trò chơi "Vòng quanh thế giới".

Giải. Mọi đỉnh của đồ thị đều có bậc bằng 3. Số cạnh = $\frac{1}{2}\sum_{x \in X} \deg(x)$ *= 30 (cạnh).*

Chọn được 20 cạnh và đi qua 20 đỉnh, có chu trình Hamilton là <1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20>. ***(Hình 3.14a)***

Một đáp án khác: <1,2,3,16,17,18,19,20,7,6,13,12,8,9,10,11,15,14,4,5,1>. ***(Hình 3.14b)***

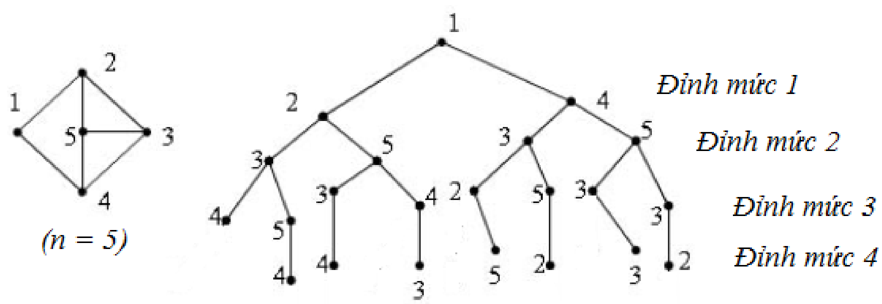
3.2.3. Cây liệt kê chu trình Hamilton.

Dùng để liệt kê tất cả các chu trình Hamilton trong đồ thị nhờ thuật toán quay lui, bằng việc phát phát triển dãy đỉnh kề. Quy tắc vẽ cây liệt kê chu trình, đường đi Hamilton:

(1) Chọn 1 đỉnh bất kì làm gốc.
(2) Ghép tất cả các cạnh liên thuộc với gốc ta được đỉnh mức 1.
(3) Từ mỗi đỉnh mức 1, ghép tất cả các cạnh liên thuộc với đỉnh này sao cho *không tạo thành chu trình* ta được đỉnh mức 2.

Cứ như vậy cho đến khi không thể ghép thêm được nữa.
Từ các đỉnh mức *n – 1* nếu có đường đi tới gốc thì có chu trình Hamilton, còn không có đường đi tới gốc thì có đường đi Hamilton.
Trong trường hợp đồ thị không có quá nhiều cạnh, dùng cây liệt kê ta có thể kiểm tra xem đồ thị có phải là Hamilton hay không.

Ví dụ: *Chọn đỉnh 1 làm gốc, ghép tất cả các đỉnh kề liên tiếp từ đỉnh này sao cho không tạo thành chu trình ta có cây liệt kê như sau:*



Hình 3.15. Cây liệt kê chu trình Hamilton.

Từ các đỉnh 4 và 2 (mức 4) có đường đi tới gốc nên ta có các chu trình Hamilton <1;2;3;5;4;1>; <1;2;5;3;4;1>; <1;4;3;5;2;1> và <1;4;5;3;2;1>.

Vậy đồ thị đã cho là đồ thị Hamilton. (Có hai chu trình Hamilton khác nhau là <1;4;3;5;2;1> và <1;4;5;3;2;1>).

3.2.4. Bài toán sắp xếp chỗ ngồi.

Bài toán : Có *n* đại biểu từ *n* nước đến dự hội nghị quốc tế. Mỗi ngày họp một lần ngồi quanh một bàn tròn. Hỏi phải bố trí bao nhiêu ngày và bố trí như thế nào sao cho trong mỗi ngày, mỗi người có hai người kế bên là bạn mới. (Lưu ý rằng *n* người đều muốn làm quen với nhau).

Xét đồ thị gồm *n* đỉnh, mỗi đỉnh ứng với mỗi người dự hội nghị, hai đỉnh kề nhau khi hai đại biểu tương ứng muốn làm quen với nhau. Như vậy, ta có đồ thị đầy đủ K_n. Đồ thị này là Hamilton và rõ ràng mỗi chu trình Hamilton là một cách sắp xếp như yêu cầu của bài toán.

Bài toán trở thành tìm các *chu trình Hamilton phân biệt* của đồ thị đầy đủ K_n (*hai chu trình Hamilton gọi là phân biệt nếu chúng* ***không có cạnh chung***).

Định lý: Trong K_n (với *n* lẻ, $n \geq 3$) có đúng $\frac{n-1}{2}$ chu trình Hamilton phân biệt.

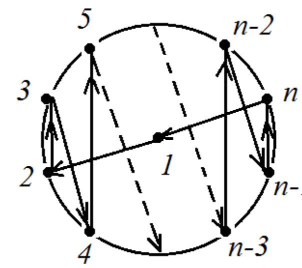
Chứng minh: K_n có $\frac{n(n-1)}{2}$ cạnh và mỗi chu trình Hamilton có *n* cạnh, nên số chu trình Hamilton phân biệt nhiều nhất là $\frac{n-1}{2}$.

Giả sử các đỉnh của K_n là *1, 2, ..., n*. Đặt đỉnh *1* tại tâm của một đường tròn và các đỉnh *2, ..., n* đặt cách đều nhau trên đường tròn sao cho đỉnh lẻ nằm ở nửa đường tròn trên và đỉnh chẵn nằm ở nửa đường tròn dưới (hai đỉnh liên tiếp cách nhau $\frac{1}{n-1}$ đường tròn).

Ta có ngay chu trình Hamilton đầu tiên là *<1; 2; ...; n;1>* (**Hình 3.16**).

Các đỉnh được giữ cố định, xoay khung theo chiều kim đồng hồ với các góc quay: $\frac{1}{n-1}$ đường tròn ta được $n-1$ chu trình Hamilton nhưng chỉ có $\frac{n-1}{2}$ chu trình Hamilton khác nhau.

Chu trình Hamilton cuối cùng thứ $\frac{n-1}{2}$ là *<1; n – 2; n; n – 4; n – 1; ...; 3; 6; 2; 4; 1>*. ■



Hình 3.16. Đồ thị sắp xếp chỗ ngồi.

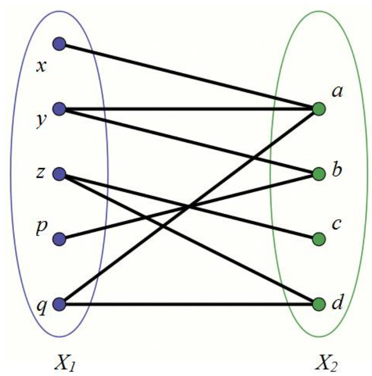
<u>*Ví dụ :*</u> *Hãy liệt kê các chu trình Hamilton phân biệt (không có cạnh chung) trong đồ thị đầy đủ K_9?*

Chú ý: Với *n* chẵn, mọi chu trình Hamilton của K_n đều có ít nhất một cạnh chung với nhau, do vậy số chu trình Hamilton phân biệt của K_n *(n chẵn)* là duy nhất.

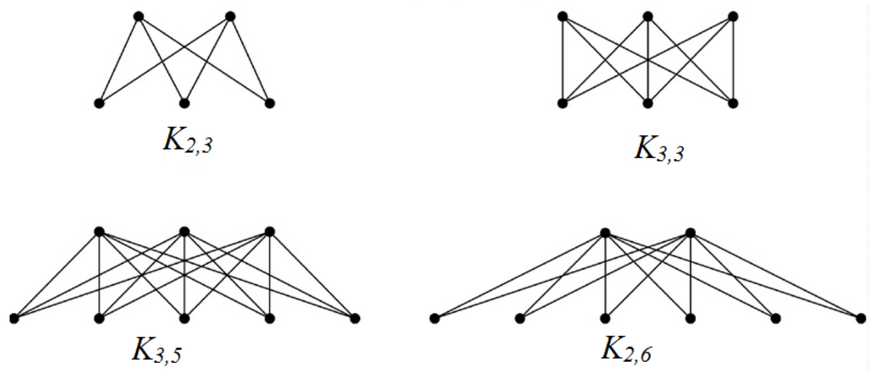
3.3 ĐỒ THỊ VÔ HƯỚNG PHÂN ĐÔI

3.3.1. Định nghĩa:

Đồ thị vô hướng liên thông *G = (X, U)* gọi là *đồ thị phân đôi được* (hay *đồ thị hai phía*) nếu tập đỉnh *X* của nó có thể phân hoạch thành hai tập X_1, X_2 rời nhau sao cho mỗi cạnh của đồ thị nối một đỉnh của X_1 với một đỉnh của X_2.



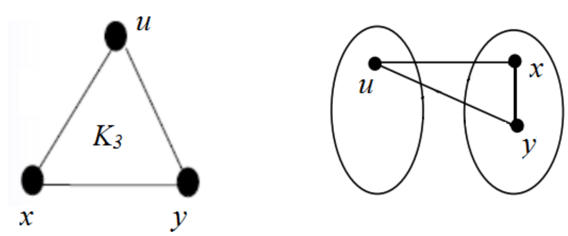
Hình 3.17a. Đồ thị phân đôi .



Hình 3.17b. Đồ thị phân đôi đầy đủ.

Đồ thị vô hướng phân đôi $G = (X_1 \cup X_2, U)$, gọi là *đồ thị phân đôi đầy đủ*, kí hiệu $K_{m,n}$ nếu $N(X_1) = m$, $N(X_2) = n$ và mọi đỉnh của X_1 đều được nối với mọi đỉnh của X_2. ($K_{m,n}$ có m đỉnh bậc n và n đỉnh bậc m).

Định lý: Đơn đồ thị vô hướng liên thông G là đồ thị phân đôi khi và chỉ khi nó không chứa chu trình có độ dài lẻ.



Hình 3.18. Đồ thị không phân đôi được.

Các tính chất:

(1) Đồ thị vô hướng liên thông G là đồ thị phân đôi khi và chỉ khi sắc số $\lambda(G) = 2$.
(2) Nếu $G = (X_1 \cup X_2, U)$ là đồ thị phân đôi thì $Ke(X_1) = X_2$ và $Ke(X_2) = X_1$.

(Với *$Ke(X_1)$ là tập tất cả các đỉnh kề với ít nhất một đỉnh trong X_1*; *$Ke(X_2)$ là tập tất cả các đỉnh kề với ít nhất một đỉnh trong X_2*).

(3) Nếu G là đồ thị phân đôi thì X_1 và X_2 là các tập ÔĐT cực đại của G.

3.3.2. Thuật toán nhận biết và biểu diễn hình học của đồ thị phân đôi

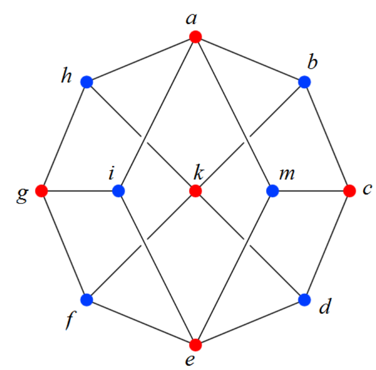
Cho đồ thị vô hướng liên thông $G = (X, U)$.

Thuật toán sau đây cho phép kiểm tra đồ thị G có phải là đồ thị phân đôi không.

(1) (Khởi tạo): Đặt $X_1 = \{x_0\}$, với x_0 là đỉnh nào đó của G; $X_2 = \emptyset$.
(2) (Lặp): Nếu $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ thì $X_1 = X_1 \cup Ke(X_2)$; $X_2 = X_2 \cup Ke(X_1)$.
Dừng khi $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ (1).
hoặc X_1 và X_2 là tối đại (tức là $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ và $X_1 \cup X_2 = X$) (2).
(3) Kết luận: Nếu (1) xảy ra thì G không phải là đồ thị phân đôi.
Trái lại, nếu (2) xảy ra thì G là đồ thị phân đôi và tập đỉnh X được phân thành hoạch thành các tập đỉnh X_1 và X_2.

*<u>Ví dụ:</u> Đồ thị G trong **Hình 3.19** có phân đôi được không?*

Hãy biểu diễn hình học đồ thị G thành hai phía để tách tập đỉnh thành hai tập ÔĐT?

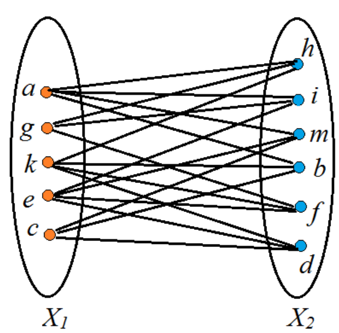


Hình 3.19. Đồ thị G.

Giải.

Bước lặp	*Tập đỉnh X_1*	*Tập đỉnh X_2*	*Kết luận*
1	*{a}*	*{h; i; m; b}*	$X_1 \cap X_2 = \emptyset$
2	*{a; g; k; e; c}*	*{h; i; m; b; f; d}*	$X_1 \cap X_2 = \emptyset$
3	*{a; g; k; e; c}*	*{h; i; m; b; f; d}*	$X_1 \cap X_2 = \emptyset$ *và* $X_1 \cup X_2 = X$

Vậy G là đồ thị phân đôi. Biểu diễn hai phía của G như sau:



Hình 3.20. Biểu diễn hai phía của đồ thị G.

Một số ứng dụng của đồ thị phân đôi:

(1) Đồ thị phân đôi thường được dùng để mô hình các *Bài toán ghép cặp*, quan hệ hôn nhân giữa tập những người đàn ông và tập những người đàn bà, sinh viên chọn trường, thầy giáo chọn tiết dạy trong thời khóa biểu...

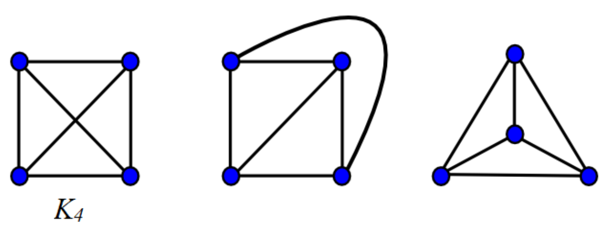
(2) Một ví dụ *Bài toán phân công công việc*. Giả sử ta có một nhóm người P và một tập công việc J, trong đó không phải ai cũng hợp với mọi công việc. Ta có thể mô hình bài toán bằng một đồ thị với tập đỉnh là $P \cup J$. Nếu người p_i có thể làm công việc j_k, đồ thị sẽ có một cạnh nối giữa p_i và j_k. Liệu có thể phân công mỗi người đảm nhiệm một công việc thích hợp với trình độ của người đó không?

3.4 ĐỒ THỊ PHẲNG

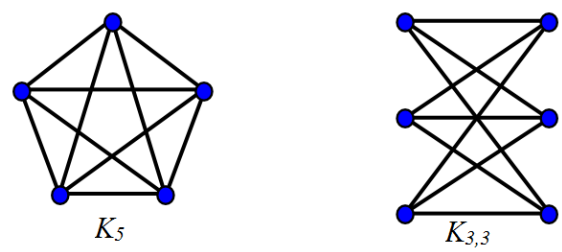
3.4.1. Định nghĩa:

Một đồ thị được gọi là *đồ thị phẳng* nếu có thể biểu diễn nó trên mặt phẳng sao cho các cạnh chỉ giao nhau tại các đỉnh. Cách biểu diễn như vậy gọi là biểu diễn phẳng của đồ thị.

Ví dụ:



Hình 3.21. ***K_4*** **là đồ thị phẳng.**



Hình 3.22. ***$K_{3,3}$* và *K_5*** **là đồ thị không phẳng.**

Ứng dụng của đồ thị phẳng:

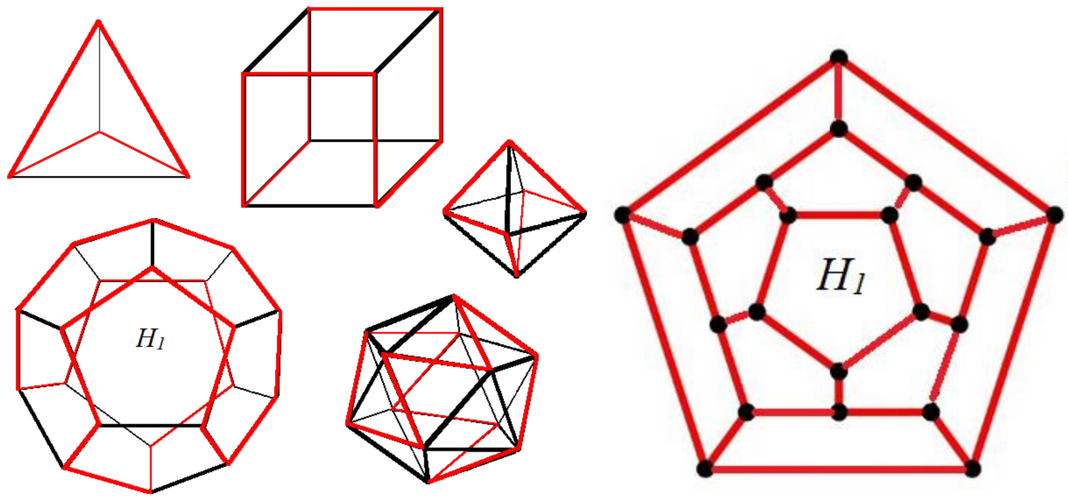
Đồ thị phẳng có nhiều ứng dụng quan trọng trong công nghệ chế tạo mạch in. Biểu diễn phẳng của đồ thị sẽ chia mặt phẳng ra làm các miền, bao gồm cả miền không bị chặn.

Ngoài ra, một trong các ứng dụng là ánh xạ từ ảnh số hai chiều sang một đồ thị phẳng. Trong đó, ảnh số được biểu diễn dưới dạng ma trận lưới ô vuông; mỗi ô đặc trưng cho 1 pixel.

3.4.2. Công thức Euler.

Định lý Euler: Cho G là đơn đồ thị liên thông phẳng có n đỉnh, m cạnh. Gọi f là số miền trong biểu diễn phẳng của G. Khi đó: $f = m – n + 2$.

Ví dụ 1: Các đồ thị sau đây đều là các đồ thị phẳng.



Hình 3.23. Biểu diễn phẳng của đồ thị có dạng là các khối đa diện.

Đồ thị phẳng H_1 có n = 20 đỉnh, mỗi đỉnh bậc 3. Hiển nhiên, H_1 không có chu trình độ dài 3 nên $m < 2n - 4 = 36$. Số cạnh của H_1 là $m = \frac{1}{2}\sum_{x \in X} \deg(x) = 30$ (cạnh). Theo công thức Euler số miền trong biểu diễn phẳng của H_1 là: $f = m - n + 2 = 12$ (miền).

Hệ quả 1: Nếu G là đơn đồ thị phẳng liên thông với n đỉnh, m cạnh thì $m \leq 3n - 6$.

Hệ quả 2: Nếu G là đơn đồ thị liên thông phẳng có n đỉnh, m cạnh và không có chu trình có độ dài 3 thì $m \leq 2n - 4$.

Hệ quả 3: Trong đơn đồ thị phẳng liên thông, luôn tồn tại ít nhất một đỉnh có bậc < 5.

Ví dụ 2:

*Xét đồ thị $K_{3,3}$ có n = 6; m = 9. Ta có $K_{3,3}$ là đơn đồ thị liên thông không có chu trình độ dài 3 nhưng không thỏa mãn tính chất của đồ thị phẳng trong **Hệ quả 2** ($m = 9 > 2n - 4 = 8$). Do vậy $K_{3,3}$ không phải là đồ thị phẳng.*

*Xét tương tự với K_5 có n = 5; m =10. Ta có K_5 là đơn đồ thị liên thông nhưng không thỏa mãn tính chất của đồ thị phẳng trong **Hệ quả 1** ($m = 10 > 3n - 6 = 9$). Vậy K_5 không phải là đồ thị phẳng.*

3.4.3. Dấu hiệu nhận biết đồ thị không phẳng

Dấu hiệu 1: Nếu đồ thị G chứa một đồ thị con không phẳng thì G không phải là đồ thị phẳng.

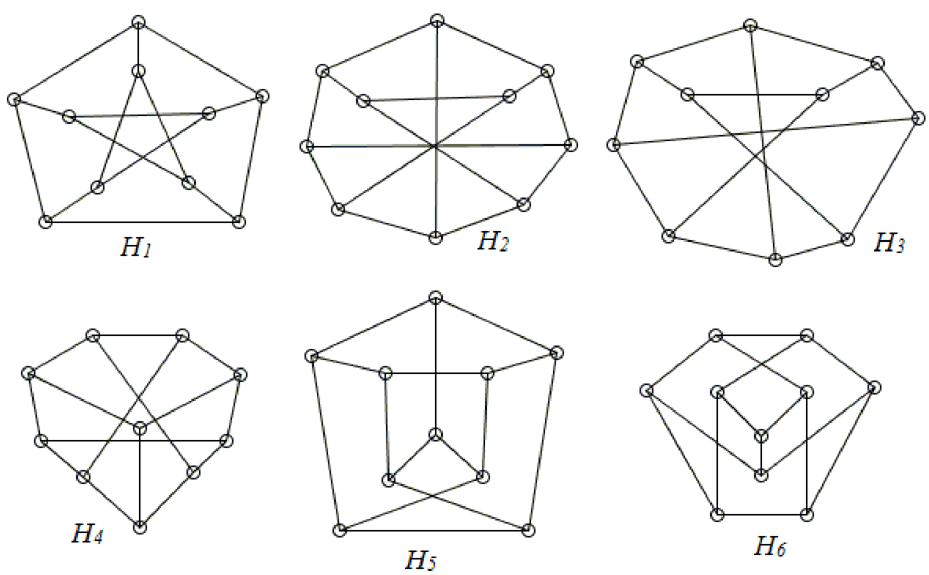
Dấu hiệu 2: Đồ thị *G* không thỏa mãn kết luận của ***Hệ quả 1***, ***Hệ quả 2*** là đồ thị không phẳng.

Định nghĩa: Ta nói đồ thị *G'* sinh ra từ *G* bởi *phép chia theo cạnh* (*x, y*) nếu *G'* có được từ *G* bằng cách bỏ đi cạnh *(x, y)* đồng thời thêm đỉnh z và hai cạnh *(x, z), (z, y)*.

Các đồ thị G_1 và G_2 được gọi là *đồng phôi với nhau* nếu chúng sinh ra từ cùng một đồ thị *G* bằng một dãy các *phép chia cạnh*.

Dấu hiệu 3 (Định lý Kuratowski)**:** Đồ thị *G* không phẳng khi và chỉ khi *G* chứa một đồ thị con đồng phôi với $K_{3,3}$ hoặc K_5 .

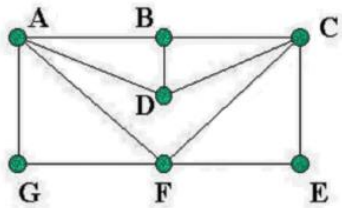
Ví dụ: Xét xem các đồ thị sau có phải là đồ thị phẳng không? Tại sao? Hãy tìm biểu diễn phẳng của nó nếu có?

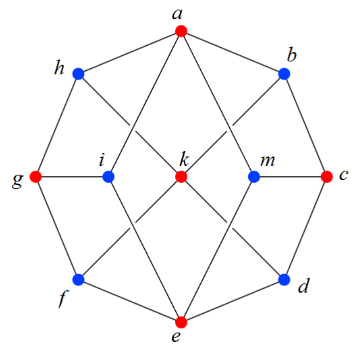


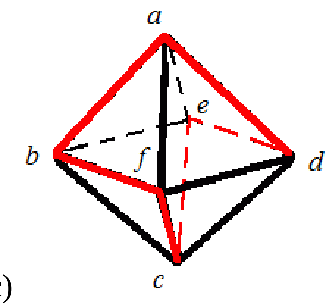
Hình 3.24. Đồ thị không phẳng.

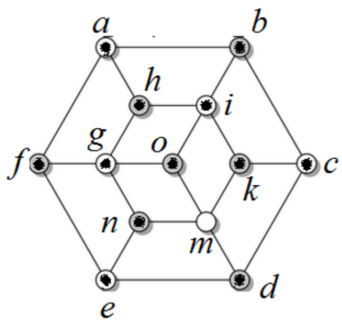
BÀI TẬP CHƯƠNG 3.

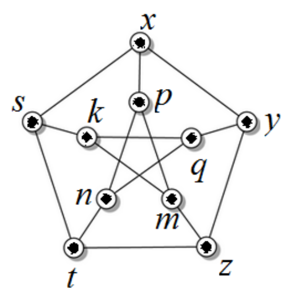
3.1. Đồ thị vô hướng nào sau đây là đồ thị Euler, nửa Euler? Đồ thị nào là đồ thị Hamilton, nửa Hamilton? Tìm chu trình Euler hoặc đường đi Euler, nếu có? Tìm tất cả các chu trình Hamilton hoặc đường đi Hamilton, nếu có?

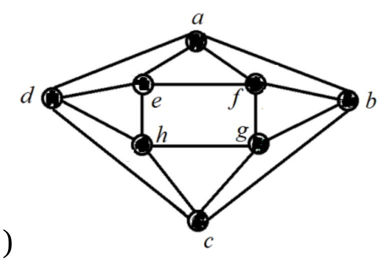
a) 

b) 

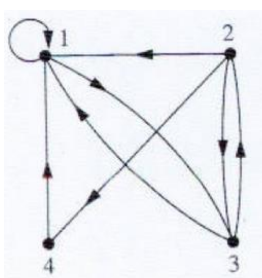
c) 

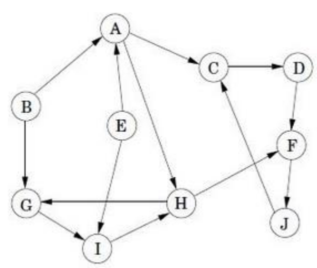
d) 

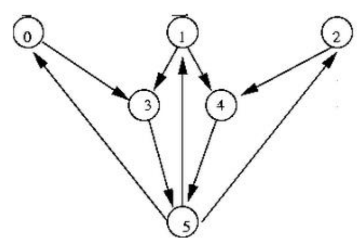
e) 

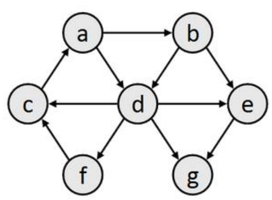
f) 

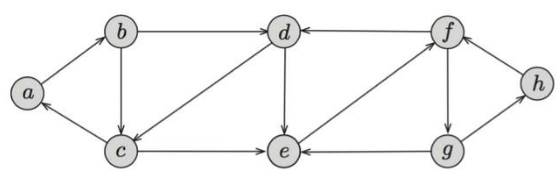
3.2. Đồ thị có hướng nào sau đây là đồ thị Euler, nửa Euler? Tìm chu trình Euler hoặc đường đi Euler, nếu có?

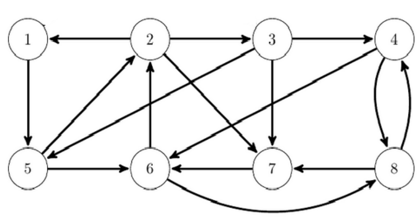
a) 

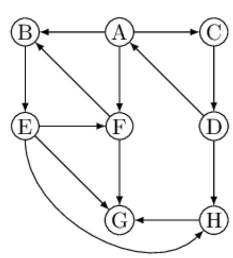
b) 

c) 

d) 

e) 

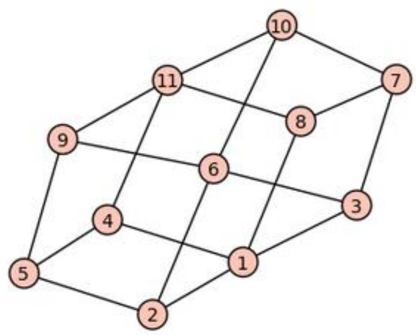
f) 

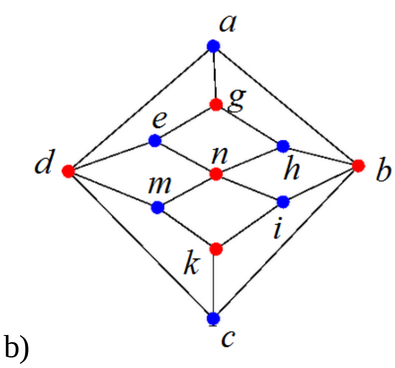
g) 

3.3. Xét các đồ thị cho bởi ma trận kề sau: Đồ thị nào là đồ thị Euler (nửa Euler), đồ thị Hamilton, (nửa Hamilton)? Tại sao?

