Chương 2

QUAN HỆ MỜ VÀ ĐẠI LƯỢNG MỜ

2.1 QUAN HỆ MỜ TỔNG QUÁT

Khái niệm tập con mờ là sự làm mềm dẻo khái niệm tập con cổ điển. Tất cả những phép toán được thực hiện trên các tập con cổ điển, hay trên các phần tử được biết là chính xác đều có thể mở rộng để thực hiện các phép toán tương tự khi mà những tri thức không hoàn hảo buộc ta phải sử dụng các tập con mờ cùng với những khái niệm mở rộng. Những khái niệm và những phép toán mở rộng phải trùng với những khái niệm và những phép toán cổ điển, khi mà hàm thuộc chỉ lấy giá trị trên tập {0, 1}, tức là khi áp dụng với các tập 'rõ' thì vẫn đúng.

Một trong những khái niệm mở rộng quan trọng và có nhiều ứng dụng là khái niệm quan hệ mờ. Khái niệm quan hệ mờ là mở rộng khái niệm quan hệ cổ điển được định nghĩa trên các tập hợp rõ ràng. Các quan hệ mờ nêu bật những mối liên hệ không chính xác hay có cấp độ giữa các phần tử của cùng một tập, hay của nhiều tập hợp. Cũng giống như khái niệm quan hệ trên các tập hợp cổ điển được xem như tập con của tích Descartes của các tập hợp, quan hệ mờ cũng được xem như tập con mờ của tích Descartes của các tập hợp. Vì vậy, các bạn sinh viên cần nắm rất vững những kiến thức về tập hợp, quan hệ trên các tập hợp cổ điển và khái niệm tập con mờ và tích Descartes của các tập con 'rõ' và 'mờ' trước khi nghiên cứu các quan hệ mờ.

2.1.1 Định nghĩa quan hệ mờ

Chúng ta bắt đầu xem xét trường hợp đơn giản nhất của các quan hệ mờ, đó là quan hệ mờ giữa 2 phần tử của một tập hợp tham chiếu U nào đó, đây cũng là trường hợp có nhiều ứng dụng nhất của các quan hệ mờ, đó là các quan hệ mờ hai ngôi. Trong chuyên đề này, ta cũng chủ yếu xét các quan hệ mờ hai ngôi trên cùng một vũ trụ tham chiếu. Việc mở rộng định nghĩa hình thức cho các quan hệ mờ nhiều ngôi, trên nhiều vũ trụ tham chiếu là không khó khăn.

Đối với các quan hệ cổ điển thì với 2 phần tử $a, b \in U$, chúng hoặc là có quan hệ với nhau, hoặc là không có quan hệ với nhau. Ta có thể gán giá trị cho cặp (a, b) là 1 nếu a và b có quan hệ với nhau, và gán giá trị 0 trong trường hợp trái lại. Như vậy hàm hai biến $f_R(a, b)$ lấy giá trị trong tập {0, 1}sẽ xác định được tất cả những cặp $(a, b) \in U \times U$ có quan hệ với nhau theo quan hệ R nào đó, những cặp phần tử như vậy tạo nên một tập con của tích Decac $U \times U$, và được gọi là một quan hệ hai ngôi trên tập hợp U. Với các quan hệ mờ, thì mỗi cặp phần tử (a, b) có thể có mối liên hệ không chính xác hoặc có nhiều cấp độ liên hệ giữa 0 và 1, chứ không chỉ có hai mức độ 0 hoặc 1. Như vậy, nếu ta dùng một hàm $f_R(a, b)$ lấy mọi giá trị trong miền [0, 1] thì sẽ xác định được nhiều cấp độ quan hệ giữa *a và b*, với mọi $a, b \in U$, tức là xác định được quan hệ mờ 2 ngôi trên U, quan hệ này sẽ là một tập con mờ của tích Descartes $U \times U$

Ta có định nghĩa hình thức cho một quan hệ mờ R trên tập U như sau:

Định nghĩa 2.1.

Một quan hệ mờ hai ngôi R (hay đơn giản là quan hệ mờ R) trên tập nền U, ký hiệu là R(U), là một tập con mờ của tích Decac $U \times U$, *với hàm thuộc* $f_R : U \times U \to [0, 1]$.

Nếu hai phần tử a, b$\in$ U có liên hệ với nhau theo quan hệ R với cấp độ α thì ta viết $f_R(a, b) = \alpha$.

Nếu tập U là hữu hạn: U = {u_1, u_2 ,..., u_n}thì quan hệ mờ hai ngôi trên U có thể được biểu diễn bằng một ma trận vuông cấp n, ký hiệu M(R), (hoặc cho bởi bảng n hàng, n cột) mà phần tử α_{ij} nằm trên hàng i và cột j là mức độ liên hệ của u_i với u_j, tức là $\alpha_{ij} = f_R(u_i, u_j)$.

$$M(R) = \{\alpha_{ij}\} ; \alpha_{ij} = f_R(u_i,u_j) ; \text{với } i = 1, 2, ..., n ; j = 1, 2, ..., n. \qquad (2.1)$$

Việc cho một quan hệ mờ 2 ngôi R trên U tương đương với việc cho một ma trận M(R).

