

Bài toán luồng với chi phí nhỏ nhất



ALGORITHMS AND NETWORKS

Nội dung bài học

- Bài toán luồng với chi phí nhỏ nhất: phát biểu và ứng dụng.
- Thuật toán “*cycle cancelling*”
- Một vài biến thể thời gian đa thức của “*cycle cancelling*”
- Thuật toán áp dụng liên tiếp bài toán đường đi ngắn nhất (the successive shortest paths algorithm)

Bài toán luồng chi phí nhỏ nhất

- Trên một cạnh của đồ thị ta có
 - **Khả năng thông qua (Capacity)** $c(u,v)$: giới hạn về đại lượng có thể thông qua cạnh đó
 - **Giá (Cost)** $\text{cost}(u,v)$: giá phải trả tính trên đơn vị của lượng thông qua cạnh.
- **Giá của luồng (Cost of flow) f :**
 - Tổng trên tất cả các cạnh (u,v) của $f(u,v).\text{cost}(u,v)$

Bài toán luồng chi phí nhỏ nhất

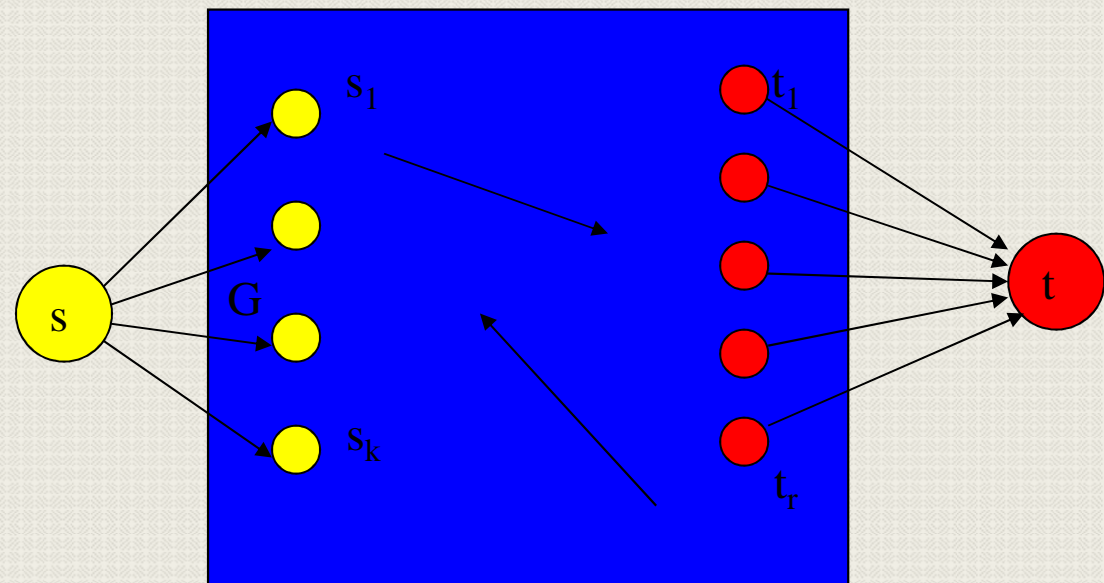
- **Cho trước:** Mạng G , các khả năng c , giá cost, điểm nguồn s , điểm đích t , và giá trị của luồng muốn thông qua r .
- **Câu hỏi:** Tìm một luồng từ s tới t với giá trị r sao cho tổng giá là nhỏ nhất

Khả năng thông qua vô hạn

- Có thể xảy ra trường hợp có một số cạnh của đồ thị có khả năng thông qua vô hạn
- Nếu có một chu trình với giá âm tạo thành chỉ bởi các cạnh có khả năng thông qua vô hạn thì chúng ta có thể tạo ra một luồng với giá nhỏ tùy ý \Rightarrow đây là trường hợp suy biến
- Trong các trường hợp khác: Ta có thể chuyển về trường hợp với giá hữu hạn bằng cách đặt khả năng của cạnh vô hạn bằng tổng khả năng của tất cả các cạnh hữu hạn

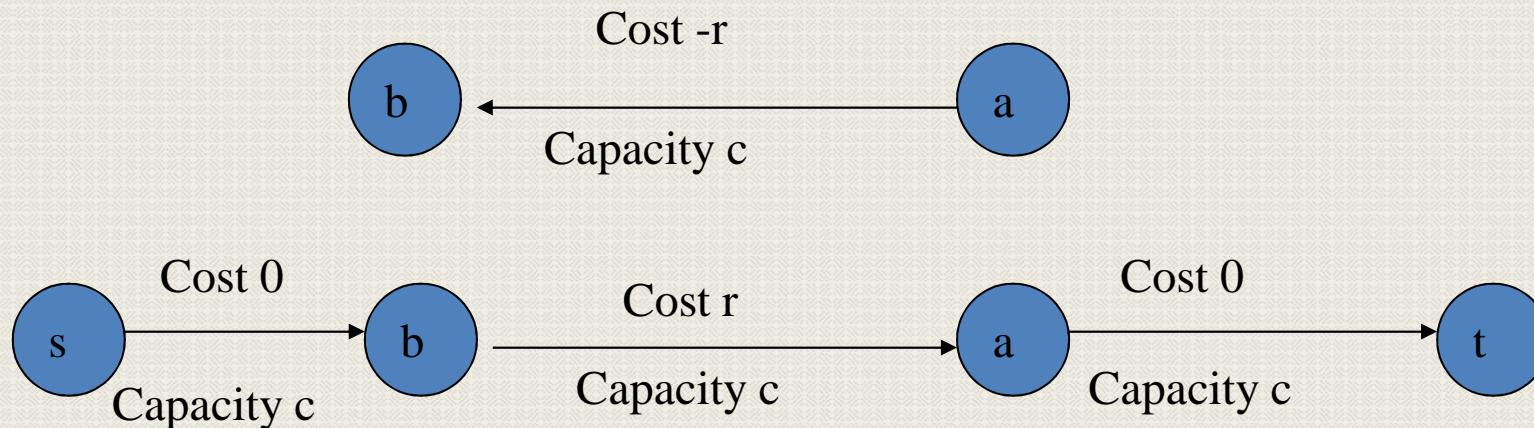
Trường hợp có nhiều nút đích

- Tương tự như bài toán max-flow với nhiều nguồn và đích



Giá trên các cung là không âm

- Có thể coi tất cả các cost là không âm.
- Nếu có giá âm: giả sử khả năng hữu hạn. Biến đổi mạng về mạng tương đương với giá không âm:



Ứng dụng

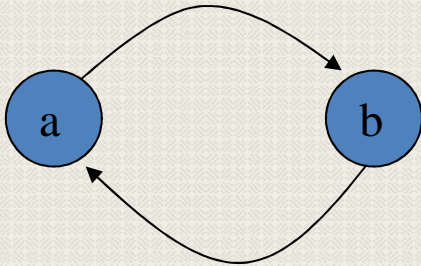
- Bài toán vận tải
- Ghép cặp Matching với giá nhỏ nhất
- Reconstruction of Left Ventricle from X-ray projections
 - Image: Mảng hai chiều các bit; biết tổng hàng, tổng cột và xác suất cho từng bit
 - Tìm ảnh với giá trị đúng các cột và các dòng với xác suất là lớn nhất
 - Bài toán này có thể mô tả như bài toán minimum cost flow

Mạng thặng dư

- Khả năng thông qua như trong bài toán luồng cực đại.
- Nếu $f(u, v) > 0$ thì $\text{cost}_f(u, v) = \text{cost}(u, v)$, and $\text{cost}_f(v, u) = -\text{cost}(u, v)$.

Ví dụ

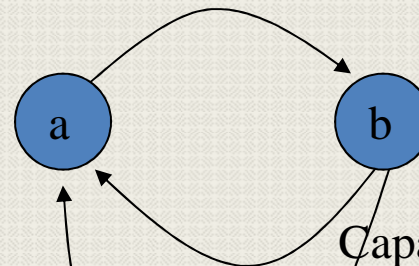
Capacity 5, cost 3



Capacity 2, cost 6

Giả sử chúng ta gửi luồng 1 từ a tới b

Capacity 4, cost 3



In G_f :

Capacity 2, cost 6

Capacity 1, cost -3

Thuật toán *cycle cancelling*

- Tạo ra một luồng khả thi f trên mạng
- **while** G_f có một chu trình âm **do**
 - Tìm một chu trình âm C in G_f
 - Gọi D là khả năng thặng dư nhỏ nhất c_f của một cạnh trên C
 - Cho thêm D đơn vị vào mỗi cạnh trên C : Đây là một luồng khả thi mới với chi phí nhỏ hơn
- Output f .

Thuật toán Cycle cancelling là đúng đắn

- **Định lí:** f có giá nhỏ nhất nếu và chỉ nếu G_f không có chu trình âm
 - Nếu G có chu trình âm thì ta có thể cải thiện G để thu được một luồng có giá nhỏ hơn.
 - Giả sử f là một luồng, và f' là một luồng tối ưu. $f' - f$ là một “circulation” trên G_f từ đây là tổ hợp tuyến tính của các chu trình, và nếu f không phải là tối ưu thì tổng giá của chu trình này là âm do đó tồn tại một chu trình âm trong tập hợp này đó là một chu trình âm trong G_f .

Thuật toán *cycle cancelling*

- Thuật toán *cycle cancelling* không đảm bảo là có thời gian đa thức.
- **Hệ quả:** Nếu mọi giá, capacities, và luồng muốn thông qua là số nguyên thì tồn tại một luồng tối ưu với các giá trị nguyên.
 - Thuật toán *cycle cancelling* tìm được một luồng nguyên
- **Biến thể:** sử dụng chu trình giá trung bình nhỏ nhất (the minimum mean cost cycle) cho thuật toán thời gian đa thức

Minimum mean-cost circulation algorithm

- Trong thuật toán *cycle cancelling* ta tìm *minimum mean cost cycle* và sử dụng chúng
 - $O(nm)$ time to find the cycle.
 - Có một định lí chỉ ra rằng số bước lặp là $O(nm^2 \log^2 n)$.
 - Thuật toán có độ phức tạp $O(n^2m^3 \log^2 n)$.

Successive shortest paths

- *Bắt đầu với luồng f với $f(u,v)=0$ cho mọi (u,v) .*
- **repeat until** $\text{value}(f) = r$
 - Tìm shortest path P trong G_f từ s tới t
 - Đặt q là minimum residual capacity của các cạnh trên P .
 - Gửi $\min(q, r - \text{value}(f))$ giá trị cho luồng dọc theo P .

On the successive shortest paths algorithm

16

- Có thể sử dụng thời gian tính toán là số mũ
- Giả sử G không có cạnh nào có cost âm.
- Cho lời giải tối ưu.
 - Bất biến: f có giá nhỏ nhất trong tất cả các luồng có giá trị $value(f)$.
- Giả sử thu được f' từ f by bằng cách gửi theo P .
- Đặt f'' là luồng với giá nhỏ nhất với cùng giá trị với f' .
- Viết $f'' - f$ như tổng trọng số của đường đi từ s tới t trong G_f và circuits trong G_f . Chứng tỏ $cost(f' - f) \leq cost(f'' - f)$, suy ra:
 - P is shortest path
 - Circuits have non-negative costs, by optimality of f .