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

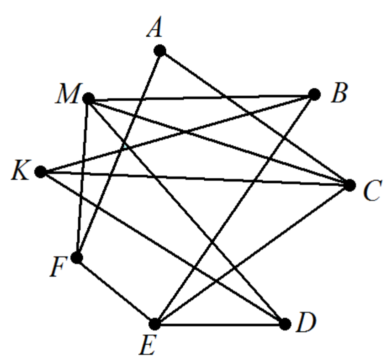
3.4. Đồ thị nào dưới đây là đồ thị phân đôi? Hãy tìm biểu diễn hai phía của đồ thị đó (nếu có).

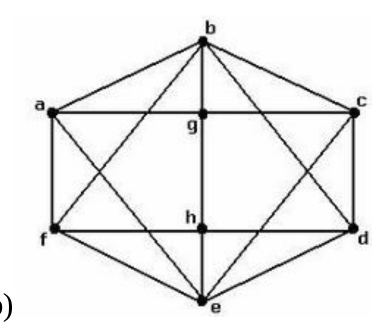
a) 

b) 

3.5. Giải bài toán người đưa thư Trung Hoa với các đồ thị trên (trong bài **3.4**).

3.6. Chỉ ra các đồ thị phẳng, đồ thị không phẳng trong các hình dưới đây? Tìm biểu diễn phẳng của nó (nếu có).

a) 

b) 

Chương 4.

CÂY VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA CÂY

Mục tiêu: Người học xác định và trình bày lại được các tính chất cơ bản của cây, cây *m* – phân. Trình bày lại được các phép duyệt cây nhị phân. Nhận diện được mã tiền tố và ứng dụng cây để tìm mã tiền tố tối ưu. Người học xác định được cây khung và cây khung nhỏ nhất của đồ thị.

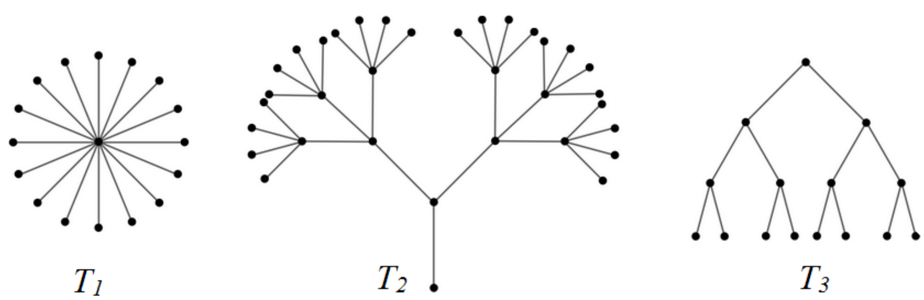
4.1 CÂY VÀ CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA CÂY.

4.1.1 Định nghĩa

Cây là một đồ thị vô hướng liên thông và không có chu trình.

Rừng là đồ thị vô hướng không có chu trình, không liên thông. Nói cách khác, rừng là một đồ thị mà mỗi thành phần liên thông của nó là một cây.

Ví dụ:



Hình 4.1. Ví dụ về rừng có 3 cây T_1, T_2, T_3 .

Nhận xét :

(1) Mọi cây đều là *đồ thị phẳng*. Mọi cây đều là *đồ thị phân đôi*. Mọi cây đều *có sắc số bằng 2*.

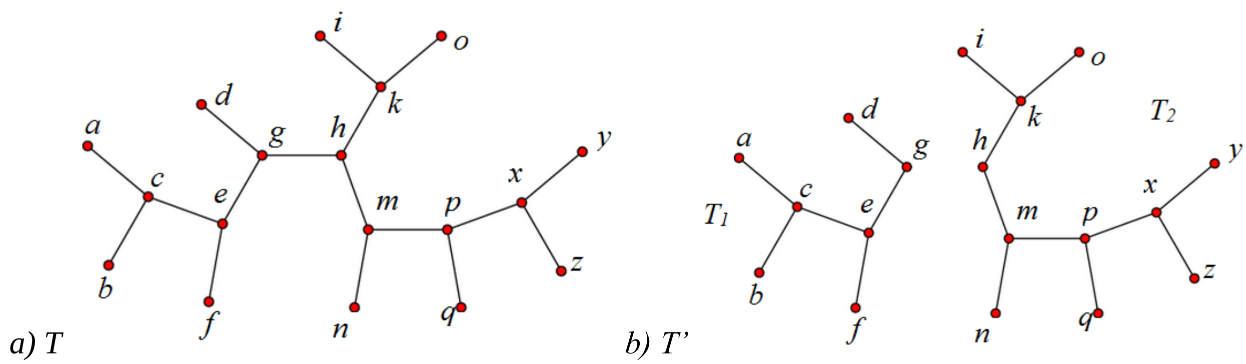
(2) Cho $T = (X, U)$ là một cây có *n* đỉnh. Do *T* liên thông và không có chu trình nên *T* có $n - 1$ cạnh, hơn nữa mọi cạnh đều là cầu.

4.1.2 Các tính chất cơ bản của cây

Định lý: Cho $T = (X, U)$ là một đồ thị vô hướng có *n* đỉnh ($n\geq2$). Các phát biểu sau đây là tương đương:

(1) T là một cây.
(2) T không có chu trình và có $n - 1$ cạnh.
(3) T liên thông và có $n - 1$ cạnh.
(4) T liên thông và mọi cạnh đều là cầu.
(5) Hai đỉnh bất kì của T được nối với nhau bởi một đường đi đơn duy nhất.
(6) T không có chu trình và nếu thêm vào một cạnh nối hai đỉnh bất kì không kề nhau thì trong T xuất hiện một chu trình đơn duy nhất.

Ví dụ: *Xét cây T có số đỉnh n = 18 => số cạnh của T là m = 17 (cạnh).*



Hình 4.2. Ví dụ về cây *T*.

Từ đỉnh a đến đỉnh z có đường đi đơn duy nhất là <a; c; e; g; h; m; p; x; z>.

Mọi cạnh của T đều là cầu. Chẳng hạn, khi xóa cạnh (g, h) thì ta thu được đồ thị T' có hai thành phần liên thông T_1 và T_2 (số thành phần liên thông tăng).

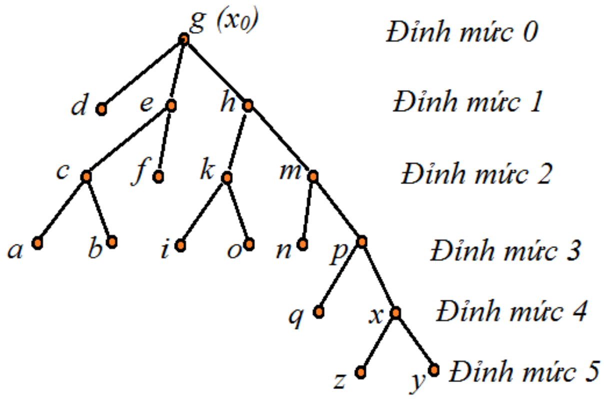
Trong cây T nếu thêm một cạnh nối hai đỉnh d và i ta có một chu trình đơn duy nhất là <d; g; h; k; i; d>.

4.1.3 Cây có gốc

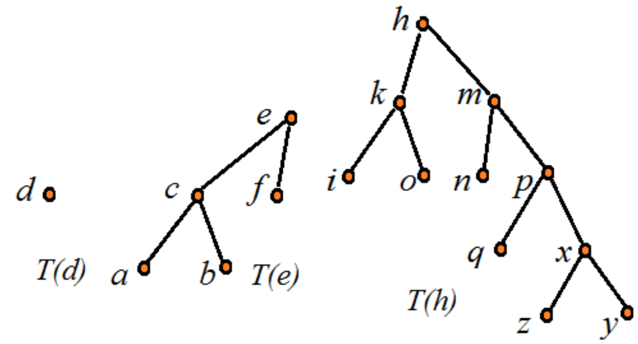
Định nghĩa 1: Cho cây $T = (X, U)$. Trong cây T, ta tiến hành xác định mức cho từng đỉnh như sau:

(1) Chọn một đỉnh tùy ý làm gốc của cây, kí hiệu x_0, có mức là 0.
(2) Đỉnh kề với gốc gọi là đỉnh mức 1. Cứ như vậy, đỉnh chưa xác định mức nhưng kề với đỉnh mức k-1 gọi là đỉnh mức k.
Cây đã xác định mức cho các đỉnh như trên gọi là *cây có gốc*.

Ví dụ 1: *Trong cây T (**Hình 4.2**), chọn đỉnh g làm gốc ta có cây T_0 có gốc như sau :*



Hình 4.3a. Cây có gốc T_0.



Hình 4.3b. Các cây con tại *g* của cây có gốc T_0.

Nhận xét:

(1) Với một cây có *n* đỉnh thì sẽ sinh *n* cây có gốc đôi một khác nhau.

(2) Cây có gốc có thể coi là một *đồ thị có hướng*, trong đó có đúng một đỉnh là gốc x_0 có bán bậc vào bằng 0, còn tất cả các đỉnh khác đều có bán bậc vào bằng 1.

Hơn nữa, đỉnh *v* có mức là *k* khi và chỉ khi đường đi từ gốc x_0 đến *v* có độ dài bằng *k*.

Định nghĩa 2: Cho cây có gốc *T*.

(1) Nếu *v* là một đỉnh khác gốc x_0 thì *có một đường đi đơn duy nhất* từ gốc x_0 đến *v*. Trên đường đi này: ta gọi đỉnh *u* kề với *v* là *cha* của *v* và ngược lại *v* gọi là *con* của *u*; tất cả các đỉnh không kề với *v* gọi là *tổ tiên* của *v* và ngược lại *v* được gọi là *con cháu* của các đỉnh này.

(2) Các đỉnh có cùng cha gọi là *anh em*.

(3) Cho *y* là một đỉnh của cây *T*. Kí hiệu *T(y)* là đồ thị con của cây *T* đang xét, bao gồm đỉnh *y* và các con cháu của nó cùng tất cả các cạnh kề các con cháu của *y*. Khi đó *T(y)* được gọi là một *cây con tại đỉnh r* của cây *T* ban đầu (ở đây *r* là cha của *y*).

(4) Các đỉnh của cây không có con được gọi là *lá.* Hay nói cách khác, mọi đỉnh treo không có con (không phải là gốc) là *lá* của cây. Mọi đỉnh không phải là lá gọi là *đỉnh trong* của cây (gốc x_0 cũng là một đỉnh trong). *Chiều cao* h(*T*) của cây là mức lớn nhất của một lá trong cây.

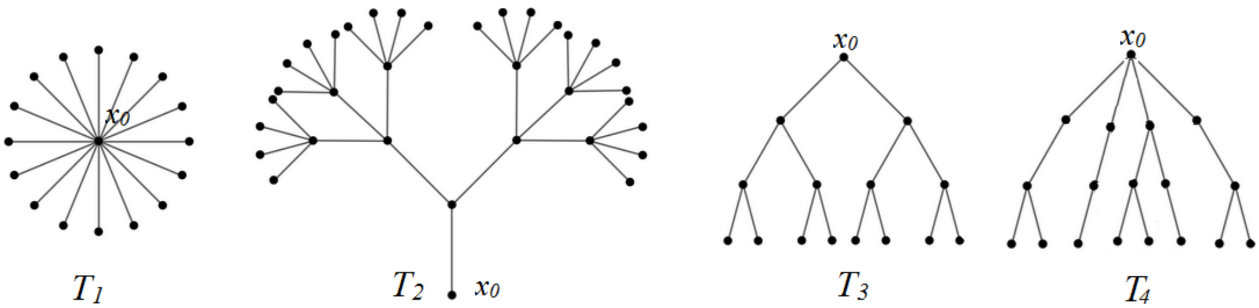
(5) Một cây có gốc *T* gọi là *đối xứng (hay cân đối)* nếu mọi đỉnh là lá đều có mức bằng chiều cao h(*T*) của cây.

*Ví dụ 2: Cây T_0 trong **Hình 4.3a** có 10 lá là: d; a; b; f; i; o ; n; q; z; y. Các đỉnh trong của T_0 là: g; e; h; c; k; m; p; x (8 đỉnh).*

Đỉnh trong g là cha có 3 con là d; e; h. Các đỉnh g ; h ; m ; p ; x là tổ tiên của các đỉnh z; y. Con cháu của e là a; b; c; f. Anh em với đỉnh k là đỉnh m.

Chiều cao của cây T_0 là $h(T_0) = 5$. Cây T_0 là cây có gốc không cân đối.

*Các cây trên **Hình 4.1** là các cây cân đối với gốc là đỉnh x_0 đã chỉ ra trên **Hình 4.4***



Hình 4.4. Các cây có gốc cân đối .

4.1.4 Cây *m*-phân

Định nghĩa:

(1) Một cây có gốc *T* được gọi là *cây m-phân*, nếu mỗi đỉnh trong của *T* có nhiều nhất *m* con và có ít nhất một đỉnh có *m* con.
(2) Cây có gốc *T* gọi là cây *m-phân đầy đủ* nếu mọi đỉnh trong của nó đều có *m* con.
(3) Cây *m*-phân với $m = 2$ gọi là *cây nhị phân*.

Định lý 1: Một cây *m*-phân đầy đủ có *k* đỉnh trong thì có $m.k + 1$ đỉnh và $(m – 1).k + 1$ lá.

Định lý 2: Một cây *m*-phân có chiều cao *h* và số lá *s* thì: $s \leq m^h$ hay $h \geq \log_m(s)$ (*) .
Tức là, *số lá nhiều nhất* có trong các cây *m*-phân có cùng chiều cao *h* là m^h ;
hay *chiều cao nhỏ nhất* của một cây *m*-phân có *s* lá là *số nguyên nhỏ nhất không bé hơn* $\log_m(s)$.
Dấu bằng ở (*) xảy ra khi *T* là cây *m*-phân đầy đủ và cân đối (Tức là, khi *T* là cây *m*-phân mà mọi đỉnh trong đều có *m* con và mọi lá đều có mức bằng chiều cao của cây).

Ví dụ 1: *Trong **Hình 4.3,** cây T_2 và T_4 là cây 4-phân (không phải cây 4-phân đầy đủ) có chiều cao $h(T_2) = 4$ và $h(T_4) = 3$; Cây T_3 là cây nhị phân đầy đủ, cân đối có chiều cao $h(T3) = 3$ và có 8 lá (Số lá nhiều nhất của một cây nhị phân có chiều cao bằng 3 là 8 lá).*

Ví dụ 2: *Cho cây nhị phân T có 18 lá. Ta có $\log_2 18 \cong 4,17$ nên chiều cao nhỏ nhất của T là: $h = 5$.*

4.1.5 Cây quyết định

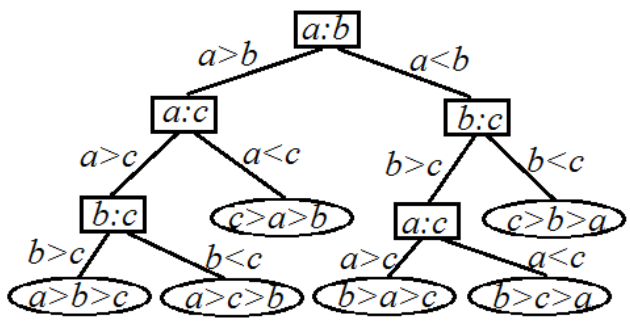
Định nghĩa: *Cây quyết định* là một cây có gốc có thể dùng để mô hình các bài toán, trong đó có một dãy các quyết định dẫn đến lời giải. Cụ thể, trong cây quyết định, mỗi *đỉnh trong* ứng với *một quyết định* và *mỗi cây con* của nó ứng với *mỗi một kết cục* có thể của quyết định cha.

Những lời giải có thể có của bài toán tương ứng với mỗi đường đi từ gốc đến lá của cây quyết định này.

<u>Ví dụ:</u> Cần thực hiện tối đa bao nhiêu phép so sánh nhị nguyên (mỗi lần so sánh hai phần tử với nhau) để sắp xếp n số thực phân biệt $a_1, a_2, \ldots, a_n$ theo thứ tự giảm dần.

Giải. Mô hình bài toán bằng cây quyết định như sau:

Mỗi đỉnh trong tương ứng là một quyết định so sánh hai số. Mỗi cây con tại đỉnh trong này tương ứng với một kết cục của quyết định. Mỗi quyết định đều có hai kết cục nên mọi đỉnh trong có đúng hai con => Cây quyết định cho bài toán này là ***cây nhị phân đầy đủ****.*



Hình 4.5. Cây quyết định để sắp xếp 3 phần tử phân biệt a, b, c theo thứ tự giảm dần.

Mỗi lời giải tương ứng với một đường đi từ gốc đến lá. Bài toán có n! lời giải (n! kết quả) tương ứng với số hoán vị của n số thực. Nên cây quyết định này ***có n! lá****.*

Ta có, số tối đa các phép so sánh cần dùng bằng ***độ dài đường đi dài nhất*** *từ gốc đến một lá nào đó. Nói cách khác, số tối đa các phép so sánh cần dùng bằng* ***chiều cao của cây quyết định****.*

Do cây quyết định là cây nhị phân đầy đủ có n! lá nên chiều cao của cây này là ***chiều cao nhỏ nhất*** *trong số các cây nhị phân có n! lá. Vậy cây này có chiều cao bằng số nguyên nhỏ nhất không bé hơn $\log_2(n!)$ (theo* ***Định lý 2*** *ở trên).*

Kết luận: Số phép so sánh nhị nguyên tối đa cần dùng để sắp xếp n số thực phân biệt là ***số nguyên nhỏ nhất không bé hơn $\log_2(n!)$****.*

4.2 CÁC PHÉP DUYỆT CÂY. ỨNG DỤNG CÂY VÀO MÃ HÓA THÔNG TIN

4.2.1. Các thuật toán duyệt cây

Các thủ tục viếng thăm một cách có hệ thống tất cả các đỉnh của một cây có gốc và được sắp thứ tự (tức là các đỉnh anh em có cùng cha đã được sắp thứ tự từ trái qua phải), được gọi là *các thuật toán duyệt cây.*

Định nghĩa: Cho $T = T(r)$ là một cây có gốc và được sắp thứ tự với gốc r. Gọi $T_1, T_2, \ldots, T_n$ là các cây con tại r của T theo thứ tự từ trái qua phải. Có 3 thuật toán duyệt cây T được sử dụng thường xuyên nhất là: *Duyệt tiền thứ tự, Duyệt trung thứ tự, Duyệt hậu thứ tự.* Mỗi thuật toán được thực hiện lần lượt qua $n+1$ bước theo thứ tự liệt kê sau đây:

(1) *Duyệt tiền thứ tự:* Thăm gốc r / Duyệt cây con T_1 /…/ Duyệt cây con T_n.
(2) *Duyệt trung thứ tự:* Duyệt cây con T_1 / Thăm gốc r / Duyệt cây con T_2 / Duyệt cây con T_3 / …/ Duyệt cây con T_n.
(3) *Duyệt hậu thứ tự:* Duyệt cây con T_1 / …/ Duyệt cây con T_n / Thăm gốc r.

*Ví dụ 1: Hãy duyệt cây có gốc T_0 trong **Hình 4.3** theo thuật toán duyệt tiền thứ tự, duyệt hậu thứ tự, duyệt trung thứ tự.*

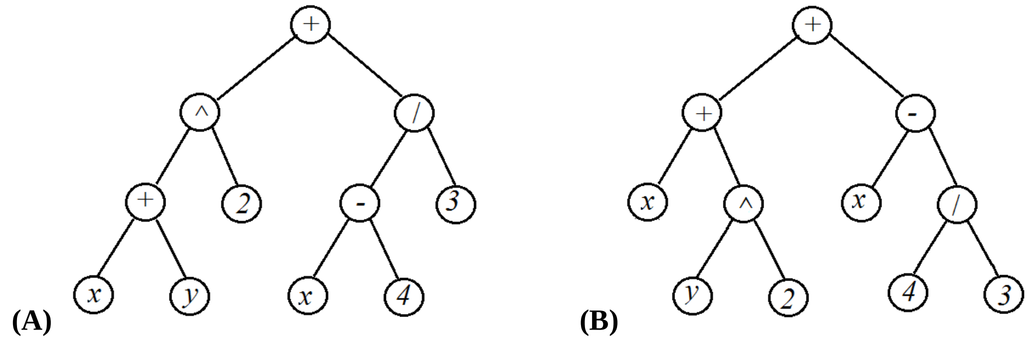
Giải. Các đỉnh được viếng thăm lần lượt là:

Duyệt tiền thứ tự	*g, d, a, c, b, e, f, i, k, o, h, m, n, p ,q, x, y, z.*
Duyệt trung thứ tự	*d, g, a, c, b, e, f, i, k, o,h, n, m, q, p, z, x, y.*
Duyệt hậu thứ tự	*d, a, b, c, f, e, i, o, k, n, q, z, y, x, p, m, h, g.*

Các ký pháp trung tố, tiền tố và hậu tố:

Ta có thể biểu diễn các biểu thức phức tạp bằng cây nhị phân và được sắp thứ tự. Trong đó, các *đỉnh trong* biểu thị các phép toán (toán tử) và *các lá* biểu thị các số hay các biến (toán hạng).

Ví dụ 2:



Hình 4.6. Cây nhị phân biểu diễn biểu thức $\boldsymbol{A = (x+y)^2 + \frac{x-4}{3}}$ **và** $\boldsymbol{B = x + y^2 + x - \frac{4}{3}}$

Duyệt cây nhị phân biểu diễn biểu thức *A* và *B* theo thuật toán *duyệt trung thứ tự* ta đều thu được biểu thức (gọi là **dạng trung tố)** $x + y \wedge 2 \ + x \ - 4\ /\ 3$. Để cho rõ ràng và tạo ra biểu thức có các toán hạng và các toán tử theo thứ tự đúng như là đã có trong biểu thức ban đầu thì trong *dạng trung tố* này cần *thêm ngoặc đơn*. Chẳng hạn, để thu được biểu thức *A* thì ta cần thêm ngoặc mỗi khi gặp một phép toán: $(x + y\ ) \wedge 2 \ + (x \ - 4)\ /\ 3$.

Bằng cách duyệt cây nhị phân biểu diễn biểu thức này theo thuật toán duyệt tiền thứ tự, duyệt hậu thứ tự ta thu được **dạng tiền tố** và **dạng hậu tố** của biểu thức ban đầu.

Ta gọi, dạng tiền tố và dạng hậu tố của một biểu thức lần lượt là ***ký pháp Ba Lan*** và ***ký pháp Ba Lan ngược.*** Các biểu thức dưới dạng ký pháp Ba Lan và ký pháp Ba Lan ngược là *rõ ràng (không mập mờ)* vì vậy *không cần thêm ngoặc*.

<u>Ví dụ 3:</u> Tìm ký pháp Ba Lan và ký pháp Ba Lan ngược của hai biểu thức A, B trong Ví dụ 2.

Giải.

Ký pháp Ba Lan của biểu thức A, B là các biểu thức dạng tiền tố:

$$f_A(x, y) = + \wedge + x\ y\ 2\ / - x\ 4\ 3\ \ ;\ f_B(x, y) = +\ +\ x\ \wedge\ y\ 2 - x\ /\ 4\ 3$$

Ký pháp Ba Lan ngược của biểu thức A, B là các biểu thức dạng hậu tố:

$$g_A(x, y) = x\ y + 2 \wedge x\ 4 - 3\ / + ;\ g_B(x, y) = x\ \ y\ \ 2\ \wedge\ +\ x\ \ 4\ \ 3\ /\ -\ +\ .$$

Trong *dạng tiền tố* ta đánh giá biểu thức *từ phải sang trái*, khi gặp một toán tử ta thực hiện phép toán tương ứng với hai toán hạng đi liền bên phải của toán tử này. Để đánh giá biểu thức trong *dạng hậu tố*, ta phải tiến hành từ *trái sang phải* và thực hiện một phép toán mỗi khi có một toán tử đi sau hai toán hạng. (Mỗi kết quả của phép toán vừa thực hiện tiếp tục được coi như là một toán hạng mới).

<u>Ví dụ 4 :</u> Tính giá trị của biểu thức tiền tố C và biểu thức hậu tố D sau : $C = + \wedge - 5\ 4\ 2\ / + 2\ 4\ 3$; $D = 3\ 1 - 2\ \wedge\ 2\ 4 + 3 * +$.

Giải. $C = (5-4)^2 + \frac{2+4}{3} = 3$; $D = (3-1)^2 + (2+4) * 3 = 22$.

4.2.2. Ứng dụng cây vào mã hóa thông tin – Thuật toán Huffman

Trong tin học, dễ thấy là ta có thể biểu diễn mỗi chữ cái trong Bảng chữ cái tiếng Anh bằng một xâu nhị phân độ dài 5 (Vì chỉ có 26 chữ cái và có tới $2^5 = 32$ xâu nhị phân độ dài 5) ; hoặc bằng một xâu nhị phân có độ dài không quá 4 (Vì có tới $2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 29$ xâu nhị phân kiểu này).

Định nghĩa 1: Một cách mã hóa gọi là *mã tiền tố* nếu xâu nhị phân ứng với một chữ cái nào đó không phải là tiền tố (phần đầu) của xâu nhị phân ứng với một chữ cái khác.

<u>Ví dụ 1:</u> Trong các sơ đồ mã sau :

Chữ cái	*A*	*E*	*T*	*S*
Mã T_1	*11*	*00*	*10*	*01*
Mã T_2	*0*	*1*	*01*	*001*

Mã T_1 là một mã tiền tố, mã T_2 không phải là một mã tiền tố.

Đối với mã T_1, từ TEAS được mã bởi xâu nhị phân 10001101. Và ngược lại, xâu 10001101 chỉ là mã của từ TEAS.

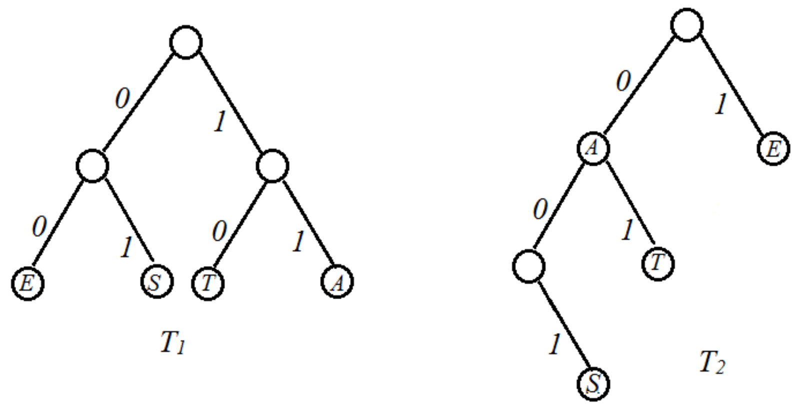
Đối với mã T2 , từ TEAS có mã là 0110001. Nhưng ngược lại, xâu 0110001 có thể là mã của các từ AEEAS ; AEEAAT ; AEEAAAE (giải mã không duy nhất).

Chú ý:

(1) Đối với các mã tiền tố, mỗi từ được mã hóa bởi một xâu nhị phân và ngược lại mỗi xâu nhị phân là mã của đúng một từ duy nhất.
(2) Các mã tiền tố có thể biểu diễn bằng một cây nhị phân (còn gọi là ***cây mã***) tương ứng như sau :
- Các chữ cái là *nhãn của các lá* trên cây. Các *cạnh được gán nhãn* là *0* hoặc *1*.
- Xâu nhị phân mã hóa cho một chữ là *dãy các nhãn của các cạnh* trên đường đi từ gốc đến lá có nhãn là chữ cái này.