Thí dụ 2.1. Cho tập 3 sinh viên: {Hùng, Liên, Dung}, có thể ký hiệu ngắn gọn: U = {H , L, D}. Cho R là một quan hệ mờ hai ngôi trên U, là *mức độ tin cậy của sinh viên này đối với sinh viên kia*. Ta có thể biểu diễn quan hệ mờ R dưới dạng bảng:

R	*H*	*L*	*D*
H	1	0.9	0.3
L	0.9	1	0.1
D	0.5	0.1	1

Tức là ta có các mức độ tin cậy giữa các cặp SV như sau:

$f_R(H, L) = f_R(L, H) = 0.9;$

$f_R(L, D) = f_R(D, L) = 0.1;$

$f_R(H, D) = 0.3; f_R(D, H) = 0.5;$

$f_R(H, H) = f_R(L, L) = f_R(D, D) = 1.$

- Nếu biểu diễn quan hệ trên dưới dạng tập con mờ ta có:

$$R(U) =\{ \frac{1.0}{(H,H)};\frac{0.9}{(H,L)};\frac{0.3}{(H,D)};\frac{0.9}{(L,H)};\frac{1.0}{(L,L)};\frac{0.1}{(L,D)};\frac{0.5}{(D,H)};\frac{0.1}{(D,L)};\frac{1}{(D,L)} \}$$

- Quan hệ R trên đây có thể cho bằng ma trận quan hệ mờ theo công thức (2.1):

$$M(R) = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0.3 \\ 0.9 & 1 & 0.1 \\ 0.5 & 0.1 & 1 \end{bmatrix}$$

Có thể mở rộng định nghĩa quan hệ mờ trên nhiều tập tham chiếu U_1, U_2, …,U_k như sau:

Định nghĩa 2.2.

Một quan hệ mờ k ngôi R (hay đơn giản là quan hệ mờ R) trên k tập tham chiếu U_1, U_2, …,U_k , *ký hiệu là R(U), là một tập con mờ của tích Decac* $U = U_1\times U_2\times ...\times U_k$ *với hàm thuộc:*

$$f_R : U_1\times U_2\times ...\times U_k \to [0, 1] \qquad (2.2)$$

Định nghĩa 2.2 trên đây là định nghĩa tổng quát cho các quan hệ mờ. Khi các tập nền là $U_1= U_2 =…= U_k = U$ thì ta có quan hệ mờ k ngôi trên U, đó là tập con mờ của tích Descartes U^n, xác định bởi hàm thuộc $f_R : U^n \to [0, 1]$.

Trường hợp đơn giản nhất của định nghĩa này, với $U_1= U_2 = U$, ta nói R là quan hệ mờ 2 ngôi trên U, xác định bởi hàm thuộc: $f_R(x, y) \to [0, 1]$, $\forall x, y \in U$.

Nhận xét: Đối với các quan hệ cổ điển hai ngôi R trên X, khi X là tập hữu hạn gồm n phần tử, ta cũng có thể sử dụng ma trận vuông cấp n để biểu diễn quan hệ R. Ma trận này là một ma trận 0-1 (chỉ gồm các phần tử 0 và 1), được ký hiệu và xác định như sau:

$$M(R) = [\,a_{ij}]_{n\times n},\ \text{với}\ \forall x_i, x_j \in X : a_{ij} = \begin{cases} 1 \ \ if \ \ x_i R x_j \\ 0 \ \ if \ \ (x_i, x_j) \notin R(X) \end{cases}$$

Thí dụ 2.2. Trở lại thí dụ 1.6 trong chương 1, xét tập X = {1, 2, 3, 4}.

a/. Ta xác định mối quan hệ L (*Less: nhỏ hơn*)giữa các phần tử của X như sau: với a, b ∈ X, ta nói a có quan hệ L với b, nếu a nhỏ hơn b. Vậy quan hệ L trên X được xác định bởi tập hợp:

L(X) = {(1,2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4) }

Khi đó ta có thể biểu diễn quan hệ "rõ" L trên X bởi ma trận:

$$M(L) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b/. Ta xác định mối quan hệ D (*Divided: chia hết*) giữa các phần tử của X như sau:

- ∀ a, b ∈ X, ta nói a có quan hệ D với b, nếu a chia hết cho b. Vậy quan hệ D trên X được xác định bởi tập:

D(X) = {(2, 1), (3, 1), (4, 1), (4, 2), (1, 1), (2, 2), (3, 3) (4, 4)}

Khi đó ta có thể biểu diễn quan hệ "rõ" D trên X bởi ma trận:

$$M(D) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c/. Xét quan hệ đồng dư theo modulo 2, ký hiệu Mod 2, xác định như sau:

- ∀ a, b ∈ X, ta nói a có quan hệ Mod 2 với b, nếu a và b có cùng số dư khi chia cho 2.

Vậy quan hệ Mod 2 trên X được xác định bởi tập:

Mod 2(X) = {(1, 3), (3, 1), (2, 4), (4, 2), (1, 1), (2, 2), (3, 3) (4, 4)}

Khi đó ta có thể biểu diễn quan hệ "rõ" Mod 2 trên X bởi ma trận:

$$M(\text{Mod } 2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dễ thấy rằng quan hệ Mod 2 trên X là quan hệ phản xạ, điều này tương ứng với ma trận của quan hệ có mọi phần tử trên đường chéo chính bằng 1; hơn hữa đây cũng là quan hệ đối xứng, điều này tương ứng với ma trận của quan hệ là ma trân đối xứng. Tính bắc cầu có thể kiểm tra trực tiếp, hoặc kiểm chứng được rằng M(Mod 2)⊗M(Mod 2) = M(Mod 2). Vậy quan hệ M(Mod 2) là một quan hệ tương đương trên X.

Trong những phần sau, ta có thể dùng các ma trận để biểu diễn cho cả các quan hệ "rõ" và quan hệ mờ, với các quan hệ rõ thì các phần tử của ma trận là thuộc tập $\{0, 1\}$, còn với các quan hệ mờ thì các phần tử của ma trận quan hệ là thuộc miền [0, 1], một lần nữa ta lại thấy các quan hệ mờ là tổng quát hơn các quan hệ cổ điển.