(3) Để kiểm tra một cách mã có phải mã tiền tố hay không, cần biểu diễn mã đó thành cây nhị phân. Nếu tồn tại *đỉnh trong* có nhãn là chữ cái thì đó không phải là mã tiền tố.
(4) Để giải mã một xâu nhị phân thì ta dùng dãy các bít để tạo thành đường đi bắt đầu từ gốc, khi gặp lá thì kết thúc và bắt đầu đường đi mới cũng từ gốc.

<u>Ví dụ 2:</u> Cây nhị phân biểu diễn các mã T_1 và T_2 như sau.



Hình 4.7. Cây nhị phân biểu diễn cho mã T_1 và T_2.

Để giải mã xâu nhị phân 1000110100 bởi mã T_1, ta tìm đường đi bắt đầu từ gốc của T_1 => TEASE.

Giải mã xâu 1000110100 bởi mã T_2 tương tự ta được các từ EAAAEEAEAA ; EAATETAA ; ….

Định nghĩa 2: Mã tiền tố *T* của bảng chữ cái *X* gọi là mã tiền tố tối ưu đối với bản tin *Y* nếu số bít dùng để mã hóa bản tin đó là ít nhất.

<u>Ví dụ 3:</u> Cho bảng chữ cái X = {a ;b ;e ;f ;i ;l ;o ;r ;t ;u ;y } và hai mã tiền tố của X :

Mã	a	b	e	f	i	l	o	r	t	u	y
T_1	0000	00010	00011	0010	0011	010	011	10	110	1110	1111
Mã	a	b	e	f	i	l	o	r	t	u	y
T_2	0000	0001	0010	0011	010	0110	0111	1000	1001	101	110

Tính số bit cần dùng để mã hóa bản tin Y = "You are beautiful".
Giải.

Tần suất các chữ cái trong bản tin Y là:

Chữ cái	a	b	e	f	i	l	o	r	t	u	y
Tần suất	2	1	2	1	1	1	1	1	1	3	1

Số bít cần dùng để mã hóa bản tin Y:

Đối với mã T_1 là : $N_1 = 8.4+3.5+3.3+2 = 58$ *(bit)*

Đối với mã T_2 là : $N_2 = 10.4+5.3 = 55$ *(bit).*

Thuật toán Huffman (xác định mã tiền tố tối ưu của bảng chữ cái X đối với bản tin Y):

(1) : Coi mỗi chữ cái $x_i \in X$ là một lá và mỗi lá có kèm theo một nhãn $f(x_i)$ là tần suất của kí tự đó.

(2) : Sắp xếp các lá theo thứ tự có tần suất không giảm: $f(x_1) \leq f(x_2) \leq \ldots \leq f(x_n)$ Nối hai lá có tần suất nhỏ nhất x_1, x_2 ta được đỉnh trong y_1, có nhãn là $f(y_1) = f(x_1) + f(x_2)$.

(3) : Coi y_1 là lá (bỏ đi hai chữ cái x_1, x_2). Lặp lại bước 2. Cứ như vậy cho đến khi các lá được ghép hết.

Từ cây mã Huffman thu được, suy ra bảng mã tối ưu cần tìm.

<u>Ví dụ 4:</u> Tìm mã tiền tố tối ưu cho tập kí tự X đối với bản tin Y = "You are beautiful" trong Ví dụ 1.

Giải.

Sắp xếp các chữ cái trong tập kí tự X theo tần suất tăng dần :

Lặp 1 :

Chữ cái	*b*	*f*	*i*	*l*	*o*	*r*	*t*	*y*	*a*	*e*	*u*
Tần suất	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*2*	*2*	*3*

Ghép b và f được đỉnh trong y_1 (2).

Lặp 2: Ghép i và l được đỉnh trong y_2 (2).

Lặp 3: Ghép o và r được đỉnh trong y_3 (2).

Lặp 4: Ghép t và y được đỉnh trong y_4 (2).

Lặp 5 : Ghép a và e được đỉnh trong y_5 (4)

Lặp 6 :

Chữ cái	y_1	y_2	y_3	y_4	*u*	y_5
Tần suất	*2*	*2*	*2*	*2*	*3*	*4*

Ghép y_1 và y_2 được đỉnh trong y_6 (4).

Lặp 7 : Ghép y_3 và y_4 được đỉnh trong y_7 (4).

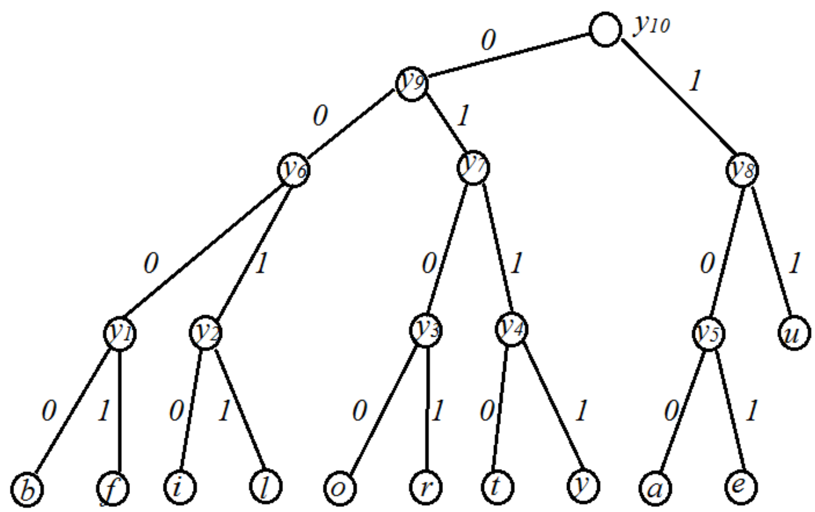
Lặp 8 : Ghép u và y_5 được đỉnh trong y_8 (7).

Lặp 9 :

Chữ cái	y_6	y_7	y_8
Tần suất	*4*	*4*	*7*

Ghép y_6 và y_7 được đỉnh trong y_9 (8).

Lặp 10 : Ghép y_8 và y_9 được đỉnh trong y_{10} (15).



Hình 4.8. Cây nhị phân biểu diễn mã tiền tố tối ưu của bảng chữ cái *X*.

Vậy mã tiền tố tối ưu cần tìm là:

Chữ cái	*a*	*b*	*e*	*f*	*i*	*l*	*o*	*r*	*t*	*u*	*y*
Mã tối ưu	*100*	*0000*	*101*	*0001*	*0010*	*0011*	*0100*	*0101*	*0110*	*11*	*0111*

(Số bít cần dùng để mã hóa bản tin Y là $N_3 = 8.4 + 4.3 + 3.3 = 53$ bít).

4.3 CÂY KHUNG CỦA ĐỒ THỊ

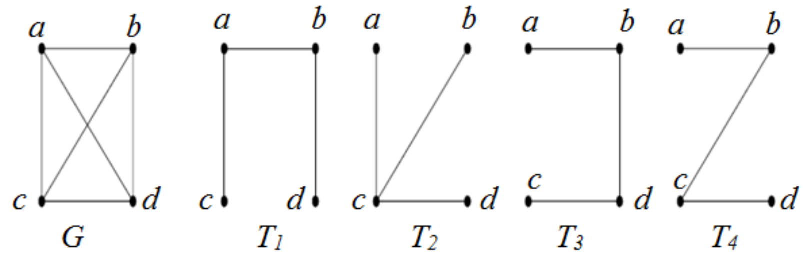
4.3.1 Định nghĩa.

Cho đồ thị vô hướng *G = (X, U)* có *n* đỉnh *(n ≥ 2)*. Đồ thị *T* gọi là một *cây khung* của *G* nếu *T* là một cây và *T* là đồ thị bộ phận của *G*.

Nhận xét: Đồ thị *T = (E, V)* là một cây khung của đồ thị *G = (X, U)* thì *T liên thông, không có chu trình, có n đỉnh và có n – 1 cạnh* (tức là *N(E) = N(X) và N(V) = n – 1*).

Định lý: Điều kiện cần và đủ để đồ thị *G* có cây khung là *G* liên thông.

<u>Ví dụ :</u>



(Số đỉnh n = 4)

Hình 4.9. Các cây khung T_1 , T_2 , T_3 *và* T_4 của đồ thị *G*.

4.3.2 Các thuật toán xây dựng cây khung của đồ thị.

Thuật toán tìm kiếm ưu tiên chiều sâu.

(1) : Chọn một đỉnh tùy ý làm gốc của cây.
(2) : Từ đỉnh vừa chọn, xây dựng một đường đi bằng cách ghép lần lượt các cạnh mới nối tiếp các cạnh trước đó, sao cho không tạo thành chu trình (Cạnh ghép thêm phải với tới các đỉnh mới).
(3) : Nếu đường đi vừa lập đã đi qua tất cả các đỉnh của *G* (hoặc đã đủ *n – 1* cạnh) thì ta được cây khung cần tìm.

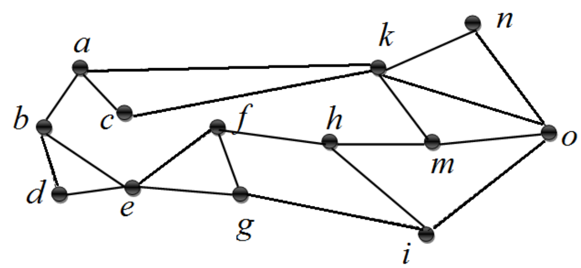
Ngược lại, nếu đường đi này chưa đi qua mọi đỉnh của *G* thì từ đỉnh cuối cùng của đường đi này, quay lại đỉnh trước nó và lặp lại bước (2).

Thuật toán tìm kiếm ưu tiên chiều rộng.

(1) : Chọn một đỉnh tùy ý làm gốc của cây, ghép tất cả các cạnh kề với gốc ta được đỉnh mức 1.
(2) : Từ mỗi đỉnh mức *k*, ghép tất cả các cạnh kề với đỉnh này sao cho không tạo thành chu trình, ta được đỉnh mức *k + 1*.

Lặp lại (2). Thuật toán dừng khi tất cả các đỉnh được ghép vào cây (hoặc đã ghép đủ *n – 1* cạnh)

<u>*Ví dụ 1:*</u> *Tìm cây khung của G theo thuật toán tìm kiếm ưu tiên chiều sâu và chiều rộng?*



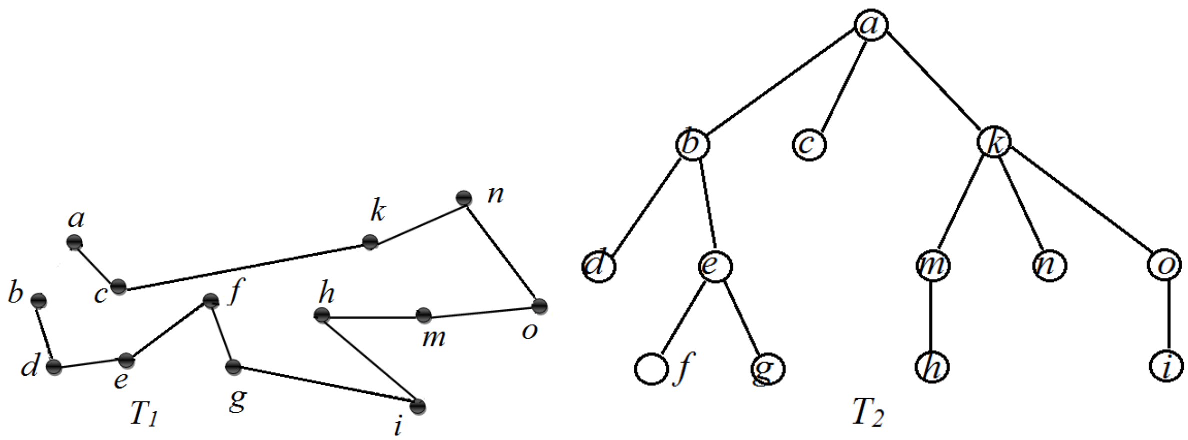
Hình 4.10. Tìm kiếm cây khung của G.

Giải. n =13. Cây khung của G có 12 cạnh.

- *Theo thuật toán tìm kiếm ưu tiên chiều sâu:*

$$\begin{cases} \text{Chọn } a \text{ làm gốc} \\ \text{Từ } a \text{ có đường đi } < a; c; k; n; o; m; h; i; g; f; e; d; b > \end{cases}$$ *(đã ghép đủ 12 cạnh).*

*Cây khung tìm được theo thuật toán này là T_1 (**Hình 4.11**).*



Hình 4.11. Cây khung tìm được theo thuật toán tìm kiếm ưu tiên chiều sâu, chiều rộng.

- *Theo thuật toán tìm kiếm ưu tiên chiều rộng:*

$$\begin{cases} \text{Chọn đỉnh } a \text{ làm gốc} \quad (\text{mức } 0) \\ \text{Các đỉnh mức 1 kề với gốc } a \text{ là: } b, c, k. \\ \text{Các đỉnh mức 2 kề với đỉnh } b \text{ là: } d, e; \text{ đỉnh mức 2 kề với } k \text{ là: } m, n, o. \\ \text{Các đỉnh mức 3 kề với } e \text{ là: } f, g; \text{ kề } m \text{ là: } h; \text{ kề } o \text{ là: } i. \end{cases}$$

(Đã ghép đủ n-1 cạnh).

*Cây khung tìm được theo thuật toán này T_2 (**Hình 4.11**).*

<u>Ví dụ 2:</u> Tìm cây khung của đồ thị G cho bởi ma trận kề:

$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Giải. n= 5. Cây khung của G có 4 cạnh,

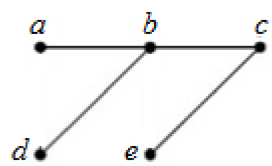
✓ *Theo thuật toán tìm kiếm ưu tiên chiều sâu:*

- Chọn a làm gốc.

- Từ a có đường đi <a; b; c; e>.

- Quay lại b có đường đi <b; d>.

Đã chọn đủ 4 cạnh, ta được cây khung T_1



Hình 4.12a. Cây khung T_1.

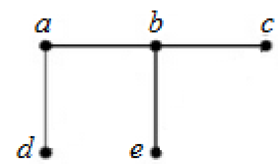
✓ *Theo thuật toán tìm kiếm ưu tiên chiều rộng:*

- Chọn a làm gốc (mức 0).

- Đỉnh mức 1 kề gốc a là: b ; d.

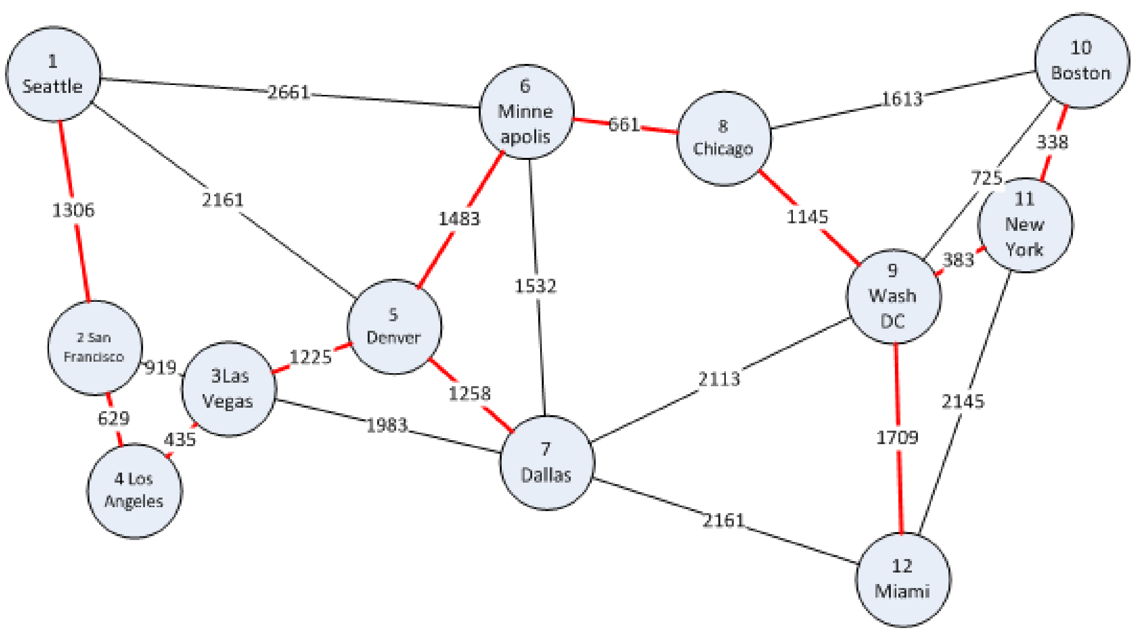
- Đỉnh mức 2 kề b là : c ; e.

Đã đủ 5 đỉnh, ta được cây khung T_2.



Hình 4.12b. Cây khung T_2.

4.3.3 Cây khung nhỏ nhất của đồ thị có trọng số.



Hình 4.13. Sơ đồ các thành phố lớn của Mỹ với các đỉnh là các thành phố, trọng số của các cạnh là khoảng cách giữa các thành phố.

Đồ thị mô hình các thành phố trên **Hình 4.13** là một đồ thị có trọng số.

Định nghĩa: Cho đồ thị vô hướng liên thông $G=(X,U)$. Mỗi cạnh $u \in U$ được gán một trọng số là $l(u)$ với $l(u) \geq 0$. Cây khung T_0 của G gọi là *cây khung nhỏ nhất* (CKNN) nếu tổng trọng số các cạnh của nó đạt giá trị nhỏ nhất.

Nói cách khác, gọi $S(G)$ là tập tất cả các cây khung của G, với mỗi cây khung $T = (X, V) \in S(G)$, kí hiệu: $l(T) = \sum_{v \in V} l(v)$ thế thì, T_0 là cây khung nhỏ nhất của G nếu $l(T_0) = \min_{T \in S(G)} l(T)$.

Có nhiều bài toán dẫn tới việc tìm cây khung nhỏ nhất của đồ thị. Chẳng hạn như, xây dựng một hệ thống đường dây tải điện từ nhà máy điện đến các nơi tiêu thụ; nối các máy tính trong một mạng; xây dựng hệ thống đường sắt; …; sao cho chi phí nhỏ nhất.

Thuật toán Kruskal: Thuật toán Kruskal tìm cây khung nhỏ nhất dựa trên nguyên tắc: Chọn lần lượt đủ $n-1$ cạnh bằng cách mỗi lần chọn thêm một cạnh có trọng số nhỏ nhất, trong số các cạnh còn lại chưa được chọn của G, sao cho các cạnh đã chọn không tạo thành chu trình. Mô tả như sau:

(1) : Sắp xếp tập cạnh U của G theo thứ tự trọng số không giảm: $l(u_1) \leq l(u_2) \leq \cdots \leq l(u_m)$
(2) : Chọn lần lượt các cạnh của dãy trên sao cho các cạnh đã chọn không tạo thành chu trình. Dừng khi chọn đủ $n-1$ cạnh.

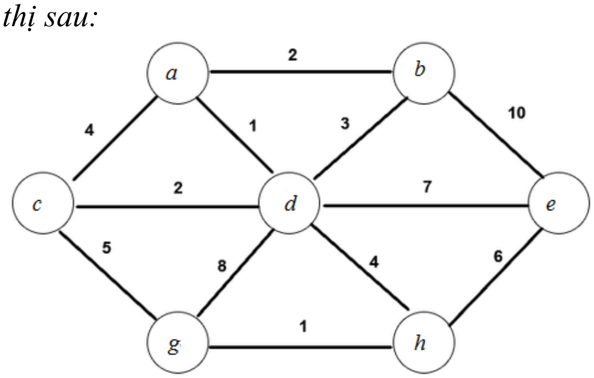
Thuật toán Prim: Thuật toán Prim tìm cây khung nhỏ nhất dựa trên nguyên tắc: Từ một đỉnh tùy của G, chọn lần lượt đủ $n-1$ cạnh bằng cách mỗi lần thêm một cạnh kề có trọng số nhỏ nhất (trong số tất cả các cạnh kề với các đỉnh đã được chọn) sao cho các cạnh đã chọn không tạo thành chu trình. Mô tả như sau:

(1) : Chọn một đỉnh tùy ý làm gốc. Gọi Y = Tập đỉnh đã chọn.
(2) : Gọi K = Tập các cạnh kề với các đỉnh đã chọn, mà đỉnh kia $\notin Y$.

Gọi v_0 là cạnh có *trọng số nhỏ nhất* trong các cạnh kề thuộc K, tức $l(v_0) = \min_{u \in K} l(u)$.
Giả sử $v_0 = (y_0, z_0)$ với $y_0 \in Y$, $z_0 \notin Y$. Khi đó: v_0 là cạnh tiếp theo được chọn và $Y := Y \cup \{z_0\}$.

(3) : Lặp lại B2. Dừng khi $Y = X$.

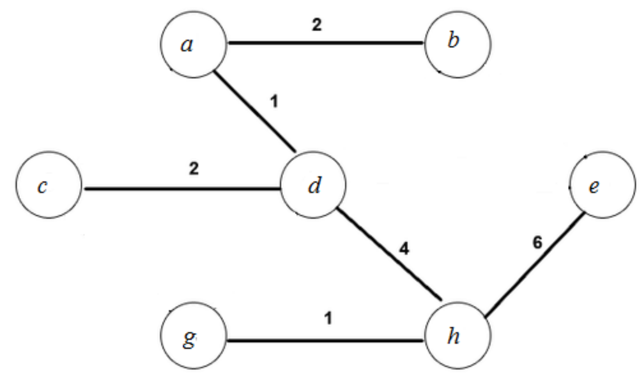
<u>*Ví dụ 1*</u> *Tìm CKNN của đồ thị sau:*



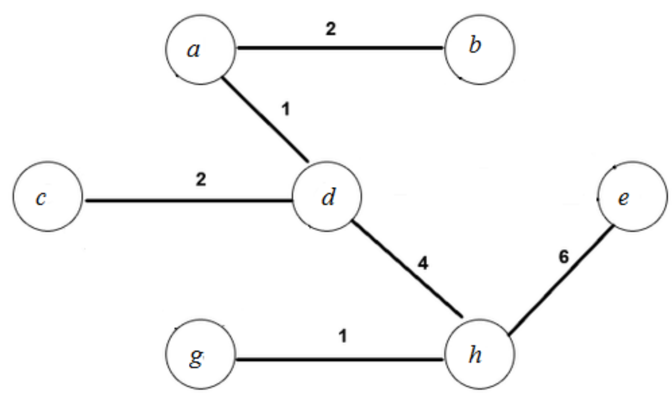
Hình 4.14. Tìm cây khung nhỏ nhất của đồ thị *G*.

Giải.

Có n = 7. Cây khung của G có 6 cạnh. Theo thuật toán Kruskal:

TT	*Trọng số*	*Bước chọn*	*Đỉnh đã chọn*	*Cây khung nhỏ nhất*
1	*1 = (a,d)*	*1*	*a; d*	
2	*1 = (g,h)*	*2*	*g; h*	
3	*2 = (c,d)*	*3*	*c*	
4	*2 = (a,b)*	*4*	*b*	
5	*3 = (b,d)*	------------	-----------------	
6	*4 = (a,c)*	------------	-----------------	
7	*4 = (d,h)*	*5*		
8	*5 = (c,g)*	------------	-----------------	
9	*6 = (e,h)*	*6*	*e*	
10	*7 = (d,e)*	------------	-----------------	
11	*8 = (d,g)*	------------	-----------------	T_0
12	*10 = (b,e)*	------------	-----------------	*Trọng số của CKNN là:* $l(T_0) =$ *16.*

Theo thuật toán Prim:

TT	*Các cạnh kề*	*Cạnh kề nhỏ nhất*	*Đỉnh đã chọn*	*Cây khung nhỏ nhất*
0			*a*	
1	*(a,d) = 1*	*(a,d) = 1*	*d*	
2	*(a,b) = 2* *(d,c) = 2…*	*(a,b) = 2*	*b*	
3	*(d,c) = 2* *(b,e) = 10…*	*(d,c) = 2*	*c*	
4	*(c,g) = 5* *(d,h) = 4…*	*(d,h) = 4*	*h*	
5	*(h,g) = 1* *(c,g) = 5…*	*(h,g) = 1*	*g*	
6	*(h,e) = 6…*	*(h,e) = 6*	*e*	T_0 *Trọng số của CKNN là:* $l(T_0) =$ *16.*

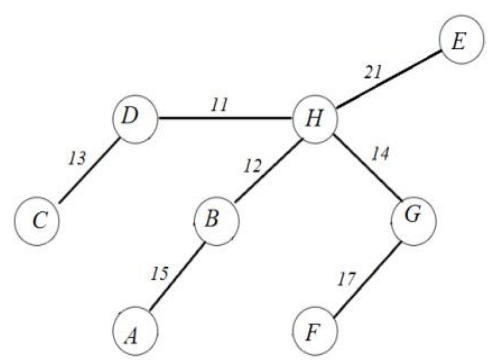
<u>Ví dụ 2:</u> Tìm cây khung nhỏ nhất của đồ thị có ma trận kề trọng số là :

$$
\begin{array}{c}
\\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} A & B & C & D & E & F & G & H \end{array} \\
\begin{bmatrix}
\infty & 15 & 16 & 19 & 23 & 20 & 32 & 18 \\
15 & \infty & 33 & 13 & 34 & 19 & 20 & 12 \\
16 & 33 & \infty & 13 & 29 & 21 & 20 & 19 \\
19 & 13 & 13 & \infty & 22 & 30 & 21 & 11 \\
23 & 34 & 29 & 22 & \infty & 34 & 23 & 21 \\
20 & 19 & 21 & 30 & 34 & \infty & 17 & 18 \\
32 & 20 & 20 & 21 & 23 & 17 & \infty & 14 \\
18 & 12 & 19 & 11 & 21 & 18 & 14 & \infty
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

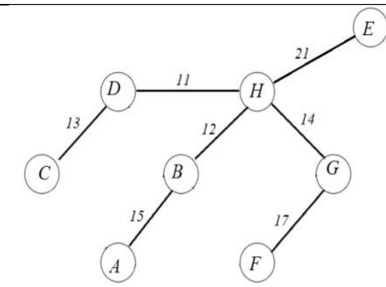
Giải. n = 8 (đỉnh) => cây khung có 7 cạnh.

Xét nửa ma trận dưới của A. (Lưu ý: Đánh dấu các cạnh đã chọn và xóa cạnh để không tạo thành chu trình, tức là nếu đã chọn 2 cạnh (i,k) và (k,s) thì phải xóa (i,s).)

Thuật toán Kruskal:

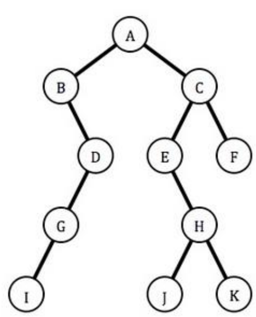
TT	A	B	C	D	E	F	G	Cạnh chọn	Cạnh xóa
B	15								
C	16	33							
D	19	13	13						
E	23	34	29	22					
F	20	19	21	30	34				
G	32	20	20	21	23	17			Cây khung nhỏ nhất T_0
H	18	12	19	11	21	18	14		
Trọng	15	12	13	11	21	17	14	DH (11)	
số				21				BH (12)	BD
nhỏ		19						DC (13)	CH, CB
nhất		19	20					GH (14)	GB, GD, GC
trên		19	21	22			∞	AB (15)	AH, AD, AC, AG
từng	20							GF (17)	FA, FB, FC, FD, FH
cột	23	34	29			∞		EH (21)	Vậy: $l(T_0) = 103$

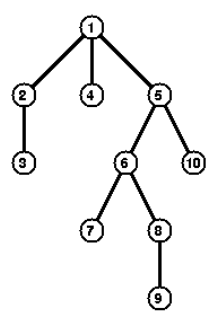
Thuật toán Prim:

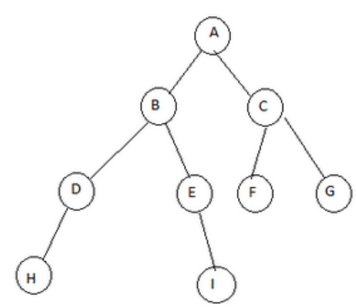
TT	A	B	C	D	E	F	G	H	Cạnh chọn	Đỉnh chọn	Cạnh xóa
B	15										
C	16	33									
D	19	13	13								
E	23	34	29	22							
F	20	19	21	30	34						
G	32	20	20	21	23	17					
H	18	12	19	11	21	18	14	∞			
Khởi tạo										A	
Trọng số nhỏ nhất kề với đỉnh đã chọn	15								AB = 15	B	
	16	12							BH = 12	H	HA
	16	13						11	HD =11	D	DB, DA
	16	19		13				14	DC =13	C	CA, CB, CH
	20	19	20	21				14	HG =14	G	GA, GB, GC, GD
	20	19	21	22			17	18	GF = 17	F	FA, FB, FC, FD, FH
	23	34	29	22		34	23	21	HE = 21	E	Vậy: $l(T_0) = 103$

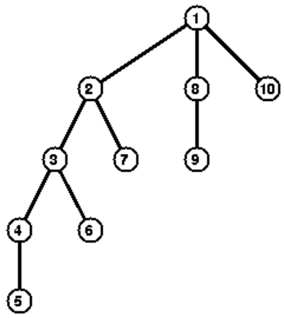
BÀI TẬP CHƯƠNG 4

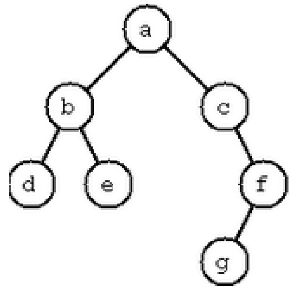
4.1. Trong các đồ thị sau đồ thị nào là cây? Cây nhị phân? Xác định số lá và chiều cao của các cây đó?

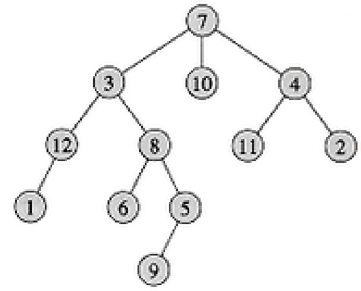
a) 

b) 

c) 

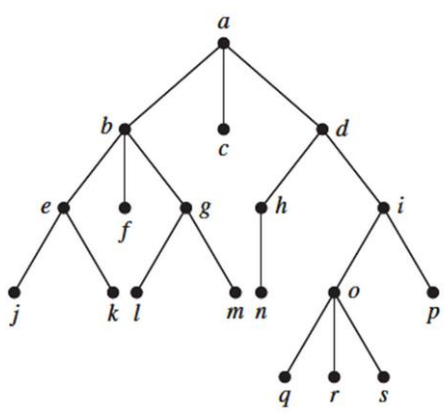
d) 

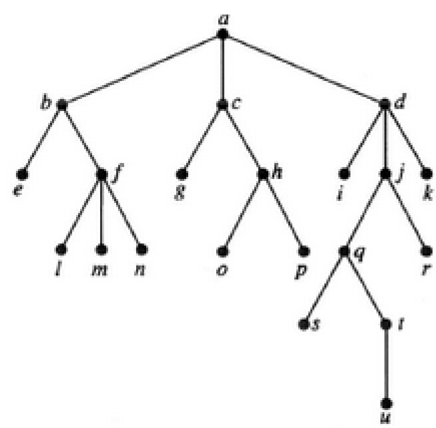
e) 

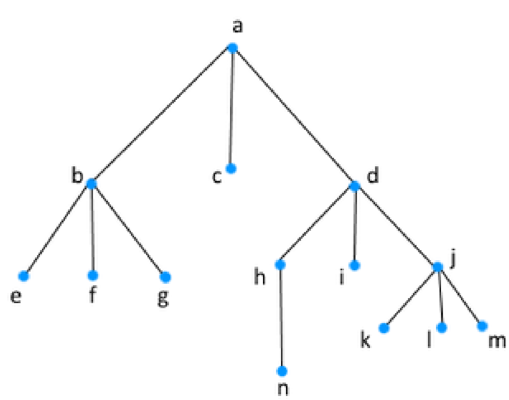
f) 

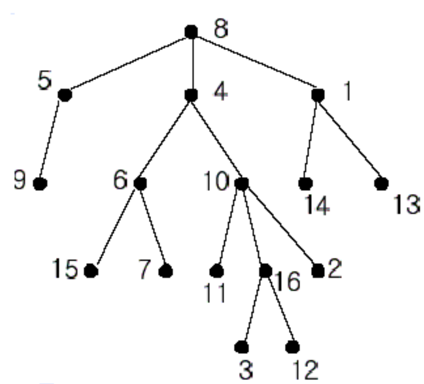
4.2. Cây tam phân đầy đủ có chiều cao 3 có nhiều nhất bao nhiêu lá? Vẽ cây tam phân cân đối có chiều cao 3 và có 20 lá? Vẽ cây nhị phân có 10 lá với chiều cao thấp nhất?

4.3. Hãy xác định thứ tự mà các đỉnh được viếng thăm của cây có gốc sau, nếu ta duyệt nó theo thuật toán tiền thứ tự, hậu thứ tự và trung thứ tự.

a) 

b) 

c) 

d) 

4.4. Vẽ cây có gốc biểu diễn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{x^2 + 3x - 5} + 36$.

b) $|x^3 - 6xy| + \frac{5x^2+x}{2x-1}$.

c) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

d) $(a - b)(b - c)(c - a)$

4.5. Hãy biểu diễn các biểu thức trong **Bài 4.4** trên theo ký pháp Ba Lan và ký pháp Ba Lan ngược?

4.6. Tính giá trị của biểu thức có dạng tiền tố hoặc dạng hậu tố sau:

a) $- + * \; 3 \; 4 \; \wedge - 5 \; 4 \; 3 \; \backslash \; 15 \; - \; 2 \; 3 .$ c) $13 \; 8 - 5 * \; 2 * \; 40 \; 2 \; \backslash \; 3 * +$

b) $- + \backslash - \sqrt{} \; 81 \; 3 \; 2 * * \; 7 \; 5 \; 2 * + 2 \; 1$ d) $4 \; 3 \; 2 \; \backslash + 8 * \; 2 *$

4.7. Cho tập kí tự *X = {a; e; h; l; m; o; u; r; s; t; y}*.

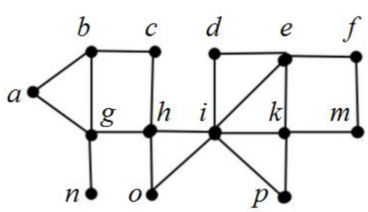
a) Tìm một mã tiền tố của *X*.

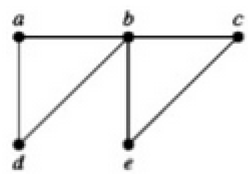
b) Tìm mã tiền tố tối ưu của *X* cho bản tin *Y = "You are my heart you are my soul".*

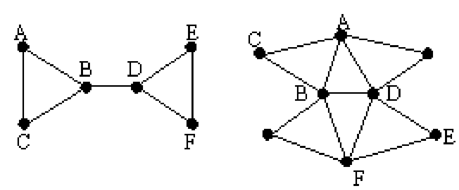
c) Xác định mã của bản tin *Y* đối với cả hai mã tìm được trong câu a và câu b.

4.8. Cần phải cân ít nhất bao nhiêu lần bằng một chiếc cân hai đĩa để tìm đồng xu giả trong 8 đồng xu. Biết rằng đồng xu giả có trọng lượng nhẹ hơn đồng xu thật. Mô tả lời giải bài toán bằng cây quyết định.

4.9. Tìm cây khung của các đồ thị sau: Theo thuật toán tìm kiếm ưu tiên chiều sâu và tìm kiếm ưu tiên chiều rộng.

a) 

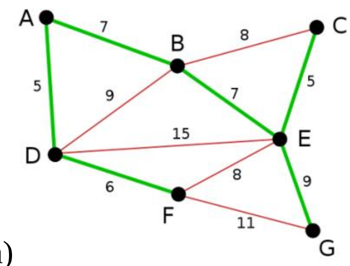
b) 

c) 

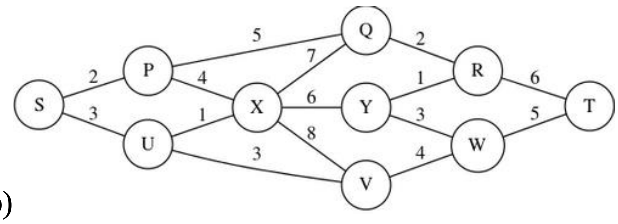
4.10. Tìm cây khung của các đồ thị cho bởi ma trận kề sau: Theo thuật toán tìm kiếm ưu tiên chiều sâu và tìm kiếm ưu tiên chiều rộng.

$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \\ k \\ m \\ n \\ o \\ i \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h & k & m & n & o & i \end{array} \\ \begin{bmatrix} . & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & . & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

4.11. Tìm cây khung nhỏ nhất của các đồ thị sau: Theo thuật toán Kruskal và thuật toán Prim.



a)



b)

4.12. Hãy xây dựng một hệ thống đường dây tải điện từ nhà máy điện đặt tại Los Angeles đến tất cả các thành phố lớn khác trên sơ đồ trong **Hình 4.13**, sao cho chi phí đường dây là nhỏ nhất.

4.13. Tìm cây khung nhỏ nhất của các đồ thị cho bởi ma trận kề sau: Theo thuật toán Kruskal và thuật toán Prim.

$$a)\ A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{bmatrix} . & 3 & \infty & 3 & 1 \\ 3 & . & 5 & 2 & 3 \\ \infty & 5 & . & 2 & \infty \\ 3 & 2 & 2 & . & 2 \\ 1 & 3 & \infty & 2 & . \end{bmatrix} \end{array}$$

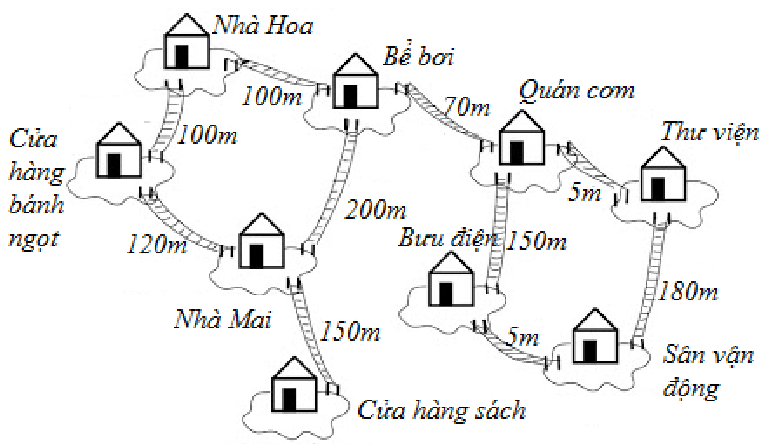
$$b)\ A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{bmatrix} . & 5 & 7 & 9 & 12 & 15 \\ 5 & . & 8 & 10 & 13 & 17 \\ 7 & 8 & . & 9 & 7 & 3 \\ 9 & 10 & 9 & . & 12 & 9 \\ 12 & 13 & 7 & 12 & . & 18 \\ 14 & 17 & 3 & 9 & 18 & . \end{bmatrix} \end{array}$$

Chương 5.

MỘT SỐ BÀI TOÁN TỐI ƯU TRÊN ĐỒ THỊ

Mục tiêu: Người học xác định được đường đi ngắn nhất trên đồ thị, tâm và bán kính của đồ thị. Người học xác định được luồng cực đại và lát cắt hẹp nhất của một mạng vận tải *G* cho trước. Người học xác định được hành trình theo thứ tự như thế nào để chi phí là nhỏ nhất trong Bài toán du lịch.

5.1. BÀI TOÁN ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT TRÊN ĐỒ THỊ



Hình 5.1. Sơ đồ một khu dân cư.

Nhiều bài toán có thể mô hình bằng đồ thị có trọng số. Cũng như, trước mỗi chuyến đi, chúng ta thường phải suy nghĩ và chọn cho mình một hành trình "tiết kiệm" nhất theo nghĩa tốn ít thời gian nhất, tốn ít nhiên liệu nhất hoặc tốn ít tiền nhất, ...

Bài toán: Cho đồ thị có trọng số $G = (X, U)$, mỗi cạnh (cung) $u \in U$ có trọng số $l(u) \geq 0$. Hãy tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh x cho trước đến mọi đỉnh khác của G.

Lưu ý: Đường đi từ đỉnh x đến y gọi là đường đi ngắn nhất nếu tổng trọng số của các cạnh (cung) trên đường đi này là nhỏ nhất.

Nếu trọng số của các cạnh (cung) trên đồ thị đều bằng nhau thì ta coi đồ thị không có trọng số. Lúc đó, đường đi từ x đến y là ngắn nhất nếu tổng số các cạnh (cung) trên đường đi này là ít nhất.

5.1.1. Đường đi ngắn nhất trên đồ thị không có trọng số.

Trường hợp *G* là *đồ thị vô hướng*, thì thuật toán xây dựng cây khung của *G* theo hướng *tìm kiếm ưu tiên chiều rộng* cho một lời giải của bài toán này.

Thuật toán sau đây cho lời giải của bài toán trong cả trường hợp G là *đồ thị có hướng*. Thuật toán này dựa trên quy tắc tạo nhãn cho mỗi đỉnh. Đỉnh y có nhãn là k thì đường đi ngắn nhất từ x đến y có độ dài bằng k. Thuật toán gồm hai bước, mô tả cụ thể như sau:

(1) *(Gán nhãn cho các đỉnh của đồ thị - xây dựng các tập đỉnh A(k)):*

- Đỉnh xuất phát x có nhãn là 0. Gọi $A(k)$ = Tập tất cả các đỉnh có nhãn là k.
- Mọi đỉnh z $\begin{cases}\text{kề với đỉnh } y \text{ có nhãn là } k \\ \text{và chưa được gán nhãn}\end{cases}$ thì được gán nhãn là $k + 1$.

Hay nói cách khác, $A(k + 1) = \{z \in X \mid (z \notin A_i, \forall i = \overline{0,k}) \text{ và } (\exists y \in A_k : (y,z) \in U)\}$.

(2) *(Xác định đường đi ngắn nhất từ các tập đỉnh A(k)):*

Đường đi ngắn nhất từ đỉnh x đến đỉnh $y \in A(k)$ có độ dài bằng k. Đường đi được tìm ngược lại từ đỉnh $y_{k-1} \in A(k-1)$, kề với đỉnh y.

Đường đi đó là $<x\ ;\ y_1\ ;\ y_2\ ;\ \ldots\ ;\ y_{k-1};\ y>$ trong đó $y \in A(k)$, $y_{k-1} \in A(k-1)$, ..., $y_1 \in A(1)$, $x \in A(0)$.

Lưu ý: Nếu đỉnh z không được gán nhãn, tức là x và z không liên thông thì ta coi độ dài đường đi từ x đến z là ∞.

<u>Ví dụ:</u> Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh A đến đỉnh các đỉnh còn lại của G trong đồ thị dưới đây.

Giải. Ta có :

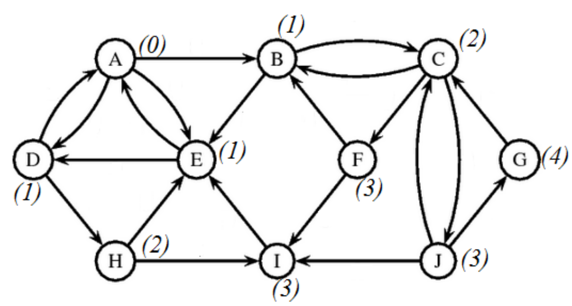
$A(0) = \{A\}$

$A(1) = \{B\ ;\ D\}$

$A(2) = \{C\ ;\ E\ ;\ H\}$

$A(3) = \{F\ ;\ J\ ;\ I\}$

$A(4) = \{G\}$



Hình 5.2. Đồ thị G.

Vậy đường đi ngắn nhất từ A đến các đỉnh còn lại của G là :

Đỉnh xuất phát A	*B*	*D*	*C*	*E*	*H*	*F*	*J*	*I*	*G*
Đường đi	*AB=1*	*AD=1*	*ABC=2*	*ABE=2*	*ADH=2*	*ABCF=3*	*ABCJ=3*	*ADHI=3*	*ABCJG=4*

5.1.2. Thuật toán DIJKSTRA tìm đường đi ngắn nhất trên đồ thị có trọng số không âm.

Thuật toán dựa trên quy tắc: Tạo nhãn cho mỗi đỉnh. Mỗi đỉnh $y \in X$ có hai nhãn $t(y)$ và $m(y)$, với :

- Nhãn $t(y)$ là *đỉnh liền trước* y trên đường đi ngắn nhất từ x đến y.
- Nhãn $m(y)$ là trọng số của đỉnh y, được xác định bằng *tổng trọng số của các cạnh (cung)* trên đường đi ngắn nhất từ x đến y.

Thuật toán Dijkstra gồm hai bước mô tả như sau :

(1) : *(Khởi tạo - Gán nhãn tạm thời):*

- Đỉnh xuất phát $x[m(x) = 0, t(x) = x]$.
- Mọi đỉnh y khác x thì $y[m(y) = \infty, t(y) = x]$.

  Đặt $S = X$ (là tập tất cả các đỉnh có nhãn chưa cố định).

(2) : *(Lặp - Cố định nhãn cho đỉnh y_0 có trọng số nhỏ nhất, và khởi tạo lại nhãn cho các đỉnh kề với y_0):*

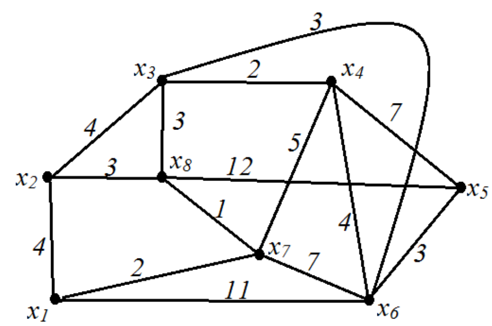
- Nếu $m(y_0) = \min_{y \in S}\{m(y)\}$ thì $S := S \setminus \{y_0\}$.
- Nếu $z \in S$ mà $(y_0, z) \in U$ và $m(y_0) + l(y_0, z) \le m(z)$ thì $m(z) = m(y_0) + l(y_0, z)$ và $t(z) = y_0$.

  Lặp lại bước (2), thuật toán dừng khi $S = \emptyset$.

Đường đi ngắn nhất được tìm ngược lại từ đỉnh kề liền trước $t(y)$.

Ví du 1:

Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh x_1 đến tất cả các đỉnh còn lại của đồ thị sau :



Hình 5.3. Đồ thị *G*.

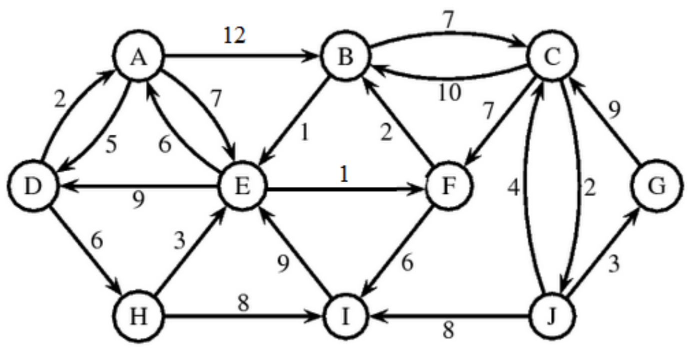
Giải. Áp dụng thuật toán Dijkstra, kết quả gán nhãn cho các đỉnh được tóm tắt qua bảng sau:

Bước lặp	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	*Đỉnh cố định*
Khởi tạo	$0, x_1$	∞, x_1	∞, x_1	∞, x_1	∞, x_1	∞, x_1	∞, x_1	∞, x_1	x_1
1	-	$4, x_1$				$11, x_1$	$2, x_1$		x_7
2	-	$4, x_1$		$7, x_7$		$9, x_7$	-	$3, x_7$	x_8
3	-	$4, x_1$	$6, x_8$	$7, x_7$	$15, x_8$	$9, x_7$	-	-	x_2
4	-	-	$6, x_8$	$7, x_7$	$15, x_8$	$9, x_7$	-	-	x_3
5	-	-	-	$7, x_7$	$15, x_8$	$9, x_7 \cup x_3$	-	-	x_4
6	-	-	-	-	$14, x_4$	$9, x_7 \cup x_3$	-	-	x_6
7	-	-	-	-	$12, x_6$	-	-	-	x_5

Vậy, đường đi ngắn nhất từ x_1 đến các đỉnh còn lại của G là:

Đỉnh xuất phát x_1	x_7	x_8	x_2	x_3	x_4	x_6	x_5
Đường đi	$x_1x_7=2$	$x_1x_7x_8=3$	$x_1x2=4$	$x_1x_7x_8x_3=6$	$x_1x_7x_4=7$	$x_1x_7x_6=$ $x_1x_7x_8x_3x_6=9$	$x_1x_7x_6x_5=$ $x_1x_7x_8x_3x_6x_5=12$

<u>Ví dụ 2:</u> Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh A đến đỉnh các đỉnh còn lại của G.



Hình 5.4. Đồ thị *G*.

Giải.

Bước lặp	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*	*Đỉnh cố định*
Khởi tạo	*0,A*	*∞,A*	*∞,A*	*∞,A*	*∞,A*	*∞,A*	*∞,A*	*∞,A*	*∞,A*	*∞,A*	*A*
1	-	*12,A*		*5,A*	*7,A*						*D*
2	-	*12,A*		-	*7,A*			*11,D*			*E*
3	-	*12,A*		-	-	*8,E*		*11,D*			*F*
4	-	*10,F*		-	-	-		*11,D*	*14,F*		*B*
5	-	-	*17,B*	-	-	-		*11,D*	*14,F*		*H*
6	-	-	*17,B*	-	-	-		-	*14,F*		*I*
7	-	-	*17,B*	-	-	-		-	-		*C*
8	-	-	-	-	-	-		-	-	*19,C*	*J*
9	-	-	-	-	-	-	*21,J*	-	-	-	*G*

Vậy đường đi ngắn nhất từ A đến các đỉnh khác của đồ thị là:

Đỉnh xuất phát A	*D*	*E*	*F*	*B*	*H*	*I*	*C*	*J*	*G*
Đường đi	*AD=5*	*AE=7*	*AEF =8*	*AEFB =10*	*ADH =11*	*AEFI =14*	*AEFBC =17*	*AEFBCJ =19*	*AEFBCJG =21*

5.1.3. Tâm và bán kính của đồ thị vô hướng có trọng số không âm

Cho đồ thị vô hướng có trọng số *G = (X, U)*. Kí hiệu: *d(x,y)* là độ dài đường đi ngắn nhất từ *x* đến *y*.

Quy ước: *d(x,x) = 0, d(x,y)* = ∞ nếu *x, y* không liên thông.

Định nghĩa:

(1) Đại lượng *d(x,y)* còn gọi là *khoảng cách* hay *độ lệch giữa hai đỉnh x, y*.

(2) *Độ lệch của đỉnh x* là khoảng cách lớn nhất từ *x* đến một đỉnh trong đồ thị, kí hiệu là $\alpha(x)$. Hay nói cách khác: $\alpha(x) = \max_{y\in X}\{d(x,y)\}$.

(3) *Tâm của đồ thị G*, kí hiệu x_0, là đỉnh có độ lệch bé nhất trên *G*. Hay $\alpha(x_0) = \min_{x\in X}\{\alpha(x)\}$.

(4) *Bán kính của đồ thị*, kí hiệu là *r(G)*, là độ lệch tại tâm x_0 của *G* (tức là độ lệch bé nhất trên tất cả các đỉnh).
Như vậy, nếu x_0 là tâm của *G* thì $r(G) = \alpha(x_0) \le \alpha(x), \forall x \in X.$

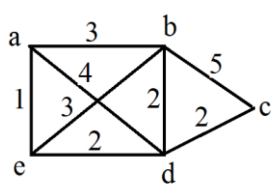
(5) *Đỉnh rìa* là những đỉnh cách tâm một khoảng đúng bằng bán kính.
Hay nói cách khác, nếu x_0 là tâm của *G* thì *z* là đỉnh rìa ⇔ $d(x_0,z) = r(G)$ $(= \alpha(x_0))$.

(6) *Đường kính của G*, kí hiệu là *d(G)*, là khoảng cách dài nhất giữa các cặp đỉnh trong đồ thị. Hay nói cách khác, $d(G) = \max_{x,y\in X}\{d(x,y)\} = \max_{x\in X} \alpha(x)$.

***Quy ước*:** Nếu *G* có đỉnh cô lập thì *G* không có tâm vì $\alpha(x_0) = \infty$ với $\forall x_0 \in X$.

Ý nghĩa hình học của tâm của đồ thị : Nếu vẽ một vòng tròn có tâm và bán kính như định nghĩa thì tất cả các đỉnh của đồ thị sẽ nằm trong vòng tròn này.

<u>Ví dụ 1:</u> Xác định tâm, bán kính, đỉnh rìa, đường kính của đồ thị sau:



Hình 5.5. Đồ thị G

Giải. Áp dụng thuật toán Dijkstra với mỗi đỉnh lần lượt là đỉnh xuất phát.

Có: α(a) = 5, α(c) = 5, α(b) = 4, α(d) = 3, α(e) = 4.

Tâm là đỉnh d, bán kính r(G)= 3, đỉnh rìa là đỉnh a, đường kính là d(G)= 5.

Cách khác để tìm tâm của *G* là áp dụng thuật toán sau:

Thuật toán Floyd (tìm đường đi ngắn nhất giữa tất cả các cặp đỉnh): Thuật toán cho phép xác định ma trận *D* gọi là *ma trận khoảng cách giữa các cặp đỉnh*, như sau:

(1) : Giả sử các đỉnh được đánh số từ *1* đến *n*. Đặt $D^{(1)} := A$ là ma trận trọng số của *G*.
$D^{(1)}[i,j]$ = *độ dài đường đi từ đỉnh i đến đỉnh j.*

(2) : (Lặp) Ở bước thứ *k* $(k \ge 2)$, ma trận $D^{(k)}$ với các phần tử $D^{(k)}[i,j]$ xác định theo công thức:

$$D^{(k)}[i,j] = \min_{1\le s\le n}\{D^{(k-1)}[i,j]; D^{(k-1)}[i,s] + D^{(k-1)}[s,j]\}.$$

Thuật toán dừng khi $k = n$.
Kết luận: $D = D^{(n)}$. Và *D[i,j] = độ dài đường đi ngắn nhất từ đỉnh i đến đỉnh j.*

Thuật toán tìm tâm của đồ thị gồm các bước như sau***:***

(1) : Dùng thuật toán Floyd để tính ma trận khoảng cách giữa các cặp đỉnh *D*.
(2) : Tìm giá trị lớn nhất trên mỗi hàng (cột), cho ta độ lệch của đỉnh tương ứng.
(3) : Đỉnh với độ lệch bé nhất chính là tâm của đồ thị.

*<u>Ví dụ 2:</u> Ma trận kề trọng số của đồ thị G trong **Hình 5.5** là:*

$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 3 & \infty & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 5 & 2 & 3 \\ \infty & 5 & 0 & 2 & \infty \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & \infty & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$=> \text{Ma trận khoảng cách giữa các cặp đỉnh là } D = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \text{Độ lệch} \\ 5 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

Vậy d là tâm của G, bán kính r(G) = 3, a là đỉnh rìa, đường kính của G là 5 = d(a,c).

5.2. MẠNG VÀ LUỒNG.

5.2.1. Các định nghĩa.

Định nghĩa 1: *Mạng* là một đồ thị có hướng *G = (X,U)* không có khuyên, trong đó:

(1) Có duy nhất một đỉnh không có cung đi vào, gọi là *đỉnh phát*, kí hiệu x_0.
(2) Có duy nhất một đỉnh không có cung đi ra, gọi là *đỉnh thu*, kí hiệu *z*.
(3) Mỗi cung $u \in U$, được gán một trọng số không âm, kí hiệu $c(u) \ge 0$, gọi là *khả năng thông qua của cung đó.*

Kí hiệu: $U^-(x)$ = Tập các cung đi vào đỉnh *x* ; $U^+(x)$ = Tập các cung đi ra từ đỉnh *x*.
Ta có: $U^-(x_0) = \emptyset$; $U^+(z) = \emptyset$.