2.1.2 Hợp thành của các quan hệ mờ

Với các quan hệ cổ điển trên ba tập tham chiếu X, Y, Z, nếu có một quan hệ giữa X và Y, và một quan hệ giữa Y và Z sẽ cho phép xác định một quan hệ giữa X và Z, quan hệ thứ ba gọi là hợp thành của hai quan hệ ban đầu. Với các quan hệ mờ cũng vậy, ta có thể xây dựng một quan hệ mờ là hợp thành của hai quan hệ mờ cho trước, khái niệm quan hệ hợp thành mờ là sự mở rộng của khái niệm quan hệ hợp thành cổ điển.

Chẳng hạn, ta có quan hệ mờ R: chiều rộng của sản phẩm là nhỏ hơn nhiều so với chiều dài. Quan hệ này xác định một lớp không chính xác các chiều rộng và chiều dài của các sản phẩm, mà chiều rộng nhỏ hơn nhiều so với chiều dài. Đây là một quan hệ mờ hai ngôi trên tập $X \times Y$ các cặp số thực là chiều rộng, chiều dài của các sản phẩm trong vũ trụ tham chiếu.

Giả sử ta cũng có quan hệ mờ S: chiều dài của sản phẩm là nhỏ hơn chiều cao, đây cũng là một quan hệ mờ hai ngôi xác định trên tập $Y \times Z$ các cặp số thực là chiều dài và chiều cao của các sản phẩm trong vũ trụ tham chiếu đang xét. Như vậy, nếu kết hợp hai quan hệ mờ này, ta sẽ được một quan hệ mờ giữa các chiều rộng và chiều cao của sản phẩm. Phép kết hợp đó gọi là phép hợp thành của hai quan hệ R và S.

Định nghĩa 2.3.

Hợp thành của quan hệ mờ hai ngôi R trên $X \times Y$ với hàm thuộc $f_R(x, y)$ và quan hệ S trên $Y \times Z$ với hàm thuộc $f_S(y, z)$ là một quan hệ mờ trên $X \times Z$, ký hiệu là $R \circ S$ (hoặc đơn giản là RS) và có hàm thuộc được xác định như sau:

$$\forall (x,z) \in X \times Z, \ f_{R \circ S}(x, z) = sup_{y \in Y}\{\min[f_R(x, y); f_S(y, z)]\} \tag{2.3}$$

Một số trường hợp đặc biệt:

- Nếu X,Y, Z là các tập hữu hạn, hàm thuộc của quan hệ hợp thành được xác định như sau:

$$\forall (x,z) \in X \times Z, \ f_{R \circ S}(x, z) = max_{y \in Y}\{\min[f_R(x, y); f_S(y, z)]\} \tag{2.4}$$

- Nếu X = Y = Z, tức là R và S đều là các quan hệ hai ngôi trên X, với X là tập hữu hạn, thì hàm thuộc của quan hệ hợp thành $R \circ S$ được xác định như sau:

$$\forall x, z \in X, \ f_{R \circ S}(x, z) = max_{y \in X}\{\min[f_R(x, y); f_S(y, z)]\} \tag{2.5}$$

- Nếu R và S là cùng một quan hệ hai ngôi trên X, với X là tập hữu hạn, thì hàm thuộc của quan hệ hợp thành $R \circ S$ được xác định đơn giản hơn:

$$\forall x, z \in X, \ f_{R \circ R}(x, z) = max_{y \in X}\{\min[f_R(x, y); f_R(y, z)]\} \tag{2.6}$$

Nếu quan hệ mờ R có ma trận là M(R), quan hệ S có ma trận là M(S) thì ma trận của quan hệ hợp thành $R \circ S$ được ký hiệu và xác định như sau:

$$M(R \circ S) = M(R) \otimes M(S) \tag{2.7}$$

trong đó phép $\otimes$ xác định các phần tử của ma trận quan hệ hợp thành theo công thức (2.4).

Về hình thức, phép nhân $\otimes$ cho hai ma trận quan hệ mờ trong (2.7) cũng được áp dụng tương tự phép nhân hai ma trận thông thường, chỉ cần thay phép tính cộng các số hạng bởi phép lấy 'max' và phép tính tích 2 phần tử thay bởi phép lấy 'min'.

Thí dụ 2.3. Cho quan hệ 2 ngôi R trên $X \times Y$ và quan hệ S trên $Y \times Z$ có các ma trân quan hệ mờ tương ứng là M(R) và M(S) như sau:

$$M(R)=\begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0.8 \\ 0.2 & 1 & 0.5 \\ 0.8 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} \;;\; M(S)=\begin{bmatrix} 0.2 & 1 & 0.4 \\ 0 & 0.6 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Theo công thức (2.7), ta tính được ma trận của quan hệ mờ hợp thành R_oS là:

$$M(R \circ S)=\begin{bmatrix} 0.2 & 1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 & 0.3 \\ 0.2 & 1 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Nhiều khi người ta cần xác định quan hệ hợp thành của R với chính nó, tức là tính R_oR

Thí dụ 2.4. Xét quan hệ mờ hai ngôi R của thí dụ 2.1 được cho bởi ma trận M(R) như sau:

$$M(R)=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} H & L & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0.3 \\ 0.9 & 1 & 0.1 \\ 0.5 & 0.1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ H \\ L \\ D \end{array}$$

Theo công thức (2.7), ta tính được ma trân của quan hệ hợp thành $R \circ R$

$$M(R \circ R)=\begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0.3 \\ 0.9 & 1 & 0.3 \\ 0.5 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Quan hệ R là mức độ tin cậy của đối tượng này trực tiếp với đối tượng khác, còn quan hệ $R \circ R$ có thể được hiểu là mức độ tin cậy của đối tượng này với đối tượng kia, thông qua một đối tượng trung gian.

Chẳng hạn, trong R thì mức độ tin cậy của D đối với L là 0.1, nhưng trong quan hệ R_oR thì mức độ tin cậy của D với L, thông qua các trung gian khác là 0.5, được tính theo công thức (2.6):

f_{R_oR} (D, L) = max{min[f_R(D,H); f_R(H,L)], min[f_R(D,L); f_R(L,L)], min[f_R(D,D); f_R(D,L)]}

= max{min[0.5; 0.9], min[0.1; 1.0)], min[1.0; 0.1]} = 0.5.

2.1.3 Một số tính chất đặc biệt của các quan hệ mờ

Ta nhắc lại một số tính chất của các quan hệ hai ngôi cổ điển (xem định nghĩa 1.1, chương 1):

- *Phản xạ:* Quan hệ R có *tính phản xạ* nếu: $aRa,\ \forall a \in X$
- *Đối xứng:* Quan hệ R có *tính đối xứng* nếu: $aRb \Rightarrow bRa$
- *Bắc cầu:* Quan hệ R có *tính bắc cầu* nếu: *(aRb và bRc)* $\Rightarrow aRc$

Cũng giống như các quan hệ cổ điển, người ta quan tâm đến một số tính chất đặc biệt của các quan hệ mờ hai ngôi. Những tính chất dưới đây là sự mở rộng của các tính chất tương ứng trong các quan hệ cổ điển.

Định nghĩa 2.4.

Một quan hệ mờ hai ngôi R trên U là:

- *Phản xạ* nếu: $\forall x \in U$, $f_R(x, x) = 1$.
- *Đối xứng* nếu: $\forall (x, y) \in U \times U$, $f_R(x, y) = f_R(y, x)$.
- *Bắc cầu max-min* nếu: $\forall$ x, z $\in$ U, $f_R(x, z) \geq max_{y \in U}\{min[f_R(x, y); f_R(y, z)]\}$

Rõ ràng là khi $f_R(x, y)$ chỉ lấy giá trị 0 hoặc 1, thì quan hệ hai ngôi R trở thành quan hệ cổ điển và các tính chất trên trùng với các tính chất tương ứng của các quan hệ cổ điển.

Trong các phần còn lại của chuyên đề này, tính *bắc cầu max-min* của quan hệ mờ cũng được gọi ngắn gọn là tính *bắc cầu,* nếu điều này không gây nhầm lẫn.

Thí dụ 2.5. Xét quan hệ mờ R trên tập 3 sinh viên U = {H, L, D} trong thí dụ 2.1.

Dễ thấy R là phản xạ, nhưng không phải là đối xứng vì ta có $f_R(H, D) = 0.3 \neq f_R(D, H) = 0.5$. Hơn nữa quan hệ này cũng không phải là bắc cầu (max-min).

Thật vậy, ta có $f_R(D, L)=0.1$, điều này không thỏa tính bắc cầu max-min cần có là:

$$f_R(D, L) \geq \max\{ \min[f_R(D, H),f_R(H, L)]; \min[f_R(D, L),f_R(L, L)]; \min[f_R(D, D),f_R(D, L)]\} =$$

$$= max\{min[0.5 ; 0.9]; min[0.1 ; 1.0]; min[1.0 ; 0.1] \} = max\{0.5 ; 0.1 ; 0.1\} = 0.5.$$

Chú ý 2.1.3:

1. Nếu quan hệ R được biểu diễn bằng ma trận quan hệ mờ M(R), thì tính đối xứng của quan hệ sẽ tương ứng với tính đối xứng của ma trận M(R), còn nếu quan hệ R là phản xạ thì ma trận quan hệ mờ tương ứng sẽ có mọi phần tử trên đường chéo chính đều bằng 1.

2. Để kiểm tra tính bắc cầu max-min của quan hệ R, ta tính ma trận của quan hệ hợp thành RoR, nếu mọi phần tử của M(R) đều không nhỏ hơn phần tử tương ứng của M(RₒR) thì quan hệ R là bắc cầu max-min; ngược lại, nếu có dù chỉ một phần tử của M(R) nhỏ hơn phần tử tương ứng của M(RₒR), thì khi đó tính chất bắc cầu max-min bị phá vỡ. Nói chung nếu có M(RₒR) = M(R) thì quan hệ mờ đang xét là bắc cầu max-min

Thí dụ 2.6.

a/. Xét quan hệ mờ hai ngôi R trong thí dụ 2.1, có ma trận quan hệ mờ là M(R) = $\begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0.3 \\ 0.9 & 1 & 0.1 \\ 0.5 & 0.1 & 1 \end{bmatrix}$,

mặt khác ở thí dụ 3.3 ta đã tính được M(RoR) = $\begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0.3 \\ 0.9 & 1 & 0.3 \\ 0.5 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$, R không phải là quan hệ bắc cầu.

b/. Xét quan hệ mờ hai ngôi S trên U, với ma trận quan hệ mờ là M(S) = $\begin{bmatrix} 0.2 & 1 & 0.4 \\ 0 & 0.6 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0.3 \end{bmatrix}$, ta tính được ma trận M(S₀S) = $\begin{bmatrix} 0.2 & 0.6 & 0.3 \\ 0 & 0.6 & 0.3 \\ 0 & 0.6 & 0.3 \end{bmatrix}$, vậy S là quan hệ mờ hai ngôi bắc cầu max-min, tuy nhiên S không phải là quan hệ đối xứng và phản xạ.

2.2 QUAN HỆ TƯƠNG TỰ

Để biểu diễn ý tưởng của sự gần nhau, sự giống nhau của các đối tượng, ta dùng các quan hệ mờ đặc biệt thỏa mãn cả ba tính chất: phản xạ, đối xứng và bắc cầu được gọi là quan hệ tương tự. Quan hệ tương tự là sự mở rộng của quan hệ tương đương cổ điển, có vai trò rất lớn trong việc xây dựng mô hình CSDL quan hệ mờ, mà ta sẽ nghiên cứu ở chương sau.