Định nghĩa 2: Cho mạng $G = (X, U)$ có đỉnh phát x_0, đỉnh thu z, và khả năng thông qua $c(u)$, $u \in U$.

(1) *Một luồng Φ trên mạng G* là một hàm số không âm xác định trên U vào R^+,

$$\Phi: U \rightarrow R^+, \qquad u \mapsto \Phi(u)$$

($\Phi(u)$ gọi là giá trị luồng Φ trên cung u), thỏa mãn các điều kiện sau:

(1) (*Điều kiện trên cung*): Luồng trên mỗi cung không vượt quá khả năng thông qua trên cung:

$$0 \le \Phi(u) \le c(u), \quad \forall u \in U.$$

(2) (*Điều kiện cân bằng trên mỗi đỉnh*): Tổng giá trị của luồng trên các cung đi vào mỗi đỉnh (trừ x_0 và z) = Tổng giá trị của luồng trên các cung đi ra đỉnh đó:

$$\sum_{u \in U^-(x)} \Phi(u) = \sum_{v \in U^+(x)} \Phi(v), \quad \forall x \in X \backslash \{x_0, z\}.$$

(2) *Giá trị của luồng Φ* trên G, kí hiệu là $Val(\Phi)$, được xác định như sau:

$$Val(\Phi) = \sum_{u \in U^+(x_0)} \Phi(u) \quad \text{hay} \quad Val(\Phi) = \sum_{v \in U^-(z)} \Phi(v).$$

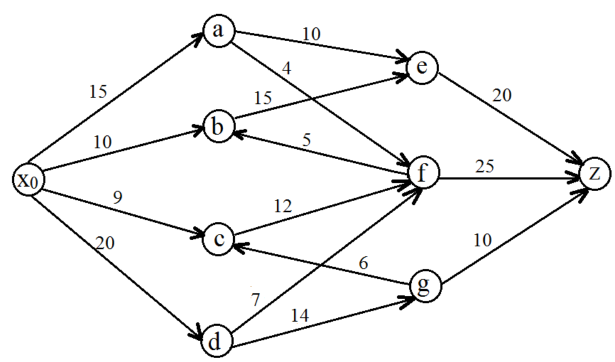
(3) *Một lát cắt (A, A')* là một cách phân hoạch tập đỉnh $X = A \cup A'$ sao cho $\begin{cases} A \cap A' = \emptyset \\ A \ni x_0 \,;\, A' \ni z \end{cases}$.

Khả năng thông qua của lát cắt (A, A'), kí hiệu $c(A, A')$: $c(A, A') = \sum_{u=(x,y), x \in A, y \in A'} c(u)$.

Lát cắt có khả năng thông qua nhỏ nhất gọi là *lát cắt hẹp nhất.*

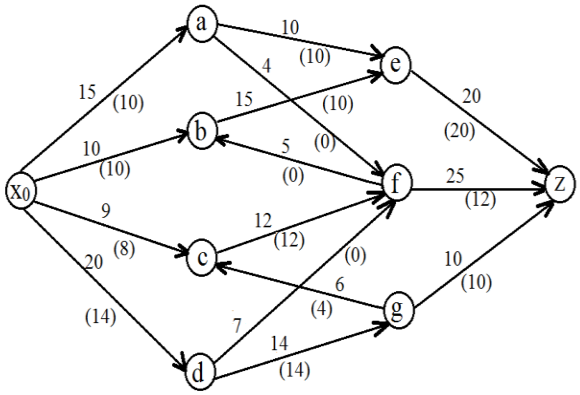
<u>*Ví dụ 1:*</u>

*Đồ thị có hướng G (**Hình 5.6**) là một mạng với đỉnh phát x_0, đỉnh thu z, khả năng thông qua là trọng số ghi trên từng cung.*

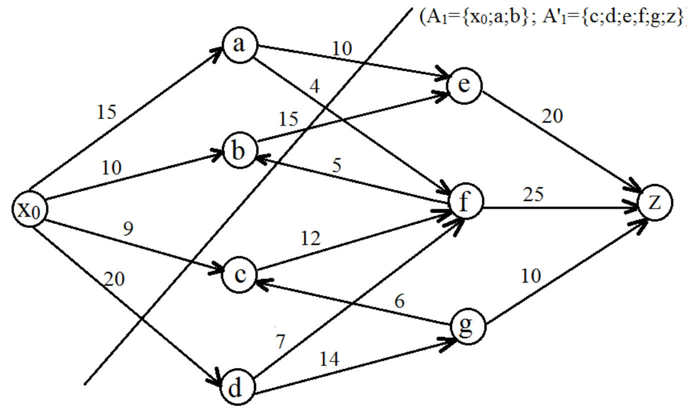


Hình 5.6. Mạng G với đỉnh phát x_0 và đỉnh thu z.

<u>*Ví dụ 2:*</u>



Hình 5.7a. Luồng Φ trên mạng *G*



Hình 5.7b. Lát cắt *(A_1;A'_1)* trên mạng *G*.

Dễ dàng kiểm tra thấy luồng Φ (giá trị luồng trên từng cung là số cho trong ngoặc đơn bên dưới mỗi cung) thỏa mãn điều kiện trên từng cung, chẳng hạn, $0 < \Phi(f,z) = 12 < c(f,z) = 25$. *Và thỏa mãn điều kiện cân bằng tại mỗi đỉnh, chẳng hạn, xét tại đỉnh f:* $\sum_{u\in U^-(f)}\Phi(u) = \sum_{v\in U^+(f)}\Phi(v)$ *(vì* $\sum_{u\in U^-(f)}\Phi(u) = \Phi(a,f)+\Phi(c,f)+\Phi(d,f) = 0+12+0 = 12$; $\sum_{v\in U^+(f)}\Phi(v) = \Phi(f,b)+\Phi(f,z) = 0+12 = 12$.

*Giá trị của luồng Φ trên **Hình 5.7a** là* $Val(\Phi) = \sum_{u\in U^+(x_0)}\Phi(u) = \Phi(x_0,a)+\Phi(x_0,b)+\Phi(x_0,c)+\Phi(x_0,d) = 10+10+8+14 = 42$.

*Trên **Hình 5.7b**, phân hoạch (A_1;A'_1) là một lát cắt của mạng G, với* $A_1 = \{x_0;a;b\}$ *và* $A'_1 = X\backslash A_1 = \{c;d;e;f;g;z\}$. *Khả năng thông qua của lát cắt này là:* $c(A_1;A'_1) = c(a,e) + c(a,f) + c(b,e) + c(x_0,c) + c(x_0,d) = 10 + 4 + 15 + 9 + 20 = 58$.

Rõ ràng: $Val(\Phi) < c(A_1;A'_1)$.

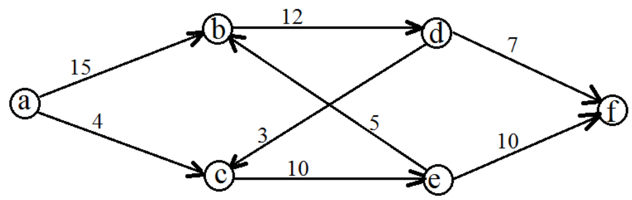
5.2.2. Bài toán luồng cực đại. Thuật toán Ford – Fulkerson tìm luồng cực đại.

Bài toán: Cho mạng *G = (X, U)*. Hãy tìm luồng Φ^* trên mạng *G* sao cho giá trị $Val(\Phi^*)$ là lớn nhất.

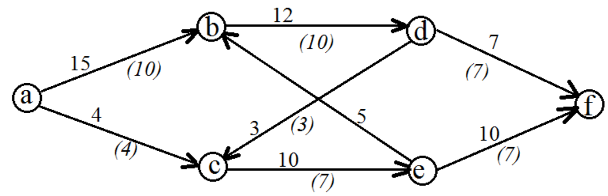
***Lưu ý* :** Do điều kiện *(1i)* nên: $Val(\Phi) \le c(A,A'), \forall (A,A')$ và $\forall\Phi$. Suy ra: $Val(\Phi)_{max} = c(A, A')_{min}$.

Do vậy một cách tìm luồng cực đại là liệt kê tất cả các lát cắt trên mạng *G* và tính khả năng thông qua của các lát cắt này để tìm lát cắt hẹp nhất. Từ đó suy ra giá trị luồng cực đại.

Ví dụ 1 : Tìm giá trị luồng lớn nhất trên mạng G sau :



Hình 5.8a. Mạng G.



Hình 5.8b. Luồng cực đại trên mạng G.

Giải. G có 6 đỉnh với đỉnh phát là a, đỉnh thu f. Số lát cát trên mạng G là $2^4 = 16$ *(lát cắt).*

$A_1 = \{a\}$, $A'_1 = \{b,c,d,e,f\}$ => $c(A_1;A'_1) = 15+4 = 19$

$A_2 = \{a,b\}$, $A'_2 = \{c,d,e,f\}$ => $c(A_2;A'_2) = 12+4 = 16$

$A_3 = \{a,c\}$, $A'_3 = \{b,d,e,f\}$ => $c(A_3;A'_3) = 15+10 = 15$

$A_4 = \{a,d\}$, $A'_4 = \{b,c,e,f\}$ => $c(A_4;A'_4) = 15+4+3+7 = 29$

$A_5 = \{a,e\}$, $A'_5 = \{b,c,d,f\}$ => $c(A_5;A'_5) = 15+4+5+10= 34$

$A_6 = \{a,b,c\}$, $A'_6 = \{d,e,f\}$ => $c(A_6;A'_6) = 12+10 = 22$

$A_7 = \{a,b,d\}$, $A'_7 = \{c,e,f\}$ => $c(A_7;A'_7) = 4+3+7 = 14$

$A_8 = \{a,b,e\}$, $A'_8 = \{c,d,f\}$ => $c(A_8;A'_8) = 4+12+10 = 26$

$A_9 = \{a,c,d\}$, $A'_9 = \{b,e,f\}$ => $c(A_9;A'_9) = 15+10+7 = 32$

$A_{10} = \{a,c,e\}$, $A'_{11} = \{b,d,f\}$ => $c(A_{10};A'_{10}) = 15+5+10 = 30$

$A_{11} = \{a,d,e\}$, $A'_{11} = \{b,c,f\}$ => $c(A_{11};A'_{11}) = 15+4+3+7+5+10 = 45$

$A_{12} = \{a,b,c,d\}$, $A'_{12} = \{e,f\}$ => $c(A_{12};A'_{12}) = 10+7 = 17$

$A_{13} = \{a,b,c,e\}$, $A'_{13} = \{d,f\}$ => $c(A_{13};A'_{13}) = 12+10 = 22$

$A_{14} = \{a,b,e,d\}$, $A'_{14} = \{c,f\}$ => $c(A_{14};A'_{14}) = 4+3+7+10 = 24$

$A_{15} = \{a,c,d,e\}$, $A'_{15} = \{b,f\}$ => $c(A_{15};A'_{16}) = 15+7+10 = 32$

$A_{16} = \{a,b,c,d,e\}$, $A'_{16} = \{f\}$ => $c(A_{16};A'_{16}) = 7+10 = 17$

Vậy : $Val(\Phi)_{max} = c(A_i,A'_i)_{min} = c(A_7;A'_7) = 14$. *(Như trên **Hình 5.8b**). (Lưu ý : giá trị luồng cực đại trên các cung xuyên qua lát cắt bằng khả năng thông qua của các cung đó .)*

Ngược lại, nếu biết luồng cực đại trên *G*, ta có thể xác định lát cắt hẹp nhất từ *Thuật toán Ford – Fulkerson*. Trước hết, ta xét các khái niệm sau :

Định nghĩa 1: Cho mạng *G* và luồng *Φ* trên mạng *G*.

(1) Cung $u \in U$ gọi là một *cung bão hòa (cung đầy)* nếu $\Phi(u) = c(u)$.
(2) Luồng *Φ* gọi là *luồng đầy* nếu mọi đường đi từ đỉnh phát x_0 đến đỉnh thu z đều chứa ít nhất một cung bão hòa.
(3) Đường đi đơn $\alpha(x_0, z)$ từ đỉnh phát x_0 đến đỉnh thu z gọi là *đường tăng luồng* nếu trên α không có cung bão hòa.

Nhận xét 1:

(1) Nếu *Φ* chưa đầy thì trên *G* có ít nhất một đường tăng luồng *α*. Khi đó, ta có thể tăng luồng *Φ* thành Φ_1 với $Val(\Phi_1) = Val(\Phi) + \rho$ như sau:
    (1a) : Xác định lượng vật chất tăng $\rho = \min_{u\in\alpha}\{c(u) - \Phi(u)\}$.
    (1b) : Tăng luồng: Giá trị luồng Φ_1 trên các cung được xác định như sau:

$$\Phi_1(u) = \begin{cases} \Phi(u) & \text{nếu } u \notin \alpha \\ \Phi(u) + \delta & \text{nếu } u \in \alpha \end{cases}.$$

(2) Luồng *Φ* trong *G* là luồng cực đại thì *Φ* là luồng đầy. Ngược lại không đúng, tức là một luồng đầy chưa chắc đã là luồng cực đại.

<u>*Ví dụ 2:*</u> *Xét luồng Φ trên mạng G trong* ***Hình 5.7a:***

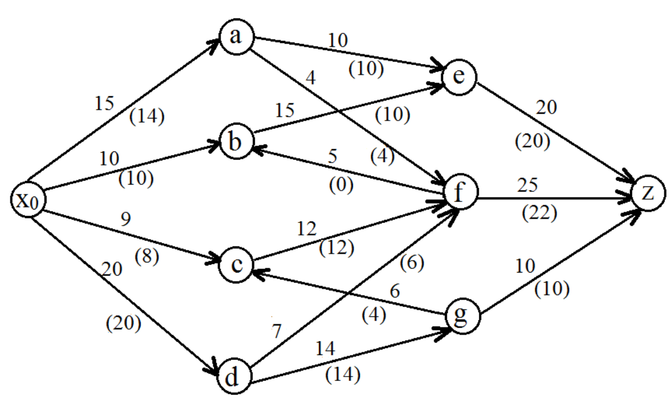
Đường đi <x_0, a, f, z> chính là một đường tăng luồng. Lượng vật chất tăng trên đường tăng luồng này là $\rho_1 = \min_{u\in\alpha}\{15-10; 4-0; 25-12)\} = 4$ *. Có :* $Val(\Phi_1) = Val(\Phi) + \rho = 42 + 4 = 46$.

Tăng luồng Φ thành Φ_1 *. Trên luồng* Φ_1*, đường đi <x_0, d, f, z> cũng là một đường tăng luồng. Lượng vật chất tăng trên đường tăng luồng này là* $\rho_2 = \min_{u\in\alpha}\{20-14; 7-0; 25-12-4)\}=6$.

Tăng luồng Φ_1 *thành luồng* Φ_2.

Lúc này luồng Φ_2 *trên mạng G là luồng đầy* ***(Hình 5.9)****.*

Có: $Val(\Phi_2) = Val(\Phi_1) + \rho_2 = 46 + 6 = 52$.



Hình 5.9. Luồng đầy Φ_2 trên mạng G.

Định nghĩa 2: Cho mạng *G* và luồng *Φ* trên mạng *G*.

(1) Một đường đi đơn $\alpha(x_0, z)$ từ x_0 đến z trong *đồ thị vô hướng tương ứng* với đồ thị có hướng *G* được gọi là *một xích* trong *G*.

(2) Trên xích $\alpha(x_0, z)$ ta gọi cung cùng chiều với đường đi từ x_0 đến *z* là *cung thuận*, cung ngược chiều là *cung nghịch*.

(3) Xích $\alpha(x_0, z)$ gọi là *xích tăng luồng (XTL)* nếu luồng trên cung thuận chưa đầy, luồng trên cung nghịch dương.

Tức là: $\alpha(x_0, z)$ *là xích tăng luồng* ⇔ $\forall u \in \alpha$ thì $\begin{cases} \Phi(u) < c(u) \text{ nếu } u \text{ là cung thuận} \\ \Phi(u) > 0 \text{ nếu } u \text{ là cung nghịch} \end{cases}$.

*<u>Ví dụ 3:</u> Xét luồng đầy Φ_2 trên mạng G (**Hình 5.9**) thì xích <x_0, c, g, d, f, z> là một xích tăng luồng.*

Nhận xét 2:

(1) Đường tăng luồng cũng là một xích tăng luồng, gồm toàn các cung thuận.

(2) Trên mỗi xích $\alpha(x_0, z)$, ta đánh nhãn cho các đỉnh của nó như sau:

(2a) : Đỉnh xuất phát x_0 có nhãn là *0*.

(2b) : Giả sử x_k là đỉnh đã có nhãn và *y* là đỉnh chưa có nhãn kề với x_k trên xích $\alpha(x_0, z)$.

Khi đó đỉnh *y* có nhãn là:

$$\begin{cases} y^{+} \text{ nếu } (x_k, y) \text{ là cung thuận chưa đầy, tức là } \Phi(x_k, y) < c(x_k, y) \\ y^{-} \text{ nếu } (y, x_k) \text{ là cung nghịch và luồng trên cung này dương, tức là } \Phi(y, x_k) > 0. \end{cases}$$

(3) Xích $\alpha(x_0, z)$ là một xích tăng luồng khi và chỉ khi *mọi đỉnh trên xích này đều có nhãn* (hay *đánh nhãn được cho đỉnh* z).

(4) Trên luồng cực đại tìm được của *G*. Gọi A_0 *là tập tất cả các đỉnh có thể đánh nhãn*, $A'_0 = X|A_0$. Khi đó lát cắt (A_0, A'_0) *là một lát cắt hẹp nhất* của *G*.

Thuật toán Ford – Fulkerson tìm luồng cực đại gồm các bước mô tả như sau :

(1) : Đánh nhãn cho các đỉnh để tìm xích tăng luồng *α*, xác định lượng vật chất tăng: $\rho = \min_{u\in\alpha}\{m(u)\}$, với *m(u)* xác định như sau:

$$m(u) = \begin{cases} c(u) - \Phi(u) & \text{nếu } u \text{ là cung thuận} \\ \Phi(u) & \text{nếu } u \text{ là cung nghịch} \end{cases}.$$

(2) : Tăng luồng *Φ* thành Φ_1 với $Val(\Phi_1) = Val(\Phi) + \rho$ như sau:

$$\Phi_1(u) = \begin{cases} \Phi(u) & \text{nếu cung } u \notin \alpha \\ \Phi(u) + \rho & \text{nếu } u \in \alpha \text{ và } u \text{ là cung thuận} \\ \Phi(u) - \rho & \text{nếu } u \in \alpha \text{ và } u \text{ là cung nghịch} \end{cases}.$$

Lặp lại (1) + (2) . Thuật toán dừng khi không tìm thấy xích tăng luồng (Hay không đánh nhãn được cho đỉnh thu *z*).

<u>Ví dụ 4:</u>

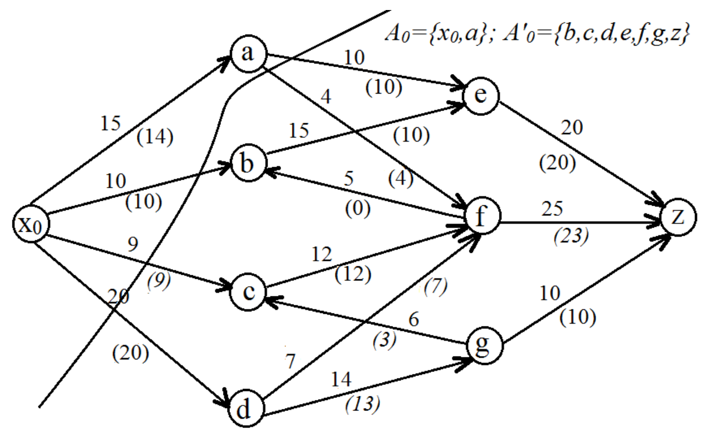
*Áp dụng thuật toán Ford-Fulkerson, có thể tăng luồng Φ_2 (**Hình 5.9**), với xích tăng luồng <x_0, c, g, d, f, z> , thêm một lượng ρ_3= min{9-8;4;14;7-6;25-22} = 1.*

*Không tìm thấy xích tăng luồng, ta có luồng cực đại Φ_3 (**Hình 5.10**).*

Có: Val(Φ_3) = Val(Φ_3)+ρ_3 = 52+1= 53.

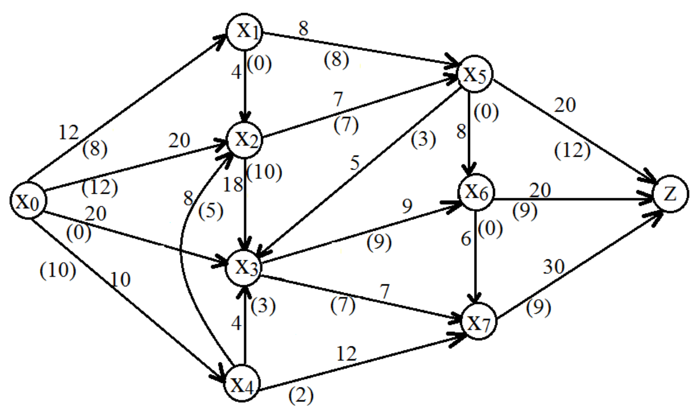
*Theo **Nhận xét** (4), ta suy ra phân hoạch (A_0={x_0,a} và A'_0={b,c,d,e,f,g,z} là một lát cắt hẹp nhất trên mạng G này.*

Có: c(A_0,A'_0) = 53 = Val(Φ_3).



Hình 5.10. Luồng cực đại Φ_3 và lát cắt hẹp nhất.

<u>Ví dụ 5:</u> Cho luồng đầy Φ trên mạng G như sau:

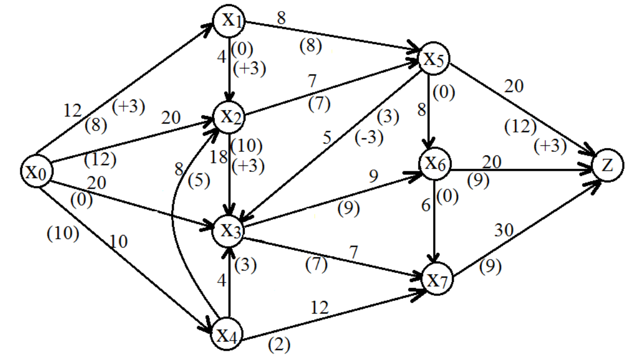
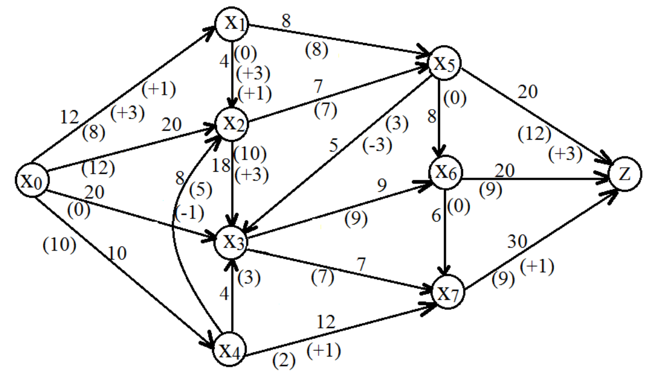
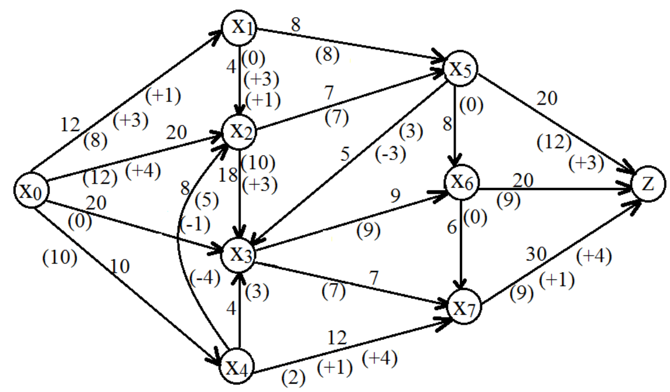
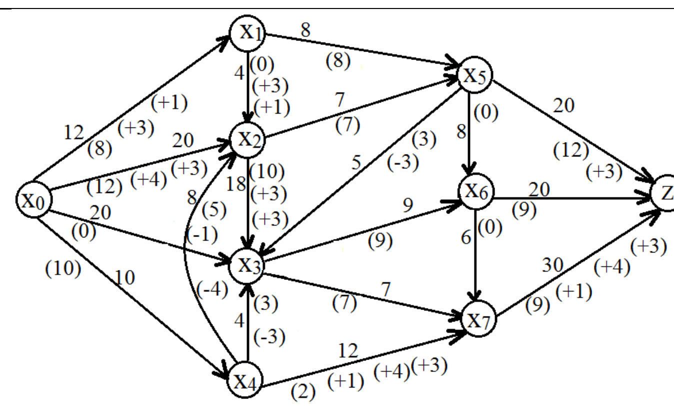


Hình 5.11. Luồng đầy Φ trên mạng G.

Hãy áp dụng Thuật toán Ford-Fulkerson tìm luồng cực đại Φ^* từ luồng Φ trên mạng này.

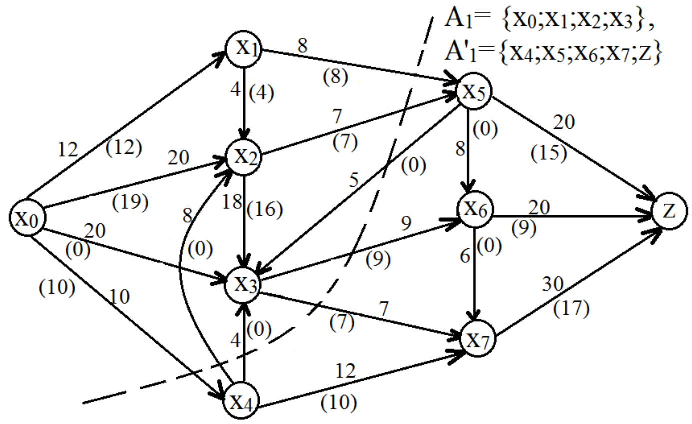
Từ đó xác định một lát cắt hẹp nhất của mạng G.

Giải. Val(Φ) = 8 + 12 + 10 = 30.

Lặp 1: XTL $\alpha_1 = < x_0^0, x_1^+, x_2^+, x_3^+, x_5^-, z^+ >$, $\rho_1 = \min\{12\text{-}8;\ 4\text{-}0;\ 18\text{-}10;\ 3;\ 20\text{-}12\} = 3$. $Val(\Phi_1) = Val(\Phi) + \rho_1 = 33$.	
Lặp 2: XTL $\alpha_2 = < x_0^0, x_1^+, x_2^+, x_4^-, x_7^+, z^+ >$, $\rho_2 = \min\{12\text{-}11;\ 4\text{-}3;\ 5,\ 12\text{-}2,\ 30\text{-}9\} = 1$. $Val(\Phi_2) = Val(\Phi_1) + \rho_2 = 34$.	
Lặp 3: XTL $\alpha_3 = < x_0^0; x_2^+; x_4^-; x_7^+; z^+ >$, $\rho_3 = \min\{20\text{-}12;\ 4; 12\text{-}3;\ 30\text{-}10\} = 4$. $Val(\Phi_3) = Val(\Phi_2) + \rho_3 = 38$.	
Lặp 4: XTL $\alpha_4 = < x_0^0; x_2^+; x_3^+; x_4^-; x_7^+; z^+ >$, $\rho_4 = \min\{20\text{-}16;\ 18\text{-}13;\ 3;\ 12\text{-}7;\ 30\text{-}13\} = 3$. $Val(\Phi_4) = Val(\Phi_3) + \rho_4 = 41$. *Lặp 5: Không tìm thấy xích tăng luồng. Vậy* $Val(\Phi)_{max} = 41$.	 **Hình 5.12. Luồng cực đại *Φ*$_4$ trên mạng *G*.**

*Trên luồng cực đại Φ_4 (**Hình 5.12**), đánh nhãn cho các đỉnh, ta có tập các đỉnh có thể đánh nhãn là:* $A_0 = \{x_0^0; x_2^+; x_3^+; x_1^-\}$ => $A'_0 = X|A_0 = \{x_4, x_5, x_6, x_7, z\}$).