2.2.1 Định nghĩa quan hệ tương tự

Một quan hệ mờ hai ngôi trên U là quan hệ tương tự nếu nó thỏa cả ba tính chất: phản xạ, đối xứng và bắc cầu max-min. Quan hệ tương tự thường được ký hiệu là S (*similarity relation*), và có thể định nghĩa một cách hình thức như sau:

Định nghĩa 2.5

Một quan hệ tương tự trên tập U là một ánh xạ S: U×U→ [0, 1], có các tính chất sau:

(i) $\forall$ $x \in U$, S(x, x) = 1, (tính phản xạ: reflexivity)

(ii) $\forall$ $x, y \in U$, S(x, y) = S(y, x), (tính đối xứng: symmetry)

(iii) $\forall$ $x, y, z \in U$, $S(x, z) \geq max_{y \in U}\{min[S(x, y), S(y, z)]\}$,

(tính bắc cầu max-min: max-min transitivity).

Chú ý rằng, ánh xạ *S: U×U→ [0, 1]* ở đây có vai trò như là hàm thuộc f_R *:U×U→ [0, 1]* trong định nghĩa 2.1 , vì vậy $\forall$ x, y $\in$ U, S(x, y) cũng xác định một tập con mờ trên U×U.

Thí dụ 2.7 Cho miền trị D gồm các giá trị D = {*a, b, c, d*}, ta xác định một quan hệ S trên D như sau:

S	a	b	c	d
a	1	0.8	0	0
b	0.8	1	0	0
c	0	0	1	0.7
d	0	0	0.7	1

Hình 2.1 Quan hệ S trên miền trị D

Ta kiểm tra các tính chất trong định nghĩa 2.5 với quan hệ S:

(i) Với a, b, c, d $\in$ D, ta có S(a, a) = S(b, b) = S(c, c) = S(d, d) = 1, vậy S là phản xạ.

(ii) Với mọi cặp giá trị *x, y* trong D, ta đều có S(x, y) = S(y, x), chẳng hạn S(a, b) = S(b, a) = 0.8, vậy tính chất (ii) thỏa mãn, do đó S là quan hệ đối xứng. Ngoài ra, tính đối xứng của quan hệ S có thể kiểm tra bằng cách xem ma trận quan hệ mờ M(S) có phải là ma trận đối xứng hay không.

(iii) Để kiểm tra tính phản xạ, ta cần kiểm tra điều kiện (iii) phải thỏa mãn với mọi bộ 3 giá trị a, b, c $\in$ D. Theo chú ý 2.1.3, có thể thực hiện việc kiểm tra này bằng việc tính ma trận M(S$\circ$S).

$$M(S \circ S) = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0.8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0.7 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0.8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0.7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0.8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0.7 & 1 \end{bmatrix} = M(S).$$

Ta có M(S$\circ$S) = M(S), vậy theo chú ý 2.1.3, S là một quan hệ bắc cầu max-min. Do các tính chất trên, S là một quan hệ tương tự trên D.

Thí dụ 2.8 Cho miền trị C (Color) gồm các màu Blue, Green và Red, C = {B, G, R}, ta có một quan hệ mờ hai ngôi S trên C chỉ mức độ giống nhau giữa các màu như sau (hình 2.2):

S	B	G	R
Blue (B)	1	0.7	0
Green (G)	0.7	1	0
Red(R)	0	0	1

Hình 2.2 Quan hệ S trên miền trị C

Từ ma trận quan hệ mờ M(S), ta thấy ngay rằng S là quan hệ phản xạ, đối xứng. Ta tính được ma trận quan hệ hợp thành của S với chính nó là

$$M(S \circ S) = \begin{bmatrix} 1 & 0.7 & 0 \\ 0.7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0.7 & 0 \\ 0.7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.7 & 0 \\ 0.7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ = M(S), vậy S là quan hệ bắc cầu max-min. Do các tính chất trên, S là quan hệ tương tự trên miền C.

2.2.2 Quan hệ mức α liên kết với quan hệ mờ

Ta đã biết rằng, về bản chất, một quan hệ mờ hai ngôi trên U là một tập con mờ của tích Descartes U×U. Như vậy, tất cả những tính chất và định nghĩa liên quan đến tập con mờ đều có thể áp dụng được cho các quan hệ mờ. Chẳng hạn, có thể định nghĩa chiều cao, giá đỡ, hạt nhân và nhát cắt mức α của một quan hệ mờ tương tự như với các tập con mờ, trong đó nhát cắt mức α của một quan hệ mờ là một khái niệm quan trọng và có nhiều ứng dụng trong việc phân tích và xử lý thông tin.

Một quan hệ mờ hai ngôi R trên U là một tập con mờ của tích Descartes U×U, với hàm thuộc $f_R : U \times U \to [0, 1]$. Nhát cắt mức α của tập con mờ này sẽ cho ta tất cả những cặp $(x, y) \in U \times U$ mà $f_R(x, y) \geq \alpha$, như vậy nhát cắt mức α này sẽ xác định một tập con 'rõ' của tích Descartes U×U, tức là xác định một quan hệ 'rõ' hai ngôi trên U, gọi là quan hệ mức α liên kết với quan hệ mờ R. Ta có định nghĩa:

Định nghĩa 2.5

Cho quan hệ mờ R trên U với hàm thuộc $f_R : U \times U \to [0, 1]$, và một ngưỡng $\alpha \in [0, 1]$. Một quan hệ mức α liên kết với quan hệ R là một quan hệ được ký hiệu là R_α và được xác định như sau:

$\forall x, y \in U$, ta nói x có quan hệ R_α với y, ký hiệu $xR_\alpha y$ hay $(x, y) \in R_\alpha(U)$, khi và chỉ khi $f_R(x, y) \geq \alpha$

Như vậy, với mỗi quan hệ mờ R trên U, sẽ có nhiều quan hệ với các mức α khác nhau liên kết với R, và đều là các quan hệ 'rõ' trên U.