Vậy (A_0, A'_0) là một lát cắt hẹp nhất của G. Khả năng thông qua của lát cắt này là: $c(A_0, A'_0) = c(x_0,x_4) + c(x_1,x_5) + c(x_2,x_5) + c(x_3,x_6) + c(x_3,x_7) = 10+8+7+9+7 = 41$.



Hình 5.12. Một lát cắt hẹp nhất trên mạng *G*.

5.3. BÀI TOÁN DU LỊCH.

Bài toán: Có *n* thành phố được đánh số từ *1* đến *n*. Chi phí đi từ thành phố *i* đến thành phố *j* là c_{ij} và từ thành phố *j* đến thành phố *i* là c_{ij} (c_{ij} và c_{ji} có thể khác nhau). Một người đi từ một thành phố *A* nào đó đến thăm *n – 1* thành phố còn lại, mỗi thành phố đúng một lần, rồi trở về thành phố xuất phát *A*. Hãy tìm một hành trình du lịch (một cách đi thỏa mãn các điều kiện đặt ra) để tổng chi phí là ít nhất.

Nhận xét 1:

(1) Mô hình hóa bài toán trên bằng đồ thị đầy đủ có hướng *G*, hai chiều, *n* đỉnh, có trọng số: mỗi thành phố tương ứng với một đỉnh, mỗi cung nối đỉnh *i* với đỉnh *j* được gán một trọng số là c_{ij} bằng chi phí đi từ thành phố *i* đến thành phố *j*.

Bài toán tìm *hành trình du lịch với tổng chi phí ít nhất* trở thành tìm *chu trình Hamilton ngắn nhất* trong *G?*

(2) Gọi *Δ* là tập *tất cả các chu trình Hamilton* trong *G* (cũng là *tập tất cả các hành trình* du lịch của bài toán).

Mọi $h \in \Delta$, đặt $f(h) = \sum_{(i,j)\in h} c_{ij}$, *f(h)* là *độ dài của chu trình Hamilton h (cũng là tổng chi phí của hành trình du lịch h).*

Ta cần tìm $h_0 \in \Delta$ sao cho $f(h_0) = \min_{h\in\Delta}\{f(h)\}$.

Ta gọi *f(h)* là *hàm mục tiêu*, và h_0 là một phương án tối ưu (PATƯ) của bài toán du lịch.

(3) Đặt $M = (c_{ij})$ là *ma trận chi phí* của bài toán du lịch. Do *h* là chu trình Hamilton nên $f(h)$ = tổng của đúng *n* phần tử trong đó không có hai phần tử nào thuộc cùng một hàng hoặc một cột của *M*, và cũng không đối xứng nhau qua đường chéo chính của *M*. Hơn nữa, nếu trong tổng *f(h)* có hai phần tử c_{kj} và c_{js} thì sẽ không có phần tử c_{ks}.

<u>Ví dụ 1:</u> Cho ma trận chi phí M :

$$M = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} . & 5 & 7 & 9 & 12 & 15 \\ 8 & . & 8 & 10 & 13 & 17 \\ 15 & 12 & . & 9 & 7 & 3 \\ 8 & 18 & 25 & . & 12 & 9 \\ 10 & 12 & 14 & 16 & . & 18 \\ 20 & 16 & 14 & 12 & 10 & . \end{bmatrix} \end{array}.$$

Xét chu trình Hamilton trên đồ thị G là : h = <1,3,2,5,6,4,1> . Độ dài của của chu trình này là f(h) $= c_{13} + c_{32} + c_{25} + c_{56} + c_{64} + c_{41} = 7+12+13+18+12+8 = 70.$

*Ngược lại, trên ma trận chi phí M, chọn đủ n phần tử sao cho thỏa mãn **Nhận xét 1** ý (3) ở trên: tức là sau khi chọn phần tử c_{ij} thì xóa hàng i và cột j, và xóa phần tử c_{ji}; đồng thời nếu đã chọn c_{ik} và c_{ks} thì xóa c_{is}. Chẳng hạn trên M, chọn được n phần tử $\{c_{12}; c_{23}; c_{36}; c_{41}; c_{54}; c_{65}\}$, thì ta có chu trình Hamilton h_1 = <1,2,3,6,5,4,1> .*

Độ dài của chu trình h_1 là : $f(h_1) = 5+8+3+1+16+10 = 43$.

Định nghĩa: Gọi *M* là ma trận chi phí của bài toán du lịch.

(1) *Phép rút gọn một hàng (cột) của M* là phép trừ tất cả các phần tử của hàng (cột) cho phần tử nhỏ nhất (gọi là *phần tử rút gọn*) trong hàng (cột) đó để mỗi hàng (cột) đó có ít nhất một phần tử bằng 0.

(2) Ma trận *M'* thu được từ *M* sau khi rút gọn trên tất cả các hàng (cột) của *M*, gọi là *ma trận rút gọn của M.*

(3) *Hằng số rút gọn của M*, kí hiệu S_M, được xác định là: S_M = tổng tất cả các phần tử rút gọn trên các hàng và các cột của *M*.

<u>Ví dụ 2:</u> Tìm hằng số rút gọn của ma trận chi phí M trong Ví dụ 1.

Giải. Tìm phần tử rút gọn trên từng cột ta có :

$$M = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \infty & 5 & 7 & 9 & 12 & 15 \\ 8 & \infty & 8 & 10 & 13 & 17 \\ 15 & 12 & \infty & 9 & 7 & 3 \\ 8 & 18 & 25 & \infty & 12 & 9 \\ 10 & 12 & 14 & 16 & \infty & 18 \\ 20 & 16 & 14 & 12 & 10 & \infty \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccccc} 8 & 5 & 7 & 9 & 7 & 3 \end{array} \end{array} \xRightarrow{\textit{Rút gọn trên từng cột}} \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \infty & 0 & 0 & 0 & 5 & 12 \\ 0 & \infty & 1 & 1 & 6 & 14 \\ 7 & 7 & \infty & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 18 & \infty & 5 & 6 \\ 2 & 7 & 7 & 7 & \infty & 15 \\ 12 & 11 & 7 & 3 & 3 & \infty \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

$$\xRightarrow{\textit{Rút gọn trên từng hàng}} M' = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \infty & 0 & 0 & 0 & 5 & 12 \\ 0 & \infty & 1 & 1 & 6 & 14 \\ 7 & 7 & \infty & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 18 & \infty & 5 & 6 \\ 0 & 5 & 5 & 5 & \infty & 13 \\ 9 & 8 & 4 & 0 & 0 & \infty \end{bmatrix} \end{array}.$$

Vậy hằng số rút gọn S_M = (8+5+7+9+7+3) + (2+3) = 44.

Nhận xét 2:

(1) Do mỗi hàng và mỗi cột của *M* chỉ có một phần tử nằm trong một hành trình du lịch *h* nên nếu rút gọn ma trận *M* thì hàm mục tiêu của mọi hành trình đều giảm đi một lượng đúng bằng hằng số rút gọn S_M của *M*. Hay $\forall h \in \Delta$ thì $f(h) \geq S_M$, (S_M còn gọi là *cận dưới* của mọi chu trình Hamilton *h* trên *M*).

(2) Theo ***Nhận xét 1*** ý (3) ở trên:

- Nếu cung *(i, j)* được chọn đưa vào PATƯ h_0 thì các cung tiếp theo của h_0 , được chọn trên ma trận chi phí M_{ij} có cấp giảm đi 1 so với *M* ban đầu. Cụ thể M_{ij} là ma trận thu được từ *M* sau khi xóa đi hàng *i*, xóa cột *j* và đặt $c_{ji} = \infty$.

Trong trường hợp chọn cung *(i, j)* thì : $f(h) \geq S_M + S_{M_{ij}}, \forall h \in \Delta$.

- Nếu PATƯ h_0 không chứa cung *(i, j)* thì các cung tiếp theo của h_0 , được chọn trên ma trận chi phí $M_{\bar{\imath}\bar{\jmath}}$ có cùng cấp với *M*. Cụ thể M_{ij} là ma trận thu được từ *M* sau khi đặt $c_{ij} = \infty$.

Trong trường hợp không chọn cung *(i, j)* thì : $f(h) \geq S_M + S_{M_{\bar{\imath}\bar{\jmath}}}, \forall h \in \Delta$.

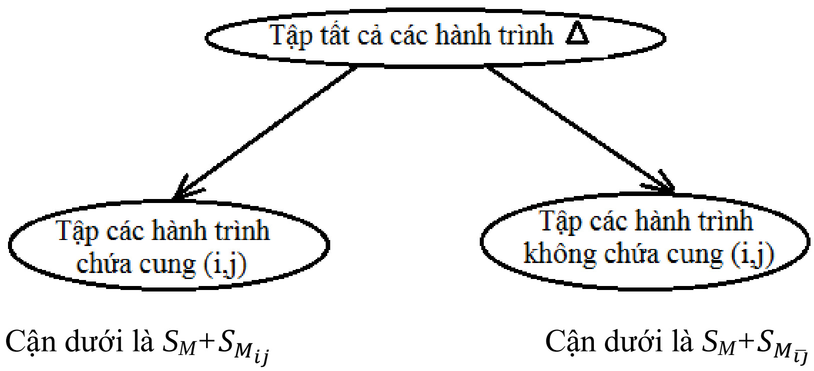
(3) PATƯ h_0 không chứa chu trình con nên sau khi chọn hai cung *(k,j)* và *(j,s)* thì trên ma trận chi phí đang xét đặt $c_{ks} = 0$, tức là không được chọn cung *(k,s)*.

Thuật toán nhánh cận giải bài toán du lịch:

Thuật toán nhánh cận là một trong những phương pháp giải chủ yếu của tối ưu tổ hợp. Ý tưởng cơ bản của thuật toán nhánh cận áp dụng cho bài toán du lịch là tìm kiếm lời giải của bài toán (PATƯ h_0) bằng cách phân tập các hành trình Δ (còn gọi là *phân nhánh*) thành hai tập con Δ_{ij} và $\Delta_{\overline{ij}}$, trong đó Δ_{ij} là tập tất cả các hành trình có chứa cung *(i,j)* và $\Delta_{\overline{ij}}$ là tập tất cả các hành trình không chứa cung *(i,j)*.

Ma trận chi phí cho các hành trình thuộc Δ_{ij} là M_{ij} và hành trình thuộc $\Delta_{\overline{ij}}$ là $M_{\overline{ij}}$. Sau khi phân nhánh ta tìm cận dưới của hàm mục tiêu cho các tập hợp như ***Nhận xét 2*** ý (2).

Việc phân nhánh được minh họa bằng cây tìm kiếm:



Hình 5.13. Cây phân nhánh của bài toán du lịch.

Thuật toán nhánh cận giải bài toán du lịch gồm hai bước mô tả cụ thể như sau:

a. : Đặt $c_{ii} = \infty$. Rút gọn ma trận chi phí $M = (c_{ij})$ thành $M' = (c'_{ij})$. Tính cận dưới S_M. Có: $f(h) \geq S_M$.

b. : (Lặp). Trong *M'*, với mỗi $c'_{ij} = 0$. Đặt $\delta_{ij} = min\{hàng\ i\} + min\{cột\ j\}$ (không kể $c'_{ij} = 0$).

✓ Chọn cung *(i, j)* có $(\delta_{ij})_{max}$ để phân nhánh. Tính S_{Mij} và $S_{M_{\overline{ij}}}$ như sau:

- Tính $S_{M_{ij}}$: Trên ma trận rút gọn *M'*, xóa hàng *i*, xóa cột *j* và đặt $c'_{ji} = \infty$, $c'_{ks} = \infty$ (nếu việc chọn *(k,s)* sẽ tạo thành chu trình con) ta được ma trận M_{ij}. Rút gọn M_{ij} ta có $S_{M_{ij}}$.
- Tính $S_{M_{\overline{ij}}}$: Trên *M'*, đặt $c'_{ij} = \infty$ ta được $M_{\overline{ij}}$. Rút gọn $M_{\overline{ij}}$. Ta luôn có: $S_{M_{\overline{ij}}} = (\delta_{ij})_{max}$.

✓ Nếu $S_{M_{ij}} \leq S_{M_{\overline{ij}}}$ thì cung (*i, j*) được chọn thuộc PATƯ h_0.

Ngược lại, $S_{M_{ij}} > S_{M_{\overline{ij}}}$ thì *PATƯ* h_0 không chứa cung (*i,j*).

Sau bước phân nhánh này, $f(h) \geq S_M + min\{S_{M_{ij}}, S_{M_{\overline{ij}}}\}$.

Lặp lại (2) với ma trận chi phí là ma trận rút gọn của $\begin{cases} M_{ij} \text{ nếu PATƯ chọn cung } (i,j) \\ M_{\overline{ij}} \text{ nếu PATƯ không chọn cung } (i,j) \end{cases}$.

Thuật toán dừng khi ma trận chi phí là M_2 có cấp bằng *2*. Lúc đó chi phí nhỏ nhất là:

$$f(h_0) = S_M + \min\{S_{M_{ij}}, S_{M_{\overline{ij}}}\} + \ldots + S_{M_2}.$$

Ví dụ 3: *Giải bài toán du lịch với ma trận chi phí M cho trong Ví dụ 1.*
Giải:

✓ *Lặp 1: Có :* $M' = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{bmatrix} \infty & 0^{(5)} & 0^{(1)} & 0^{(0)} & 5 & 12 \\ 0^{(1)} & \infty & 1 & 1 & 6 & 14 \\ 7 & 7 & \infty & 0^{(0)} & 0^{(0)} & 0^{(6)} \\ 0^{(5)} & 13 & 18 & \infty & 5 & 6 \\ 0^{(5)} & 5 & 5 & 5 & \infty & 13 \\ 9 & 8 & 4 & 0^{(0)} & 0^{(0)} & \infty \end{bmatrix} \end{array}$

Trên M', max{δ_{ij}} = max{5;1;0;1;0;0;6;5;5;0;0} = 6 = δ_{36}. Phân nhánh theo cung (3,6).

- *Tính* $S_{M_{\overline{36}}}$. *Đặt c'$_{36}$ = ∞. Có* $M_{\overline{36}} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{bmatrix} \infty & 0^{(5)} & 0^{(1)} & 0^{(0)} & 5 & 12 \\ 0^{(1)} & \infty & 1 & 1 & 6 & 14 \\ 7 & 7 & \infty & 0^{(0)} & 0^{(0)} & \infty \\ 0^{(5)} & 13 & 18 & \infty & 5 & 6 \\ 0^{(5)} & 5 & 5 & 5 & \infty & 13 \\ 9 & 8 & 4 & 0^{(0)} & 0^{(0)} & \infty \end{bmatrix} \end{array}$

  Suy ra: $S_{M_{\overline{36}}} = \delta_{36} = 6$.
- *Tính* $S_{M_{36}}$ *. Xóa hàng 3, xóa cột 6 và đặt c'$_{63}$ = ∞. Ta có:*

$M_{36} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{bmatrix} \infty & 0^{(5)} & 0^{(1)} & 0^{(0)} & 5 \\ 0^{(1)} & \infty & 1 & 1 & 6 \\ 0^{(5)} & 13 & 18 & \infty & 5 \\ 0^{(5)} & 5 & 5 & 5 & \infty \\ 9 & 8 & \infty & 0^{(0)} & 0^{(5)} \end{bmatrix} \end{array} = M'_{36} \quad \Rightarrow S_{M_{36}} = 0 < S_{M_{\overline{36}}}$.

Vậy PATƯ chứa cung (3,6) và cận dưới của các hành trình chứa cung (3,6) là: $f(h) \geq 44 + S_{M_{36}} = 44$.

✓ *Lặp 2: Trên M'$_{36}$, max{δ_{ij}} = 5 = δ_{51}. Phân nhánh theo cung (5,1). Tương tự có* $S_{M_{\overline{51}}} = \delta_{51} = 5$, $S_{M_{51}} = 6$. *Vậy* $S_{M_{51}} > S_{M_{\overline{51}}}$.

Cung (5,1) không có trong PATƯ.

Cận dưới của các hành trình chứa cung (3,6) và không chứa cung (5,1) là: $f(h) \geq 44 + S_{M_{\overline{51}}} = 49$.

- ✓ *Lặp 3: Đặt* $c'_{51} = \infty$ => $M_{\overline{51}} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \infty & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & \infty & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 13 & 18 & \infty & 5 \\ \infty & 5 & 5 & 5 & \infty \\ 9 & 8 & \infty & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad 5$

$$=> M'_{\overline{51}} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \infty & 0^{(0)} & 0^{(0)} & 0^{(0)} & 5 \\ 0^{(1)} & \infty & 1 & 1 & 6 \\ 0^{(5)} & 13 & 18 & \infty & 5 \\ \infty & 0^{(0)} & 0^{(0)} & 0^{(0)} & \infty \\ 9 & 8 & \infty & 0^{(0)} & 0^{(5)} \end{bmatrix} \end{array}$$

Trên $M'_{\overline{51}}$, $\max\{\delta_{ij}\} = 5 = \delta_{41}$. *Phân nhánh theo cung (4,1).*

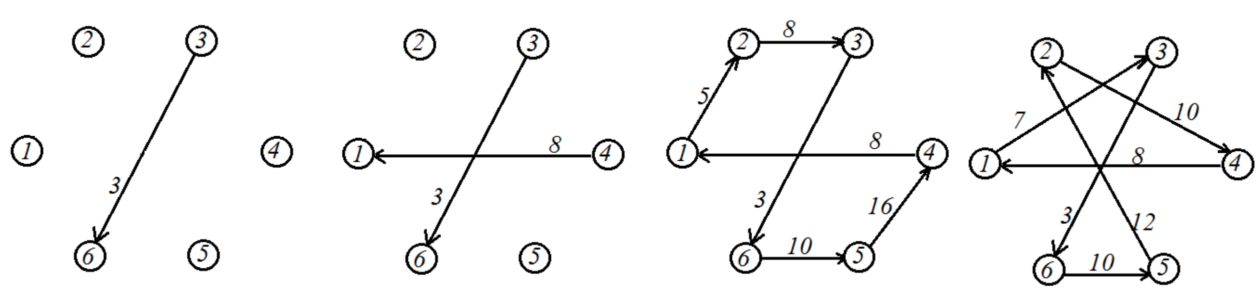
- *Tính* $S_{M_{\overline{41}}}$: $S_{M_{\overline{41}}} = \delta_{41} = 5$.
- *Tính* $S_{M_{41}}$: *Xóa hàng 4, cột 1 và đặt* $c_{14} = \infty$. *Ta có:*

$$M_{41} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \infty & 5 \\ \infty & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \infty \\ 8 & \infty & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ 1 \\ \\ \\ \end{array} => M'_{41} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \infty & 5 \\ \infty & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \infty \\ 8 & \infty & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} => S_{M_{41}} = 1 < S_{M_{\overline{41}}}$$

Vậy PATƯ chứa cung (3,6) và (4,1).

Cận dưới của các hành trình chứa cung (3,6) và (4,1) là : $f(h) \geq 49 + S_{M_{41}} = 50$.

- ✓ *Lặp 4: Trên* M'_{41}. *Tính toán tương tự, suy ra PATƯ chứa các cung là {(1,2); (2,3); (5,4); (6,5)} hoặc {(1,3); (2,4); (5,2); (6,5)}. Và f(h) ≥ 50 + 0 = 50.*

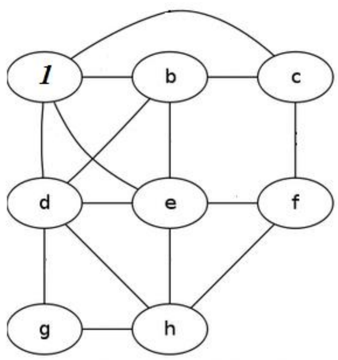


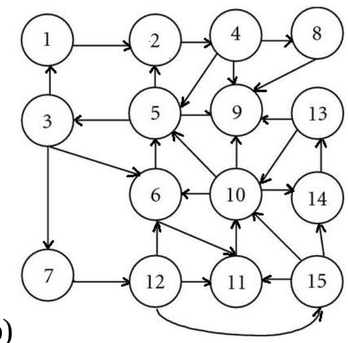
Hình 5.14. Sơ đồ tìm PATƯ của bài toán du lịch.

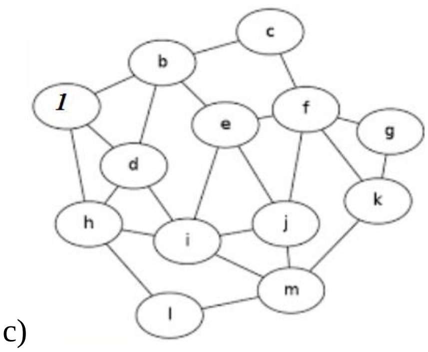
ĐÁP SỐ: Có hai hành trình ngắn nhất độ dài 50 là: <1,2,3,6,5,4,1> và <1,3,6,5,2,4,1>.

BÀI TẬP CHƯƠNG 5

5.1. Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh *1* đến các đỉnh còn lại của các đồ thị sau.

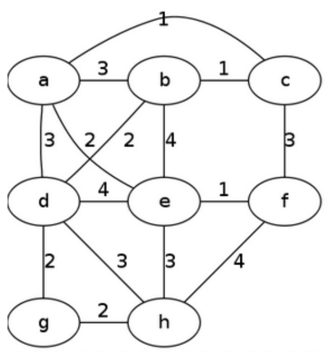
a) 

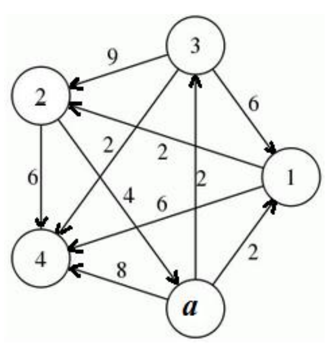
b) 

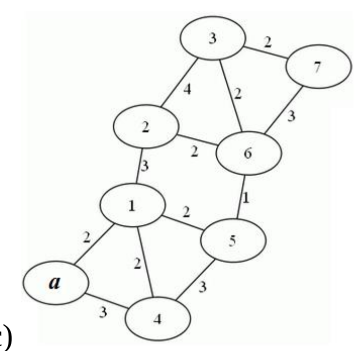
c) 

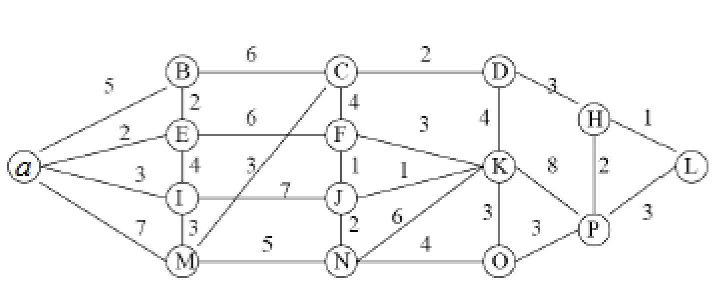
5.2. Tìm đường đi ngắn nhất từ New York đến tất cả các thành phố khác trên **Hình 4.13**.

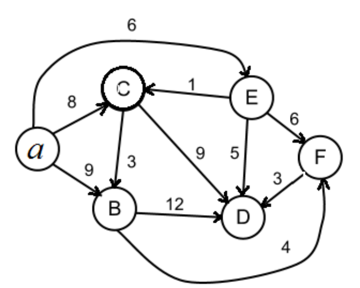
5.3. Áp dụng thuật toán Dijkstra tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh *a* đến các đỉnh còn lại của đồ thị .

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

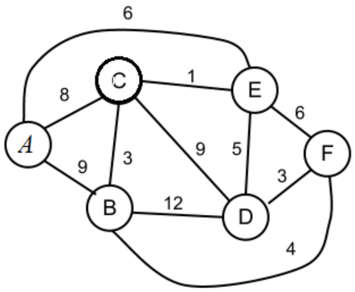
5.4. Trong đồ thị (d) **Bài 5.3**, hãy tìm đường đi ngắn nhất :

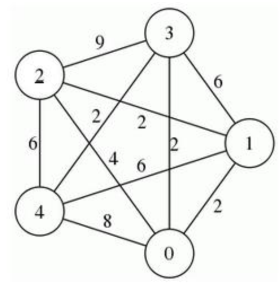
(i) Từ đỉnh a đến đỉnh *L*.

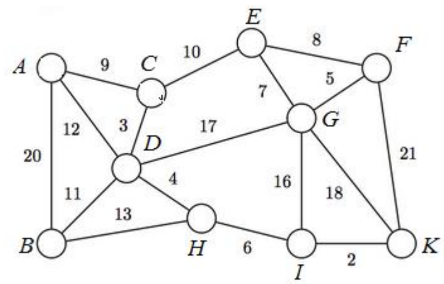
(ii) Từ đỉnh a đến đỉnh *L* có đi qua đỉnh *K*.

(iii) Từ đỉnh a đến đỉnh *L* có đi qua cạnh *FJ*.

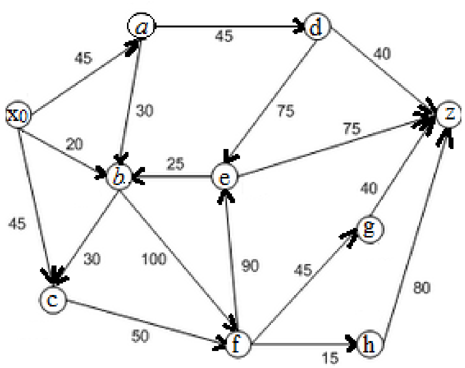
5.5. Tìm tâm của các đồ thị sau:

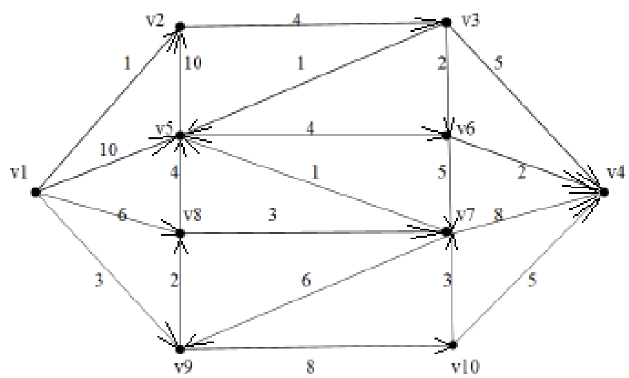
a) 

b) 

c) 

5.6. Tìm luồng cực đại và lát cắt hẹp nhất của các mạng dưới đây:

a) 

b) 

5.7. Lấy ví dụ về một mạng mô hình một bài toán thực tế và một luồng cực đại trên mạng đó.

5.8. Lấy ví dụ về một mạng và một lát cắt hẹp nhất trên mạng đó.

5.9. Giải bài toán du lịch với các ma trận chi phí:

a) $A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} \circ & 18 & 12 & 10 & 13 \\ 15 & \circ & 14 & 11 & 12 \\ 17 & 11 & \circ & 19 & 20 \\ 16 & 9 & 17 & \circ & 15 \\ 12 & 13 & 16 & 17 & \circ \end{bmatrix} \end{array}$

b) $B = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{bmatrix} \circ & 13 & 11 & 4 & 8 & 9 \\ 10 & \circ & 6 & 2 & 12 & 8 \\ 9 & 8 & \circ & 10 & 13 & 11 \\ 8 & 5 & 14 & \circ & 4 & 7 \\ 7 & 12 & 9 & 11 & \circ & 10 \\ 5 & 9 & 11 & 6 & 12 & \circ \end{bmatrix} \end{array}$

Chương 6.