Thí dụ 2.9 Xét quan hệ mờ hai ngôi R trên U = {H, L, D} trong thí dụ 2.1, cho bởi bảng :

R	*H*	*L*	*D*
H	1	0.9	0.3
L	0.9	1	0.1
D	0.5	0.1	1

Với mức α = 0.8, ta có quan hệ $R_{0.8}$ gồm các cặp sau: (H, H), (H, L), (L, H), (L, L), (D, D), những cặp khác coi như không có liên hệ với nhau (vì mức độ quan hệ dưới ngưỡng cho trước). Ký hiệu đầy đủ cho quan hệ này là (xem mục 1.1.4, chương 1) :

$$R_{0.8}(U) = \{(H, H), (H, L), (L, H), (L, L), (D, D)\}$$

Đây là một quan hệ hoàn toàn 'rõ' trên U, cũng có thể biểu diễn quan hệ $R_{0.8}$ dưới dạng bảng:

$R_{0.8}$	*H*	*L*	*D*
H	1	1	0
L	1	1	0
D	0	0	1

hoặc cho bởi ma trận quan hệ:

$$M(R_{0.8}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tương tự, ta có ma trận của các quan hệ mức α = 0.5 và α = 0.3 liên kết với quan hệ mờ R:

$$M(R_{0.5}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad M(R_{0.3}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Chú ý rằng ma trận của một quan hệ hai ngôi R với các phần tử chỉ nhận giá trị 0 hoặc 1 (tương ứng với hàm thuộc chỉ nhận giá trị 0 hoặc 1) thì R là quan hệ 'rõ', nếu các phần tử của ma trận nhận mọi giá trị trong miền [0, 1] thì R là quan hệ mờ.

Có thể chứng minh được các tính chất quan trọng của các quan hệ mức α: (SV tự chứng minh)

Tính chất 2.1

Cho quan hệ mờ R trên U, quan hệ R là phản xạ khi và chỉ khi với mọi $\alpha \in [0, 1]$ thì quan hệ mức α liên kết với R, là quan hệ phản xạ.

Tính chất 2.2

Cho quan hệ mờ R trên U, quan hệ R là đối xứng khi và chỉ khi với mọi $\alpha \in [0, 1]$ thì quan hệ mức α liên kết với R là quan hệ đối xứng.

Tính chất 2.3

Cho quan hệ mờ R trên U, quan hệ R là bắc cầu max-min khi và chỉ khi với mọi $\alpha \in [0, 1]$ thì quan hệ mức α liên kết với R là quan hệ bắc cầu.

2.2.3 Phân hoạch liên kết với quan hệ tương tự

Cho một quan hệ tương tự S trên miền tham chiếu U, ta xét các quan hệ mức α liên kết với quan hệ S. Do quan hệ mờ S là một quan hệ phản xạ, đối xứng và bắc cầu max-min, cho nên theo các tính chất 2.1, 2.2 và 2.3 trên đây, ta suy ra mọi quan hệ mức *α của quan hệ tương tự S cũng là* quan hệ phản xạ, đối xứng và bắc cầu. Vậy ta có bổ đề sau:

Bổ đề 2.1

Nếu S là một quan hệ tương tự trên U, thì với mọi $\alpha \in [0, 1]$, mọi quan hệ mức α liên kết với S là quan hệ tương đương trên U.

Bổ đề trên cho phép ta sử dụng các quan hệ tương đương S_α (là các quan hệ mức α liên kết với quan hệ tương tự S) để phân lớp các đối tượng của vũ trụ tham chiếu U, điều này là rất quan trọng trong việc xử lý thông tin, thu nhận tri thức từ dữ liệu thực tế.

Mỗi quan hệ tương đương cổ điển cho phép phân hoạch một tập hợp thành các lớp tương đương, túc là người ta nhóm những phần tử thỏa mãn một quan hệ tương đương thành một lớp, tất cả những phần tử trong cùng một lớp là tương đương với nhau theo quan hệ tương đương này.

Đối với quan hệ tương tự S, mỗi quan hệ mức α liên kết với S là S_α, là một quan hệ tương đương. Dùng quan hệ tương đương S_α để phân lớp vũ trụ tham chiếu U, ta sẽ được các lớp mà mỗi lớp chứa các phần tử tương đương nhau ở mức α, (thực chất là tương tự nhau, gần giống nhau trong mối quan hệ mờ S). Nếu ta xét chính quan hệ mờ S, tức là chấp nhận mọi sự tương tự (với mức độ chỉ cần ≥ 0), thì tất cả mọi phần tử của U thỏa mãn quan hệ này (với những cấp độ khác nhau), và ta không thể phân lớp được U, tức là tất cả mọi phần tử của U thuộc vào một lớp.

Nếu ta tăng dần mức α, tức là tăng yêu cầu về độ liên hệ giữa các phần tử, U sẽ có sự phân lớp rõ ràng hơn, và mức α càng cao thì càng có ít phần tử trong cùng một lớp thỏa mãn quan hệ R_α, tức là mức α càng cao thì U càng được phân thành nhiều lớp, tức là α càng cao thì U càng được phân lớp "mịn" hơn, và các lớp ở mức cao hơn sẽ bị bao hàm trong các lớp ở mức thấp hơn.

Ta sẽ xét một thí dụ cụ thể sau đây.

Thí dụ 2.10 Cho S là một quan hệ tương tự trên miền trị C (Color) gồm các màu Blue, Green và Red, hay C = {B, G, R}. (việc chứng minh S là quan hệ tương tự xem thí dụ 2.8)

S	B	G	R
Blue (B)	1	0.7	0
Green (G)	0.7	1	0
Red(R)	0	0	1

Hình 2.3 Quan hệ tương tự S trên miền trị C

Xét quan hệ S_α liên kết với S, với $\alpha = 0.7$, khi đó có ma trận của quan hệ $S_{0.7}$ được cho trong hình 2.4. Các lớp tương đương theo quan hệ $S_{0.7}$ là: {B, G}và {R}, tức là ta có thể coi màu Xanh nước biển (Blue) và màu Xanh lá cây là thuộc cùng một lớp, với mức độ tương đương là 0.7), còn lớp kia là màu Đỏ (Red). Các tập {B, G}và {R} là một phân hoạch của tập C theo quan hệ $S_{0.7}$.