ĐẠI CƯƠNG VỀ TOÁN LOGIC

Mục tiêu: Người học tóm tắt được các phép toán trên mệnh đề sơ cấp; nhận diện được công thức đồng nhất đúng, công thức đồng nhất sai. Người học biết vận dụng các quy tắc suy diễn để xác định một suy luận là ĐÚNG hay SAI, cũng như để chứng minh một mệnh đề hằng đúng.

Người học xác định được giá trị chân lý của một công thức có chứa lượng từ "với mọi" và "tồn tại" ; nắm được ý nghĩa của lượng từ đối với vị từ hai ngôi. Người học xác định được phủ định của các mệnh đề lượng từ hóa; biết dịch các câu thông thường thành các biểu thức logic để có thể sử dụng các biểu thức này trong việc lập trình logic và trí tuệ nhân tạo.

6.1. LOGIC MỆNH ĐỀ

Các *quy tắc của logic* cho ý nghĩa chính xác của các *mệnh đề*. Hơn nữa các quy tắc của logic còn được dùng để thiết kế các mạng trong máy tính, để xây dựng các chương trình của máy tính, để kiểm tra tính đúng đắn của các chương trình và nhiều ứng dụng khác.

Trước hết, chúng ta tìm hiểu một khái niệm cơ sở của logic học đó là *Mệnh đề.*

6.1.1. Khái niệm mệnh đề

Xét các phát biểu sau đây:

1. 7 + 3 = 10.	Là một phát biểu đúng.
2. 9 là một số nguyên tố.	Là một phát biểu sai.
3. 10 là số nguyên chẵn.	Là một phát biểu đúng.
4. Mặt trời quay quanh trái đất.	Là một phát biểu sai.
5. Hôm nay trời mưa to thế !	Có thể đúng ở chỗ này nhưng sai ở chỗ khác.
6. Các bạn học bài đi!	Không đúng, không sai (vì đây là câu cầu khiến).
7. Thủ đô của nước Ý là gì?	Không đúng, không sai (vì đây là câu hỏi).
8. Luân đôn là thủ đô của nước Pháp.	Là một phát biểu sai.
9. $x^2 + 3x - 4 > 0$.	Đúng với *x = 2* nhưng lại sai với *x = 0.*
10. Ôi, em bé xinh quá!	Không đúng, không sai (vì đây là câu cảm thán).

Ta thấy trong các phát biểu trên, có *phát biểu là đúng*, có *phát biểu là sai* ; có *phát biểu thì lúc đúng lúc sai* tùy thuộc vào hoàn cảnh cụ thể (không gian, thời gian…); có *phát biểu không đúng cũng không sai* vì không là câu trần thuật (không là câu khẳng định).

Một phát biểu khẳng định đúng hoặc sai (không thể vừa đúng vừa sai) gọi là một *mệnh đề sơ cấp* (hay gọi tắt là *mệnh đề*). Kí hiệu các mệnh đề sơ cấp là : *p, q, r, s …*

Trong các phát biểu trên, phát biểu (1), (2), (3), (4), (8) là các mệnh đề.

Một mệnh đề đúng thì ta nói nó có giá trị chân lý là *T* (hay *1*). Một mệnh đề sai thì ta nói nó có giá trị chân lý là *F* (hay *0*). Ta gọi {*T, F*} hay {*1, 0*} là các *giá trị chân lý* (hay *chân trị*) của mệnh đề.

Có nhiều mệnh đề được xây dựng từ các mệnh đề khác bằng cách sử dụng trạng từ *'không'*, hoặc các liên từ : '*và', 'hay', 'nếu …thì …'* . Các mệnh đề này gọi là các *mệnh đề phức.*

Các mệnh đề phức là kết quả của *một hay nhiều phép toán* trên các mệnh đề sơ cấp.

6.1.2. Các phép toán trên mệnh đề.

Phép phủ định: Cho mệnh đề *p*.

Phát biểu "không phải là *p*" cũng là một mệnh đề, kí hiệu $\bar{p}$, và được gọi là *phủ định của mệnh đề p*.

p	$\bar{p}$
1	*0*
0	*1*

Dễ thấy: $\bar{p}$ là mệnh đề đúng nếu *p* là mệnh đề sai, và ngược lại.

Phép hội: Cho hai mệnh đề *p* và *q*. Phát biểu "*p* và *q"* là một mệnh đề, kí hiệu $p \wedge q$.

Mệnh đề $p \wedge q$ gọi là *hội của hai mệnh đề p và q.* Mệnh đề $p \wedge q$ chỉ đúng khi *p* và *q* cùng đúng, còn sai trong các trường hợp còn lại.

p	q	$p \wedge q$
1	*1*	*1*
1	*0*	*0*
0	*1*	*0*
0	*0*	*0*

Phép tuyển: Cho hai mệnh đề *p* và *q*. Phát biểu "*p* hoặc *q"* là một mệnh đề, kí hiệu $p \vee q$.

Mệnh đề $p \vee q$ được gọi là *tuyển của hai mệnh đề p và q*. Mệnh đề $p \vee q$ chỉ sai khi *p* và *q* cùng sai, còn đúng trong các trường hợp còn lại.

p	q	$p \vee q$
1	*1*	*1*
1	*0*	*1*
0	*1*	*1*
0	*0*	*0*

Để ý rằng liên từ "hoặc" trong phép tuyển *mang sắc thái nghĩa có tính bao hàm*. Còn ta dùng liên từ "hoặc" với *sắc thái nghĩa loại trừ* trong phép tuyển loại dưới đây.

Phép tuyển loại: Cho hai mệnh đề p và q. Phát biểu "chỉ có p hoặc chỉ có q" hay phát biểu "p hoặc q (nhưng không cả hai)" là một mệnh đề, kí hiệu $p \oplus q$.

p	q	$p \oplus q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Mệnh đề $p \oplus q$ gọi là *tuyển loại của hai mệnh đề p và q*. Mệnh đề $p \oplus q$ chỉ đúng khi một trong hai mệnh đề p và q là đúng, còn sai trong các trường hợp còn lại.

Phép kéo theo: Cho hai mệnh đề p và q. *Mệnh đề kéo theo $p \rightarrow q$* là một mệnh đề chỉ sai nếu p đúng và q sai, còn đúng trong các trường hợp còn lại.

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Trong suy luận toán học, có nhiều thuật ngữ khác nhau để phát biểu mệnh đề $p \rightarrow q$. Các cách nói thường gặp là: "Nếu p thì q"; "p kéo theo q"; "p là điều kiện đủ để có q"; "q là điều kiện cần của p".

Trong phép kéo theo $p \rightarrow q$, mệnh đề p được gọi là *giả thiết*, mệnh đề q được gọi là *kết luận*.

Cho mệnh đề $p \rightarrow q$ (1). Mệnh đề $q \rightarrow p$ được gọi là *mệnh đề đảo* của mệnh đề (1). Mệnh đề $\bar{q} \rightarrow \bar{p}$ được gọi là *mệnh đề phản đảo* của (1). Mệnh đề (1) lúc này gọi là *mệnh đề thuận*.

Phép tương đương: Cho hai mệnh đề p và q. *Mệnh đề tương đương $p \leftrightarrow q$* là một mệnh đề chỉ đúng khi p và q cùng đúng hoặc cùng sai, là mệnh đề sai trong các trường hợp còn lại.

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Dễ thấy, mệnh đề tương đương $p \leftrightarrow q$ là đúng khi và chỉ khi hai mệnh đề kéo theo $p \rightarrow q$ và $q \rightarrow p$ đều đúng.

Do vậy, ta cũng có một số cách diễn đạt để chỉ mệnh đề tương đương $p \leftrightarrow q$ là : "p nếu và chỉ nếu q"; "p là điều kiện cần và đủ của q" ; "nếu p thì q và ngược lại".

Ví dụ 1: Hãy biểu diễn các mệnh đề phức sau thành một biểu thức logic của các biến mệnh đề sơ cấp và các phép toán trên mệnh đề. Sau đó xác định giá trị chân lý của các mệnh đề đó?

i.	*5 là một số chính phương và Võ Nguyên Giáp là một vị tướng.*	- $p \wedge q$	- *Mệnh đề sai.*
ii.	*5 không phải là một số chính phương hoặc Võ Nguyên Giáp không phải là một vị tướng.*	- $\bar{p} \wedge \bar{q}$	- *Mệnh đề đúng.*
ii.	*Hà Nội là thủ đô và là thành phố có diện tích lớn nhất của nước Việt Nam.*	- $p \wedge q$	- *Mệnh đề sai.*
v.	*Nếu một tứ giác có hai cặp cạnh đối song song hoặc có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường thì tứ giác đó là hình bình hành.*	- $(p \vee q) \rightarrow r$	- *Mệnh đề đúng.*
v.	*Nếu bây giờ trái đất ngừng quay thì Pari là thủ đô của Việt Nam.*	- $p \rightarrow q$	- *Mệnh đề đúng.*
i.	*Nếu mặt trời mọc ở đằng Đông thì 2 < 3.*	- $p \rightarrow q$	- *Mệnh đề đúng.*
ii.	*Nếu* $\pi > 3$ *thì 3 là số chẵn.*	- $p \rightarrow q$	- *Mệnh đề sai.*
ii.	*Mặt trời mọc ở đằng đông khi và chỉ khi 2 > 3.*	- $p \leftrightarrow q$	- *Mệnh đề sai.*
x.	$\pi < 3$ *nếu và chỉ nếu 3 là số chẵn*	- $p \leftrightarrow q$	- *Mệnh đề đúng.*
x.	*Nếu món khai vị là súp hoặc salat thì bạn được nhận thêm một đồ uống.*	- $(p \oplus q) \rightarrow r$	- *Mệnh đề đúng.*

6.1.3. Công thức đồng nhất đúng. Công thức đồng nhất sai

Định nghĩa:

(1) Trong logic mệnh đề, mỗi mệnh đề sơ cấp *p, q, r, …* gọi là *một công thức*. Nếu *A, B* là hai công thức thì các biểu thức $\bar{A}$; $A \wedge B$; $A \vee B$; $A \rightarrow B$; $A \leftrightarrow B$ cùng các dấu ngoặc đơn () cũng là các công thức.

Hiển nhiên**:** *Mệnh đề hằng đúng*, kí hiệu *1* (mệnh đề có giá trị chân lý đúng); *mệnh đề hằng sai*, kí hiệu *0* (mệnh đề có giá trị chân lý sai) cũng là các công thức.

Lưu ý*: Một công thức chỉ chứa dấu đóng mở ngoặc () và 5 phép toán* $^{-}$; $\wedge$; $\vee$; $\rightarrow$; $\leftrightarrow$ (thứ tự ưu tiên từ cao xuống thấp). Tuy nhiên, để rõ ràng nên sử dụng các dấu ngoặc () để xác định mức độ ưu tiên.

(2) Công thức A gọi là *đồng nhất đúng* (còn gọi là *hằng đúng*, hay *chân lý*), kí hiệu $\vDash A$ hay $A \equiv 1$, nếu *A luôn nhận giá trị đúng* với mọi bộ giá trị đúng sai của các mệnh đề sơ cấp có trong *A*.

(3) Công thức *A* gọi là *đồng nhất sai* (còn gọi là *hằng sai*, hay *mâu thuẫn*), nếu *A luôn nhận giá trị sai* với mọi bộ giá trị đúng sai của các mệnh đề sơ cấp có trong *A*.

(4) Hai công thức *A*, B gọi là *đồng nhất bằng nhau*, kí hiệu $A \equiv B$, nếu *A, B cùng nhận giá trị đúng, sai* với mọi bộ giá trị đúng sai của các mệnh đề sơ cấp có trong hai công thức *A, B*.

Hay nói cách khác, $A \equiv B$ khi và chỉ khi công thức $A \leftrightarrow B \equiv 1$.

Lưu ý: (1) : Nếu $A \equiv B$ thì ta còn nói hai công thức A và B là *tương đương logic*. Kí hiệu: $A \Leftrightarrow B$.

(2) : Nếu $A \to B \equiv 1$ thì ta còn nói B là *hệ quả logic* của A. Kí hiệu: $A \Rightarrow B$.

Bảng 6.1. Một số luật logic (hay các công thức đồng nhất bằng nhau) quan trọng.	
(1) $\bar{\bar{A}} \equiv A$ *(1.1)* $\bar{A} \wedge A \equiv 0;\ \bar{A} \vee A \equiv 1$ *(1.2)* $A \vee A \equiv A;\ A \wedge A \equiv A$ *(1.3)* $A \vee 1 \equiv 1;\ A \wedge 0 \equiv 0$ *(1.4)* $A \vee 0 = A;\ A \wedge 1 = A$ *(1.5)*	- *Luật phủ định của phủ định* - *Luật về phần tử bù* - *Luật lũy đẳng* - *Luật thống trị* - *Luật trung hòa*
(2) $A \vee B \equiv B \vee A;\ \ A \wedge B \equiv B \wedge A$ **(3)** $\overline{A \wedge B} \equiv \bar{A} \vee \bar{B};\ \ \overline{A \vee B} \equiv \bar{A} \wedge \bar{B}$	- *Luật giao hoán* - *Luật De Morgan*
(4) $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C);$ $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$ **(5)** $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \wedge C)$ $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	- *Luật kết hợp* - *Luật phân phối*
(6) $A \to B \equiv \bar{A} \vee B\ \ (\equiv B \vee \bar{A} \equiv \bar{B} \to \bar{A})$	- *Luật về phép kéo theo*

Dễ dàng chứng minh được các luật logic này bằng cách lập bảng giá trị chân lý (xem như bài tập).

<u>Ví dụ 1:</u> Chứng minh luật logic về phép kéo theo: $A \to B \equiv \bar{A} \vee B$ *(*).*

Giải.

Bảng 6.2. Bảng chân trị của luật logic về phép kéo theo.

A	B	$\bar{A}$	$\bar{A} \vee B$	$A \to B$
1	*1*	*0*	*1*	*1*
1	*0*	*0*	*0*	*0*
0	*1*	*1*	*1*	*1*
0	*0*	*1*	*1*	*1*

Vậy $A \to B$ *và* $\bar{A} \vee B$ *là hai công thức đồng nhất bằng nhau.*

Một số luật khác trong logic mệnh đề:

(1) Luật đối ngẫu

Định nghĩa: Cho A là một công thức chỉ có 3 phép *toán hội, tuyển và phủ định* mà không có chứa phép tuyển loại và phép kéo theo. *Công thức đối ngẫu của A*, kí hiệu là A^*, là một công thức thu được từ A sau khi đổi phép toán hội thành tuyển, tuyển thành hội, mệnh đề *0* thành *1* và mệnh đề *1* thành *0* (phép phủ định giữ nguyên).

Định lý 1: Nếu $A = A(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, là một hàm mệnh đề chứa các mệnh đề sơ cấp $X_1, X_2, \ldots, X_n$ thì $A^* = \overline{A(\overline{X_1}, \overline{X_2}, \ldots, \overline{X_n})}$.

Định lý 2 (Nguyên lý đối ngẫu): Nếu $A \equiv B$ thì $A^* \equiv B^*$ (Tức là, nếu hai công thức là đồng nhất bằng nhau thì các công thức đối ngẫu của chúng cũng đồng nhất bằng nhau).

*<u>Ví dụ 1:</u> Bằng cách lấy đối ngẫu theo **Định nghĩa** hoặc theo **Định lý 1**, mỗi cặp công thức trong từng nhóm (1); (2); (3); (4); (5) ở **Bảng 6.1** là đối ngẫu của nhau, Và đương nhiên, chúng thỏa mãn nguyên lý đối ngẫu (**Định lý 2**).*

(2) Luật thay thế

Định lý: Giả sử *A(p)* là một công thức chứa mệnh đề sơ cấp p và E là một công thức nào đó. Nếu $A(p) \equiv 1$ thì $A(E) \equiv 1$, với *A(E)* là công thức thu được từ *A(p)* khi thay mệnh đề p bởi công thức E.

*<u>Ví dụ 2:</u> Từ Luật thống trị (1.4) trong nhóm (1) **Bảng 6.1**. Áp dụng Luật thay thế, suy ra công thức sau là đồng nhất đúng:* $(p \wedge q) \vee 1 \equiv 1$.

(3) Luật kết luận

Định lý: Nếu $A \Rightarrow B$ và $A \equiv 1$ thì $B \equiv 1$.

6.1.4. Điều kiện đồng nhất đúng. Điều kiện đồng nhất sai

❖ ***Tuyển sơ cấp, hội sơ cấp***

Định nghĩa 1:

(1) Một *dạng tuyển sơ cấp* (TSC) là một biểu thức logic chỉ chứa phép tuyển của các mệnh đề sơ cấp và phủ định của các mệnh đề sơ cấp.

(2) Một *dạng hội sơ cấp* (HSC) là một biểu thức logic chỉ chứa phép hội của các mệnh đề sơ cấp và phủ định của các mệnh đề sơ cấp.

***Định lý 1*:**

(1) Một dạng TSC là *đồng nhất đúng* khi và chỉ khi TSC đó chứa đồng thời một mệnh đề sơ cấp và phủ định của nó.

(2) Một dạng HSC là *đồng nhất sai* khi và chỉ khi TSC đó chứa đồng thời một mệnh đề sơ cấp và phủ định của nó.

❖ ***Dạng tuyển chuẩn tắc và dạng hội chuẩn tắc***

Định nghĩa 2: Cho *A* là một công thức trong logic mệnh đề.

(1) Nếu $A \equiv A'$, trong đó *A'* là một tuyển của các HSC thì *A'* được gọi là một dạng tuyển chuẩn tắc (TCT) của *A*.

Nói cách khác, *A'* là *một dạng TCT của A* khi và chỉ khi *(*$A \equiv A'$*, với A'* = $HSC_1 \vee HSC_2 \vee \ldots \vee HSC_n$*)*.

(2) Nếu $A \equiv A'$, trong đó *A'* là một hội của các TSC thì *A'* được gọi là một dạng HCT của *A*.

Nói cách khác, *A'* là *một dạng HCT của A* khi và chỉ khi *(*$A \equiv A'$*, với A'* = $TSC_1 \wedge TSC_2 \wedge \ldots \wedge TSC_n$*)*.

Chú ý: Trong dạng HCT, TCT của *A* chỉ chứa đúng 3 phép toán: *hội, tuyển, lấy phủ định.*

Định lý 2: Mọi công thức trong logic mệnh đề đều có dạng HCT và TCT.

Các quy tắc biến đổi đưa một công thức về dạng HCT hoặc TCT tương đương logic với nó:

(1) $p \to q \equiv \bar{p} \vee q$
(2) $\overline{p \wedge q} \equiv \bar{p} \vee \bar{q}; \overline{p \vee q} \equiv \bar{p} \wedge \bar{q}$
(3) $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$; $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

(Quy tắc (1) khử phép kéo theo, quy tắc (2) và (3) chuyển phép tuyển thành phép hội và ngược lại)

❖ ***Điều kiện đồng nhất đúng. Điều kiện đồng nhất sai:***

(1) Công thức $A \equiv 1$ khi và chỉ khi trong dạng HCT của *A* mọi TSC đều chứa đồng thời một mệnh đề sơ cấp và phủ định của nó.
(2) Công thức $A \equiv 0$ khi và chỉ khi trong dạng TCT của *A* mọi HSC đều chứa đồng thời một mệnh đề sơ cấp và phủ định của nó.

Ví dụ : *Sử dụng điều kiện đồng nhất đúng, chứng minh:*

$$\big(p \to (q \to r)\big) \Rightarrow ((p \to q) \to (p \to r)).$$

Giải. Đặt:

$$A \coloneqq \big(p \to (q \to r)\big) \to ((p \to q) \to (p \to r))$$

$$A \equiv \big(\bar{p} \vee (\bar{q} \vee r)\big) \to \big((\bar{p} \vee q) \to (\bar{p} \vee r)\big) \quad \textit{(Khử phép kéo theo)}$$

$$\equiv \overline{\bar{p} \vee \bar{q} \vee r} \vee \big(\overline{\bar{p} \vee q} \vee (\bar{p} \vee r)\big) \quad \textit{(Khử phép kéo theo)}$$

$$\equiv \overline{\bar{p} \vee \bar{q} \vee r} \vee \big((p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \vee r)\big) \quad \textit{(Áp dụng luật De Morgan)}$$

$$\equiv \Big(\overline{(\bar{p} \vee r) \vee \bar{q}} \vee (\bar{p} \vee r)\Big) \vee (p \wedge \bar{q}) \quad \textit{(Áp dụng luật kết hợp)}$$

$$\equiv \big(\overline{(\bar{p} \vee r) \vee \bar{q}} \vee \bar{p} \vee r \vee p\big) \wedge \big(\overline{(\bar{p} \vee r) \vee \bar{q}} \vee \bar{p} \vee r \vee \bar{q}\big) \quad \textit{(Áp dụng luật phân phối)}$$

$$\equiv \big(\overline{(\bar{p} \vee r) \vee \bar{q}} \vee \bar{p} \vee r \vee p\big) \wedge \Big(\overline{(\bar{p} \vee r) \vee \bar{q}} \vee (\bar{p} \vee r \vee \bar{q})\Big) \quad \textit{(Áp dụng luật kết hợp)}$$

Ta có biểu thức tuyển $\overline{(\bar{p} \vee r) \vee \bar{q}} \vee (\bar{p} \vee r \vee \bar{q})$ *có dạng* $E \vee \bar{E}$ *với công thức* $E = \bar{p} \vee r \vee \bar{q}$. *Hơn nữa trong tuyển* $\overline{(\bar{p} \vee r) \vee \bar{q}} \vee \bar{p} \vee r \vee p$ *có chứa mệnh đề* p *và* $\bar{p}$ *nên* $A \equiv 1$.

Vậy : $\big(p \rightarrow (q \rightarrow r)\big) \Rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$.

6.1.5. Các quy tắc suy diễn trong logic mệnh đề

Trong các chứng minh toán học, xuất phát từ *một số khẳng định đúng p, q, r, …* (gọi là các *tiền đề*), ta áp dụng các *quy tắc suy diễn* để suy ra mệnh đề *h* (mà ta gọi là *kết luận*) là *chân lý* hay *đồng nhất đúng*.

Nói cách khác, dùng các quy tắc suy diễn để chứng minh: $(p \wedge q \wedge r \wedge \ldots)$ có *hệ quả logic* là *h*.

Tức là: $(p \wedge q \wedge r \wedge \ldots) \Rightarrow h \qquad (*)$.

Một cách để chứng minh đồng nhất đúng (*) là *lập bảng giá trị chân lý*. Tuy nhiên cách làm này không hiệu quả nếu *số biến mệnh đề lớn*.

Để khắc phục điều này, ta *sử dụng các quy tắc suy diễn đã được khẳng định là đúng* để chia bài toán thành *các modul nhỏ*, nghĩa là từ một số tiền đề suy ra một số kết luận trung gian, và coi các kết luận này như là các tiền đề để suy ra kết luận cuối cùng.

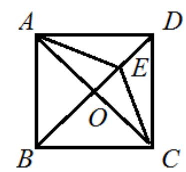
Ta thường mô hình hóa phép suy luận đó dưới dạng:

$$\begin{array}{c} p \\ q \\ r \\ \ldots \\ \hline \therefore h \end{array}$$

Sau đây là một số quy tắc suy diễn quan trọng. Việc chứng minh *tính đúng đắn của các quy tắc* này chính là việc chứng minh *các đồng nhất đúng* tương ứng, mà ta có thể thực hiện bằng cách đơn giản là lập bảng chân trị.

Bảng 6.3. Một số quy tắc suy diễn quan trọng.

Các quy tắc suy diễn	*Dạng sơ đồ*	*Ví dụ minh họa*
1. *Quy tắc khẳng định* $[(p \to q) \land p] \Rightarrow q$	$\begin{array}{c} p \to q \\ \underline{p} \\ \therefore q \end{array}$	- Nếu Hoa chăm học thì Hoa sẽ đạt điểm cao. - Mà Hoa chăm học. - *Suy ra :* Hoa đạt điểm cao.
2. *Quy tắc phủ định* $[(p \to q) \land \bar{q}] \Rightarrow \bar{p}$	$\begin{array}{c} p \to q \\ \underline{\bar{q}} \\ \therefore \bar{p} \end{array}$	- Nếu Hoa chăm học thì Hoa sẽ đạt điểm cao. - Mà Hoa không đạt điểm cao. - *Suy ra :* Hoa không chăm học.
3. *Quy tắc tam đoạn luận* $[(p \to q) \land (q \to r)] \Rightarrow (p \to r)$	$\begin{array}{c} p \to q \\ \underline{q \to r} \\ \therefore p \to r \end{array}$	- Nếu trời mưa nhiều thì bạn sẽ không đi chơi. - Nếu bạn không đi chơi thì bạn sẽ học tốt. - *Suy ra :* Nếu trời mưa nhiều thì bạn sẽ học tốt.
4. *Quy tắc tam đoạn luận rời* $[(p \lor q) \land \bar{q}] \Rightarrow p$	$\begin{array}{c} p \lor q \\ \underline{\bar{q}} \\ \therefore p \end{array}$	- Thứ bảy, Hoa thường đi xem phim ở rạp hoặc về quê. - Thứ bảy này, Hoa không về quê. - *Suy ra :* Thứ bảy này, Hoa đi xem phim ở rạp.
5. *Quy tắc nối liền* $(p \land q) \Rightarrow (p \land q)$	$\begin{array}{c} p \\ \underline{q} \\ \therefore p \land q \end{array}$	- Hôm nay, trời mưa nhiều. - Hôm nay, Hoa ở nhà. - *Suy ra :* Hôm nay, trời mưa nhiều và Hoa ở nhà.
6. *Quy tắc đơn giản* $(p \land q) \Rightarrow p$	$\begin{array}{c} p \land q \\ \underline{\quad} \\ \therefore p \end{array}$	- Hôm nay, Hoa về quê và ngủ sớm. - *Suy ra :* Hôm nay, Hoa về quê.
7. *Quy tắc chứng minh theo trường hợp* $[(p \to r) \land (q \to r)] \Rightarrow [(p \lor q) \to r]$	$\begin{array}{c} p \to r \\ \underline{q \to r} \\ \therefore (p \lor q) \to r \end{array}$	- Chứng minh mệnh đề: 'n là số tự nhiên thì $n(n+1) \vdots 2$'. - *Suy ra :* Chỉ cần chứng minh 2 mệnh đề đồng nhất đúng là: 'n là số tự nhiên chẵn thì $n(n+1) \vdots 2$' và 'n là số tự nhiên lẻ thì $n(n+1) \vdots 2$'
8. *Quy tắc mâu thuẫn (Hay chứng minh bằng phản chứng)* $[(p_1 \land p_2 \land \ldots \land p_n) \to h]$ $\Leftrightarrow [(p_1 \land p_2 \land \ldots \land p_n \land \bar{h}) \to 0]$	$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \ldots \\ \underline{p_n} \\ \therefore h \end{array} \equiv \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \ldots \\ p_n \\ \underline{\bar{h}} \\ \therefore 0 \end{array}$	- Chứng minh mệnh đề: "Tổng của một số hữu tỉ và một số vô tỉ là một số vô tỉ". - *Suy ra :* Chỉ cần chứng minh phản chứng, tức là chứng minh mệnh đề : "a là số hữu tỉ, b là số vô tỉ và a+b là số hữu tỷ" là SAI (hay là mâu thuẫn).

9. *Quy tắc phản đảo* $$A \to B \Leftrightarrow \bar{B} \to \bar{A}$$ Để chứng minh $A \to B$ là đúng ta chỉ cần chứng minh mệnh đề phản đảo $\bar{B} \to \bar{A}$ cũng là đúng.	- Chứng minh mệnh đề : "Nếu *n* là một số tự nhiên và *3n+2* là một số lẻ thì *n* là số lẻ". - *Suy ra :* Chỉ cần chứng minh mệnh đề phản đảo : "Nếu *n* là số tự nhiên chẵn thì *3n+2* là chẵn".
10. Phản ví dụ Để chứng minh một *phép suy luận:* $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \Rightarrow q$ *LÀ SAI.* hay *công thức :* $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \to q$ *không phải là đồng nhất đúng*, ta chỉ cần chỉ ra một phản ví dụ. Tức là chỉ ra một bộ chân trị của các mệnh đề có trong công thức, làm cho giá trị chân lý của công thức là sai. Trường hợp đơn giản nhất, ta chọn bộ $(p_1, p_2, \ldots, p_n, q) = (1,1, \ldots, 1,0)$ tức là chỉ ra trường hợp tất cả các tiền đề đều đúng còn kết luận sai. Bộ chân trị trên gọi là *một phản ví dụ* của phép suy luận đã cho.	- Chứng minh mệnh đề: "Tứ giác có hai đường chéo vuông góc thì tứ giác đó là hình thoi", LÀ SAI. - *Suy ra:* Chỉ cần lấy *một phản ví dụ:* Cho hình vuông *ABCD* có $AC \cap BD = O$. Gọi *E* là trung điểm của *OD*. Suy ra 'Tứ giác *ABCE* có hai đường chéo vuông góc nhưng không có các cạnh đối song song nên tứ giác đó không là hình thoi'. 