$S_{0.7}$	B	G	R
Blue (B)	1	1	0
Green (G)	1	1	0
Red(R)	0	0	1

Hình 2.4 Quan hệ $S_{0.7}$ trên miền trị C

Nếu lấy mức $\alpha = 1.0$ thì ma trận của quan hệ $S_{1.0}$ là

$S_{1.0}$	B	G	R
Blue (B)	1	0	0
Green (G)	0	1	0
Red(R)	0	0	1

Hình 2.5 Quan hệ $S_{1.0}$ trên miền trị C

Mỗi màu chỉ tương đương với chính nó, mỗi lớp tương đương chỉ gồm một màu, các tập {B}, {G} và {R}là một phân hoạch của tập C.

Nếu lấy mức $\alpha = 0$ thì tất cả các màu đều coi là tương đương với nhau (với mức độ bằng 0), tất cả các giá trị trong ma trận đều bằng 1. Và tất cả tập C là thuộc cùng một lớp tương đương, tức là không thể phân lớp được tập C.

Có thể xét một thí dụ phức tạp hơn về các phân hoạch liên kết với quan hệ tương tự:

Thí dụ 2.11 Cho tập tham chiếu U = {a, b, c, d}và một quan hệ mờ R hai ngôi trên U với hàm thuộc cho bởi bảng sau:

R	a	b	c	d
a	1	0.3	0.9	0.5
b	0.3	1	0.3	0.3
c	0.9	0.3	1	0.5
d	0.5	0.3	0.5	1

Hình 2.6 Quan hệ R trên miền trị U

Từ ma trận quan hệ mờ M(R), dễ nhận thấy quan hệ R là phản xạ và đối xứng (xem chú ý 2.1.3). Để kiểm tra tính bắc cầu max-min, ta tính ma trận của quan hệ hợp thành $M(R_oR)$:

$$M(R_oR) = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.9 & 0.5 \\ 0.3 & 1 & 0.3 & 0.3 \\ 0.9 & 0.3 & 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0.3 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.9 & 0.5 \\ 0.3 & 1 & 0.3 & 0.3 \\ 0.9 & 0.3 & 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0.3 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.9 & 0.5 \\ 0.3 & 1 & 0.3 & 0.3 \\ 0.9 & 0.3 & 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0.3 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} = M(R)$$

Như vậy, R là bắc cầu max-min. Quan hệ mờ R là quan hệ tương tự trên U.

Ta có thể tính các quan hệ R_α với các mức α khác nhau. Với $\alpha = 0.3$ (mức tương tự nhỏ nhất giữa các phần tử) thì tất cả các cặp phần tử đều có quan hệ với nhau với mức độ lớn hơn hoặc bằng mức này, tức là $\forall\ x, y \in U$ thì $xR_{0.3}y$, vậy ta có :

$$M(R_{0.3}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_{0.3}$ chỉ xác định 1 lớp tương đương trên U, đó là {a, b, c, d}, gọi là một phân hoạch của U, ứng với $R_{0.3.}$

$$M(R_{0.5}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Quan hệ $R_{0.5}$ chia U thành 2 lớp tương đương là {a, c, d} và {b} là một phân hoạch của U.

$$M(R_{0.9}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quan hệ $R_{0.9}$ chia U thành 3 lớp tương đương là {a, c}, {d} và {b}, là một phân hoạch của U.

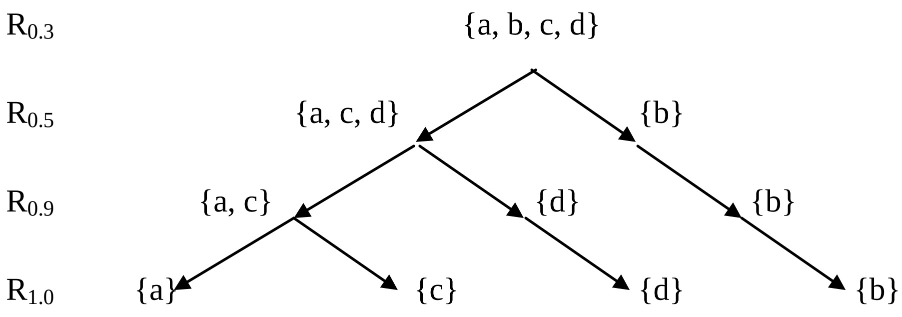
Cuối cùng, nếu lấy mức $\alpha = 1$, thì mọi phần tử chỉ có quan hệ với chính nó, ma trận quan hệ là:

$$M(R_{1.0}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Có 4 lớp tương đương theo quan hệ $R_{1.0}$ là {a}, {c}, {d} và {b}.

Như vậy, với mỗi mức α, các quan hệ R_α sẽ xác định một phân hoạch của U, các phân hoạch này được gọi là các phân hoạch liên kết với quan hệ tương tự R.

Có thể biểu diễn các phân hoạch liên kết với quan hệ tương tự R bằng "cây phân hoạch" như sau:



Hình 2.7 Cây phân hoạch liên kết với quan hệ tương tự R

Từ cây phân hoạch trên, có thể thấy rằng với ngưỡng α càng cao thì phân hoạch của U càng "mịn". Chẳng hạn, với $\alpha = 0.3$ thì ta không thể phân hoạch được U thành các lớp nhỏ hơn, với $\alpha = 0.5$ thì U được phân hoạch thành 2 lớp, một lớp là {a, c, d}, lớp còn lại là {b}, với $\alpha = 0.9$ thì lớp {a, c, d} lại được phân mịn hơn thành {a, c} và {d}, tức là U được phân hoạch thành {a, c}, {d} và {b}, khi $\alpha = 1.0$ thì U phân hoạch thành.{a}, {c}, {d}và{b}, là phân hoạch mịn nhất.