<u>*Ví dụ 1:*</u> *Suy luận sau có đúng không?*

Ông Minh nói rằng, nếu không tăng lương thì ông ta sẽ nghỉ việc. Mặt khác, nếu ông ấy nghỉ việc và vợ ông ấy mất việc thì phải bán xe.

Biết rằng, vợ ông ấy hay đi làm trễ thì trước sau gì cũng sẽ bị mất việc. Nhưng ông Minh đã được tăng lương.

Suy ra, nếu ông Minh không bán xe thì vợ ông ta đã không đi làm trễ.

Giải.

Kí hiệu các mệnh đề như sau:

p: Ông Minh được tăng lương.
q: Ông Minh nghỉ việc.
r: Vợ ông Minh mất việc.
s: Ông Minh bán xe.
t: Vợ ông Minh hay đi làm trễ.

Từ bài toán và theo quy tắc phản đảo ta có các tiền đề (các khẳng định đúng) và quy tắc suy diễn sau:

$$\left(\begin{array}{c} \bar{p} \to q \\ (q \wedge r) \to s \\ t \to r \\ p \\ \hline \therefore \bar{s} \to \bar{t} \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{c} \bar{p} \to q \\ (q \wedge r) \to s \\ t \to r \\ p \\ \hline \therefore t \to s \end{array}\right)$$

Một phản ví dụ thỏa mãn mọi tiền đề đều đúng nhưng kết luận sai là: t=1, s=0 ; r=1, p=1, q=0.

Vậy suy luận trên không đúng. Tức là ông Minh không bán xe thì vợ ông Minh vẫn có thể đi làm trễ.

Thật vậy, ông Minh được tăng lương nên ông Minh không bỏ việc. Mà ông Minh không bỏ việc thì chắc chắn không phải bán xe. Do vậy việc vợ ông ấy hay đi làm trễ (tức là vợ bị mất việc) không ảnh hưởng đến việc ông Minh không phải bán xe.

Ví dụ 2 : *Cho các tiền đề :*

'Nếu anh đến thì em đi chơi khuya'.
'Nếu anh không đến thì em đi ngủ sớm'.
'Nếu em ngủ sớm thì mai em sẽ đi học đúng giờ'.
Hãy chứng minh hệ quả logic: 'Nếu em không đi chơi khuya thì mai em sẽ đi học đúng giờ' .

Giải.

Kí hiệu các mệnh đề là:

p: Anh đến.
q : Em đi chơi khuya.
r: Em đi ngủ sớm.
s: Em đi học đúng giờ.

Sơ đồ suy diễn là :

$$\begin{array}{ll} p \to q & (1) \\ \bar{p} \to r & (2) \\ r \to s & (3) \\ \hline \therefore \bar{q} \to s & \end{array}$$

Áp dụng các quy tắc suy diễn như sau:

$\bar{q} \to \bar{p}$	*(Từ (1) và quy tắc phản đảo)*
$\bar{p} \to r$	*(Tiền đề (2))*
$\therefore \bar{q} \to r$	*(Quy tắc tam đoạn luận)*
$r \to s$	*(Tiền đề (3))*
$\therefore \bar{q} \to s$	*(Quy tắc tam đoạn luận)*

Vậy : 'Nếu em không đi chơi khuya thì mai em sẽ đi học đúng giờ' là đồng nhất đúng.

Chú ý **:** Phải dùng *hằng các đồng nhất đúng* để suy luận, nếu dùng *TIẾP LIÊN* (là một công thức không phải là đồng nhất đúng, cũng không phải là đồng nhất sai), chúng sẽ khiến suy luận thành *NGỤY BIỆN.*

Bảng 3.4. Một số suy diễn là NGỤY BIỆN.

Tiếp liên	*Ngụy biện*	*Ví dụ*
$[(p \to q) \land q] \to p$	*Ngụy biện khẳng định kết luận*	Nếu anh ta cưới vợ thì anh ta sẽ có con. Anh ta đã có con. Vậy anh ta đã có gia đình.
$[(p \to q) \land \bar{p}] \to \bar{q}$	*Ngụy biện phủ định giả thiết*	Nếu anh ta cưới vợ thì anh ta sẽ có con. Anh ta không lập gia đình. Vậy anh ta không thể có con.

6.2. LOGIC VỊ TỪ

Trong các khẳng định toán học ta hay gặp các phát biểu có liên quan đến biến như : *"$x^2+3x-4>0$" ; "$x = y +2$" ; "$x + y = z$"...* ; với điều kiện *x, y, z* là các số thực. Ta chưa xác định được các phát biểu này đúng hay sai bởi vì các biến chưa có giá trị.

Trong các chương trình máy tính (Chẳng hạn, *ngôn ngữ Prolog*, ngôn ngữ lập trình suy luận trên cơ sở logic toán học để giải quyết các bài toán trong lĩnh vực trí tuệ nhân tạo), ta cũng hay gặp các biểu thức chứa biến kiểu như vậy, với miền xác định của các biến đã biết.

Kí hiệu các phát biểu trên là: *P(x): "$x^2+3x-4>0$"; Q(x,y): "$x = y +2$"; R(x,y,z): "$x + y = z$" (*).*
Rõ ràng, bản thân các phát biểu *P(x), Q(x,y), R(x,y,z)* chưa phải là một mệnh đề. Tuy vậy, khi *gán giá trị cụ thể* cho các biến hoặc *chỉ ra một miền xác định* của các biến thì các phát biểu đó trở thành các mệnh đề. Chẳng hạn :
Phát biểu : *P(2) = "$2^2 + 3.2 - 4 > 0$"*, là một mệnh đề ĐÚNG (gán *x = 2*).
Phát biểu : Với mọi $x \in (0;2), P(x)=$ " với mọi $x \in (0;2)$: $x^2+3x-4>0$" là một mệnh đề SAI.
Phát biểu : *Q(2,1) = "2 = 1 + 2"* là một mệnh đề SAI (gán *x = 2, y = 1*) ….

Ta gọi các phát biểu ở (*) là *các hàm mệnh đề* hay là *các vị từ* . Dạng tổng quát ta có định nghĩa sau:

6.2.1. Các định nghĩa.

(1) *Vị từ :* Cho $X_1; X_2; ...; X_n$ là tập hợp các đối tượng nào đó. Đặt $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ và $(x_1; x_2; ...; x_n) \in X$ tức $x_i \in X_i, \forall i = \overline{1,n}$. Một phát biểu có *n* biến $x_1; x_2; ...; x_n$ được kí hiệu là $P(x_1; x_2; ...; x_n)$ được gọi là *một hàm mệnh đề* xác định trên *X* nếu thỏa mãn :

- Phát biểu $P(x_1; x_2; ...; x_n)$ chưa phải là mệnh đề.
- Nhưng thay $(x_1; x_2; ...; x_n)$ với $x_i \in X_i$ thành giá trị cụ thể $(\overline{x_1}; \overline{x_2}; ...; \overline{x_\iota})$ thì phát biểu $P(\overline{x_1}; \overline{x_2}; ...; \overline{x_\iota})$ là một mệnh đề.

Hàm mệnh đề $P(x_1; x_2; ...; x_n)$ còn gọi là *vị từ n ngôi* xác định trên $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$.

(2) *Sự lượng hóa :* Cho *P(x)* là vị từ một ngôi xác định trên *A*. Các *mệnh đề lượng từ hóa của P(x)* xác định như sau :

(i) *Lượng từ "với mọi"* hay "*phổ dụng*", kí hiệu ∀. Mệnh đề *"Với mọi x thuộc A, P(x)"*, kí hiệu :

$$\text{"}\forall x \in A, P(x)\text{"} \qquad (2i)$$

Mệnh đề (2i) là ĐÚNG nếu với bất kì x_0 thuộc *A* thì mệnh đề $P(x_0)$ luôn nhận giá trị đúng.
Ngược lại, (2i) là SAI nếu có ít nhất một phần tử x_0 thuộc *A* để $P(x_0)$ sai.

(ii) *Lượng từ "tồn tại"*, kí hiệu ∃. Mệnh đề *"Tồn tại (ít nhất) một x thuộc A, P(x)"* hay *"Có ít nhất một x thuộc A, P(x)"*, kí hiệu :

$$\text{"}\exists x \in A, P(x)\text{"} \qquad (2ii)$$

Mệnh đề (2ii) là ĐÚNG nếu có ít nhất một giá trị x_0 thuộc *A* để $P(x_0)$ đúng.
Ngược lại, mệnh đề (2ii) là SAI nếu với bất kì x_0 thuộc *A* thì $P(x_0)$ luôn nhận giá trị sai.

Tóm lại, nếu $A = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$ thì :

(2i) $"\forall x \in A, P(x)" \equiv P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \ldots \wedge P(x_n)$.

(2ii) $"\exists x \in A, P(x)" \equiv P(x_1) \vee P(x_2) \vee \ldots \vee P(x_n)$.

Tức là, để xác định chân trị của (2i) là *đúng* thì phải thử *tất cả* các giá trị x_i thuộc *A*; còn để xác định chân trị của (2ii) là *đúng* thì ta chỉ cần tìm *một* giá trị của x_i thuộc *A*.

Ví dụ 1: Cho *P(x) = "$x^2 + 3x - 4 > 0$"* *với x là số thực* ; *S(n) = "$n(n+1) \vdots 2$"* *với n là số tự nhiên.*

Mệnh đề $\forall x \in \mathbb{R}$, P(x) := "$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 3x - 4 > 0$". Đây là một mệnh đề SAI. Vì thử với x = 0, P(0) là một mệnh đề sai.
Mệnh đề $\exists x \in \mathbb{R}$, P(x) := "$\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 + 3x - 4 > 0$". Dễ thấy, mệnh đề này là ĐÚNG (chẳng hạn đúng với x = 2).

Mệnh đề $\forall n \in \mathbb{N},\ S(n)$:= "$\forall n \in \mathbb{N},\ n(n+1) \vdots 2$". Đây là một mệnh đề ĐÚNG. Vì thử với số tự nhiên n bất kì, xảy ra hai trường hợp: n chẵn (n = 2k) hoặc n lẻ (n = 2k + 1) thì S(2k) = "2k.(2k + 1) $\vdots$ 2" và S(2k + 1) = "(2k+1).(2k+2) $\vdots$ 2" là các mệnh đề đúng.
Hiển nhiên, mệnh đề $\exists n \in \mathbb{N}, S(n)$:= "$\exists n \in \mathbb{N}, n(n+1) \vdots 2$" là ĐÚNG (Chẳng hạn đúng với n = 2).

Lưu ý: *Thứ tự các lượng từ* đối với vị từ nhiều ngôi là quan trọng, ta chỉ *không phân biệt thứ tự* khi tất cả các lượng từ là "*với mọi*", hoặc tất cả các lượng từ là "*tồn tại*".

Bảng 6.4. Ý nghĩa của các lượng từ đối với vị từ hai ngôi *Q(x,y)*.

Mệnh đề lượng từ hóa của Q(x,y)	*Ý nghĩa các lượng từ*
(1) $\forall x \in A, \forall y \in B, Q(x,y)$ Hay $\forall x \in A, \{\forall y \in B, Q(x,y)\}$	Là một mệnh đề đúng nếu *Q(x,y)* là đúng với mọi cặp (*x,y*) tùy ý. Là một mệnh đề sai nếu có ít nhất một cặp (*x,y*) nào đó để *Q(x,y)* là sai.
(2) $\forall x \in A, \exists y \in B, Q(x,y)$ Hay $\forall x \in A, \{\exists y \in A, Q(x,y)\}$	Là một mệnh đề đúng nếu với giá trị *x* bất kì, có ít nhất một giá trị *y* để *Q(x,y)* là đúng, Là một mệnh đề sai nếu có ít nhất một giá trị *x* để *Q(x,y)* là sai với mọi *y*.
(3) $\exists x \in A, \forall y \in B, Q(x,y)$ Hay $\exists x \in A, \{\forall y \in B, Q(x,y)\}$	Là một mệnh đề đúng nếu có ít nhất một giá trị *x* để *Q(x,y)* là đúng với mọi *y*. Là một mệnh đề sai nếu với *x* bất kì, có ít nhất một giá trị *y* để *Q(x,y)* là sai.
(4) $\exists x \in A, \exists y \in B, Q(x,y)$ Hay $\exists x \in A, \{\exists y \in B, Q(x,y)\}$	Là một mệnh đề đúng nếu có ít nhất một cặp (*x,y*) nào đó để *Q(x,y)* là đúng. Là một mệnh đề sai nếu *Q(x,y)* là sai với mọi cặp (*x,y*) tùy ý.

Ví dụ 2 : *Xét hai mệnh đề lượng từ hóa của vị từ Q(x,y) = "x = y + 2" với $x, y \in \mathbb{R}$:*

$\forall x \exists y, Q(x,y) =$ "$\forall x \exists y,\ x = y + 2$". *Phát biểu là : "Với mọi số thực x, tồn tại số thực y thỏa mãn : x = y + 2". Đây là một mệnh đề ĐÚNG. Vì : với số thực x tùy ý, chọn y = x – 2 thì x = y + 2.*

$\exists y \forall x, Q(x,y) =$ "$\exists y \forall x,\ x = y + 2$". *Phát biểu là : "Tồn tại ít nhất một số thực y, để với mọi số thực x ta có: x = y+2". Đây là một mệnh đề SAI. Vì: với mọi số thực y, chọn x = y+3 thì $x \neq y + 2$.*

Định lý : Cho *Q(x,y)* là một vị từ theo hai biến *x*, *y* xác định trên $A \times B$. Khi đó :

(1) "$\forall x \in A, \forall y \in B, Q(x,y)$" $\Leftrightarrow$ "$\forall y \in B, \forall x \in A, Q(x,y)$".
(2) "$\exists x \in A, \exists y \in B, Q(x,y)$" $\Leftrightarrow$ "$\exists y \in B, \exists x \in A, Q(x,y)$".
(3) "$\exists x \in A, \forall y \in B, Q(x,y)$" $\Rightarrow$ "$\forall y \in B, \exists x \in A, Q(x,y)$".

Theo *Ví dụ 2* ở trên thì chiều đảo của (3) nói chung không đúng.

Quy tắc đặc biệt hóa phổ dụng : Nếu một mệnh đề lượng từ hóa chứa lượng từ phổ dụng ($\forall$) trước biến $x \in A$, LÀ ĐÚNG, khi ấy nếu thay *x* bởi $a \in A$ thì ta sẽ được một mệnh đề ĐÚNG.

Ví dụ 3: *Vì : "Mọi người đều có quê hương", mà Mai là người, nên "Mai cũng có quê hương".*

6.2.2. Phủ định của vị từ và lượng từ.

Từ **Định nghĩa** của lượng từ "*với mọi*" và "*tồn tại*" và **Bảng 6.4 -** bảng ý nghĩa của các lượng từ đối với vị từ hai ngôi, ta có *Phủ định của các mệnh đề lượng từ hóa* của vị từ một ngôi và vị từ hai ngôi như sau :

Bảng 6.5. Phủ định của vị từ và lượng từ

Mệnh đề lượng từ hóa	*Phủ định của mệnh đề lượng từ hóa*
$\forall x \in A, P(x)$	$\overline{\forall x \in A, P(x)} \equiv \exists x \in A, \overline{P(x)}$
$\exists x \in A, P(x)$	$\overline{\exists x \in A, P(x)} \equiv \forall x \in A, \overline{P(x)}$
$\forall x \in A, \forall y \in B, Q(x,y)$	$\overline{\forall x \in A, \forall y \in B, Q(x,y)} \equiv \exists x \in A, \exists y \in B, \overline{Q(x,y)}$
$\exists x \in A, \exists y \in B, Q(x,y)$	$\overline{\exists x \in A, \exists y \in B, Q(x,y)} \equiv \forall x \in A, \forall y \in B, \overline{Q(x,y)}$
$\forall x \in A, \exists y \in B, Q(x,y)$	$\overline{\forall x \in A, \exists y \in B, Q(x,y)} \equiv \exists x \in A, \forall y \in B, \overline{Q(x,y)}$
$\exists x \in A, \forall y \in B, Q(x,y)$	$\overline{\exists x \in A, \forall y \in B, Q(x,y)} \equiv \forall x \in A, \exists y \in B, \overline{Q(x,y)}$

Ví dụ 1 : *Ta có định nghĩa, một hàm thực f(x) liên tục tại điểm x_0 nếu :*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0: \{(\forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\}$$

Suy ra, hàm thực f(x) không liên tục tại điểm x_0 nếu :

$$\exists\varepsilon > 0, \forall\delta > 0: \overline{\{(\forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\}}$$

$$\Leftrightarrow \exists\varepsilon > 0, \forall\delta > 0: \left\{(\exists x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \delta) \Rightarrow \overline{|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \exists\varepsilon > 0, \forall\delta > 0: \{(\exists x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| > \varepsilon\}\ .$$

6.2.3. Dịch các câu thông thường thành biểu thức logic

Sử dụng các *vị từ* và các *lượng từ* chúng ta có thể biểu diễn được một tập hợp rộng lớn các câu thông thường thành các biểu thức logic. Việc làm này nhằm mục đích loại đi những đi những điều chưa rõ ràng và người ta có thể sử dụng các biểu thức này trong việc *lập trình logic* và *trí tuệ nhân tạo*. Xét các ví dụ sau đây.

Ví dụ 1 : *Dùng vị từ và lượng từ, ta có thể biểu diễn các suy luận thông thường như sau :*

Câu thông thường	*Vị từ*	*Biểu thức logic*
1. *Nếu một người nào đó là nữ và đã sinh con thì người đó sẽ là mẹ của một người khác.*	*P(x) : x là nữ.* *Q(x) : x đã sinh con.* *R(x,y) : x là mẹ của y*	$\forall x \in A, P(x) \wedge Q(x) \Rightarrow \exists y \in M, R(x, y).$ *(A là tập hợp tất cả những người là nữ).*
2. *Tất cả sư tử đều hung dữ. Nhưng một số sư tử không uống cà phê. Vì vậy, có một số sinh vật hung dữ không uống cà phê.*	*P(x) : x là sư tử.* *Q(x) : x là hung dữ.* *R(x) : x uống cà phê*	$\forall x \in A, P(x) \rightarrow Q(x)$ $\exists x, P(x) \wedge \overline{R(x)}$ $\therefore\ \exists x, Q(x) \wedge \overline{R(x)}$ *(A là tập hợp tất cả các sinh vật)*
3. *Tất cả các con chim ruồi đều có màu sặc sỡ. Nhưng không có con chim lớn nào sống bằng mật ong. Và các con chim không sống bằng mật ong đều không có màu sặc sỡ. Do vậy, chim ruồi là nhỏ.*	*P(x) : x là chim ruồi.* *Q(x) : x là lớn.* *R(x) : x có màu sặc sỡ* *S(x) : x sống bằng mật ong*	$\forall x \in A, P(x) \rightarrow R(x)$ (3.1) $\overline{\exists x \in A, Q(x) \rightarrow S(x)}$ (3.2) $\forall x \in A, \overline{S(x)} \rightarrow \overline{R(x)}$ (3.3) $\therefore\ \forall x \in A, P(x) \rightarrow \overline{Q(x)}$ *(A là tập hợp tất cả các sinh vật)*

Nhận xét: *Suy luận trong câu thứ 3 ở Ví dụ 1 trên đây, được chứng minh suy diễn logic theo sơ đồ sau:*

$\overline{\exists x \in A, \overline{Q(x)} \vee S(x)}$	- *Khử phép kéo theo trong tiền đề (3.2)*
$\therefore \forall x \in A, \overline{\overline{Q(x)} \vee S(x)}$	- *Phủ định của lượng từ tồn tại*
$\therefore \forall x \in A, Q(x) \wedge \overline{S(x)}$	- *Luật De Morgan*
$\forall x \in A, \overline{S(x)} \rightarrow \overline{R(x)}$	- *Tiền đề (3.3)*
$\therefore \forall x \in A, Q(x) \wedge \overline{R(x)}$	
$\forall x \in A, \overline{R(x)} \rightarrow \overline{P(x)}$	- *Quy tắc phản đảo với (3.1)*
$\therefore \forall x \in A, Q(x) \wedge \overline{P(x)}$	
$\therefore \forall x \in A, Q(x) \rightarrow \overline{P(x)}$	- *Theo định nghĩa của hội (∧)*
$\therefore \forall x \in A, P(x) \rightarrow \overline{Q(x)}$	- *Quy tắc phản đảo*

BÀI TẬP CHƯƠNG 6

6.1. Cho các mệnh đề sau:

p: Bạn bị ốm, nghỉ học nhiều.

q: Bạn thi trượt kì thi kết thúc học phần.

r: Bạn được lên lớp.

Phát biểu các mệnh đề sau theo cách nói thông thường:

a) $p \rightarrow q$

b) $r \leftrightarrow \bar{q}$

c) $q \rightarrow \bar{r}$

d) $(p \rightarrow \bar{r}) \vee (q \rightarrow \bar{r})$

e) $(p \wedge q) \vee (\bar{q} \wedge r)$.

6.2. Cho các mệnh đề:

p: Bạn nhận được điểm giỏi trong kì thi cuối khóa.

q: Bạn làm hết bài tập trong quyển sách này.

r: Bạn sẽ được công nhận là sinh viên xuất sắc trong lớp.

Hãy viết lại các mệnh đề sau thành các biểu thức logic:

a) Bạn được công nhận là sinh viên xuất sắc trong lớp nhưng bạn không làm hết bài tập trong quyển sách này.

b) Bạn nhận được điểm giỏi trong kì thi cuối khóa, bạn làm hết bài tập trong quyển sách này và bạn sẽ được công nhận là sinh viên xuất sắc trong lớp.
c) Để được công nhận là sinh viên xuất sắc trong lớp bạn cần phải nhận được điểm giỏi trong kì thi cuối khóa.
d) Bạn nhận được điểm giỏi ở kì thi cuối khóa, nhưng bạn không làm hết các bài tập trong quyển sách này, tuy nhiên bạn vẫn được công nhận là sinh viên xuất sắc trong lớp.
e) Nhận được điểm giỏi trong kì thi cuối khóa, và bạn làm hết bài tập trong quyển sách này là đủ để bạn được công nhận là xuất sắc trong lớp.
f) Bạn sẽ được công nhận là xuất sắc trong lớp nếu và chỉ nếu bạn làm hết bài tập trong quyển sách này hoặc nhận được điểm giỏi trong kì thi cuối khóa.

6.3. Dựa vào bảng chân trị, hãy chỉ ra công thức nào là đồng nhất đúng? Đồng nhất sai? Tiếp liên?

a) $p \to (p \vee q)$
b) $p \to (p \wedge q)$
c) $\bar{q} \wedge (p \to q) \to \bar{p}$
d) $\bar{p} \wedge (p \to q) \to \bar{q}$
e) $(p \to q) \to (p \vee \bar{q})$
f) $(p \to q) \wedge (\bar{p} \to q)$
g) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \big((p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})\big)$
h) $\big((p \to q) \to r\big) \leftrightarrow \big(p \to (q \to r)\big)$

6.4. Chứng minh các công thức sau là đồng nhất đúng bằng cách lập bảng chân trị hoặc sử dụng điều kiện đồng nhất đúng.

a) $\bar{p} \to (p \to q)$
b) $\overline{p \to q} \to p$
c) $\overline{p \to q} \to \bar{q}$
d) $(\bar{p} \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow \bar{q})$
e) $(p \to q) \vee (\bar{p} \to r)$
f) $[(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r)] \to r$

6.5. Chứng minh các tương đương logic sau:

a) $p \wedge (p \to q) \Leftrightarrow (p \wedge q)$
b) $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$
c) $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
d) $(\bar{p} \leftrightarrow \bar{q}) \Leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$
e) $\overline{p \oplus q} \Leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$
f) $\overline{p \leftrightarrow q} \Leftrightarrow (\bar{p} \leftrightarrow q)$

6.6. Các suy luận sau là đúng hay sai? Giải thích?

a) $$\begin{array}{c} p \to (q \to r) \\ p \vee s \\ t \to q \\ \bar{s} \\ \hline \therefore \bar{r} \to \bar{t} \end{array}$$

b) $$\begin{array}{c} p \to q \\ \bar{r} \vee s \\ p \vee r \\ \hline \therefore \bar{q} \to s \end{array}$$

c) $$\begin{array}{c} p \to (q \to r) \\ \bar{q} \to \bar{p} \\ p \\ \hline \therefore r \end{array}$$

d) $$\begin{array}{c} p \to r \\ \bar{p} \to q \\ q \to s \\ \hline \therefore \bar{r} \to s \end{array}$$

e) $$\begin{array}{c} p \to q \\ \bar{r} \\ \bar{q} \\ \hline \therefore p \vee r \end{array}$$

f) $$\begin{array}{c} p \to (q \to r) \\ r \to \bar{q} \\ r \\ \hline \therefore \bar{p} \end{array}$$

g) $$\begin{array}{c} p \vee q \\ \bar{p} \vee r \\ \bar{r} \\ \hline \therefore q \end{array}$$

h) $$\begin{array}{c} p \to q \\ r \to \bar{q} \\ r \\ \hline \therefore \bar{p} \end{array}$$

k) $$\begin{array}{c} p \wedge q \\ p \to (r \wedge q) \\ r \to (s \vee t) \\ \bar{s} \\ \hline \therefore t \end{array}$$

6.7. Tìm một phản ví dụ chứng tỏ suy luận sau là SAI?

a)
$$\begin{array}{c} p \\ p \to r \\ p \to (q \lor \overline{r}) \\ \overline{q} \lor \overline{s} \\ \hline \therefore s \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{c} p \leftrightarrow q \\ q \to r \\ r \lor \overline{s} \\ \overline{s} \to q \\ \hline \therefore s \end{array}$$

6.8. Cho các vị từ:

P(n): $"(n+1)^2 \geq 2n"$, $n \in \mathbb{N}$.

Q(x,y): $"x + 3y = 5"$, $x, y \in \mathbb{Z}$.

Hãy phát biểu mệnh đề hóa lượng từ sau và xác định giá trị chân lý của nó.

a) $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$
b) $\exists n \in \mathbb{N}, P(n)$.
c) $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, Q(x,y)$.
d) $\exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, Q(x,y)$.
e) $\exists x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, Q(x,y)$.

6.9. Xác định phủ định của các mệnh đề lượng từ hóa sau? Xác định giá trị chân lý của các mệnh đề đó?

a) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + 2y > 1$.
b) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + 2y < 1$.

6.10. Dịch các suy diễn sau thành các biểu thức logic? Suy diễn đó là đúng hay sai? Giải thích?

a) Biết rằng không có con vịt nào sẵn lòng khiêu vũ cả. Không có viên sĩ quan nào từ chối khiêu vũ. Nhưng toàn bộ đàn gia cầm của tôi là vịt bởi vậy, toàn bộ đàn gia cầm của tôi không phải là các sĩ quan.
b) Tất cả những đứa bé là không logic. Mà những người không logic thì bị coi thường. Thế nhưng, không ai bị coi thường nếu cai quản được cá sấu. Do vậy những đứa bé không cai quản được cá sấu.
c) Tất cả các giải thích rõ ràng đều là thỏa đáng. Một số lý do là không thỏa đáng. Vậy có một số lý do không phải là giải thích rõ ràng.