2.3 CÁC ĐẠI LƯỢNG MỜ

Trong các ứng dụng, một tỷ lệ lớn các tập con mờ biểu diễn các tính chất của các đối tượng là các biến nhận giá trị trên các tập số thực **R**. Chẳng hạn tính chất đối tượng nghiên cứu là khoảng cách, nhiệt độ, giá cả…đó là các biến nhận các giá trị thực, tuy nhiên, vì nhiều lý do, ta không xác định được các gía trị chính xác của các biến này, mà phải đặc trương bằng các tập con mờ trên vũ trụ tham chiếu là tập số thực. Những tập con mờ đó được gọi chung là các đại lượng mờ, trong đó có cả những số mờ, đó là các tập con mờ lồi được chuẩn hóa trên vũ trụ tham chiếu là tập số thực, mà ta đã định nghĩa ở chương trước. Trong phần này, ta tiếp tục bổ sung thêm một số khái niệm liên quan đến các đại lượng mờ, các số mờ, một vài kiểu số mờ thông dụng và các phép toán số học mờ trên các số mờ.

2.3.1 Đại lượng mờ và số mờ

Có nhiều định nghĩa cho các đại lượng mờ, khoảng mờ và số mờ. Ở đây ta đưa ra một số định nghĩa đơn giản nhất, và phù hợp với hầu hết các định nghĩa đã có.

Định nghĩa 2.6

- *Một đại lượng mờ Q là một tập con mờ được chuẩn hóa trên tập số thực **R**.*
- *Một giá trị "lõi" (core) của Q là một phần tử $m \in R$ sao cho $f_Q(m) = 1$, với f_Q là hàm thuộc của tập con mờ Q.*

Như vậy, một đại lượng mờ Q được xác định bởi hàm thuộc $f_Q : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$. Rõ ràng là Q có thể có nhiều giá trị lõi, đó là tất cả những giá trị của **R** mà thực sự thuộc Q, tức là hàm thuộc của Q tại những giá trị này là bằng 1. Như vậy, nếu Q là một đại lượng mờ trên **R** thì Ker(Q) là tập tất cả những giá trị "lõi" của Q.

Đại lượng mờ Q có thể liên kết với một biến nhận giá trị "vào khoảng m" hay "xấp xỉ giữa v và w" thì khi đó đại lượng mờ Q được coi như một "số mờ" hoặc "khoảng mờ", tương ứng với giá trị lõi của Q là duy nhất m hoặc mọi số thực u nằm trong khoảng [v, w]. Như vậy "khoảng mờ" hay "số mờ" cũng là để đặc trưng cho các giá trị không được biết một cách chính xác, do vậy, về bản chất thì khoảng mờ cũng có thể coi là số mờ, chúng đều là các tập mờ *lồi* và được *chuẩn hóa* trên vũ trụ tham chiếu là tập số thực **R**, đó là hai đặc trưng quan trọng nhất của số mờ hay khoảng mờ. Định nghĩa dưới đây có phân biệt hai khái niệm này, tuy nhiên, có nhiều tài liệu không phân biệt khoảng mờ và số mờ, vì vậy khi không cần phân biệt, ta gọi chung các tập mờ *lồi* và được *chuẩn hóa* trên vũ trụ tham chiếu là tập số thực **R** là số mờ.

Định nghĩa 2.7

- *Một khoảng mờ I là một đại lượng mờ lồi trên **R**.*
- *Một số mờ M là một khoảng mờ mà trên đó chỉ có duy nhất một giá trị lõi.*

Như vậy, từ định nghĩa 2.6 và 2.7 ta thấy khoảng mờ được định nghĩa là một tập con mờ lồi và chuẩn hóa trên tập số thực R, trùng với định nghĩa số mờ đã đưa ra trong chương 1, còn số mờ ở đây là một khoảng mờ đặc biệt, chỉ có duy nhất một giá trị lõi, tức là một trường hợp riêng của định nghĩa số mờ trong chương 1.

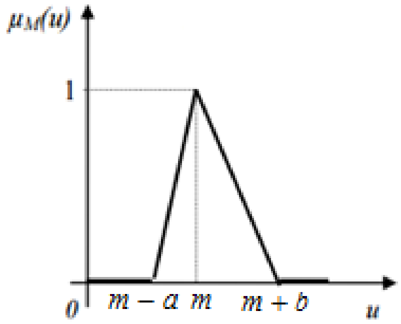
2.3.2 Các số mờ và khoảng mờ kiểu L-R

Có nhiều kiểu số mờ và khoảng mờ được định nghĩa, ở đây ta chỉ trình bày một kiểu số mờ và khoảng mờ thông dụng nhất, đó là các số mờ và khoảng mờ kiểu L-R với các hàm thuộc tuyến tính, các số mờ và khoảng mờ trong trường hợp này còn gọi là số mờ tam giác và số mờ hình thang.

Định nghĩa 2.8

Một số mờ M kiểu L-R là một bộ ba M = (m, a, b) trong đó m là giá trị lõi của M, a là "độ trải trái" (Left spread), b là "độ trải phải" (Right spread) của M, với a, b > 0; hàm thuộc của M được xác định như sau:

$$\mu_M(u) = \begin{cases} 0, & if\ u \le m-a; or\ u \ge m+b \\ 1+\dfrac{u-m}{a}, & if\ m-a < u < m \\ 1+\dfrac{m-u}{b}, & if\ m < u < m+b \\ 1, & if\ u = m \end{cases}$$



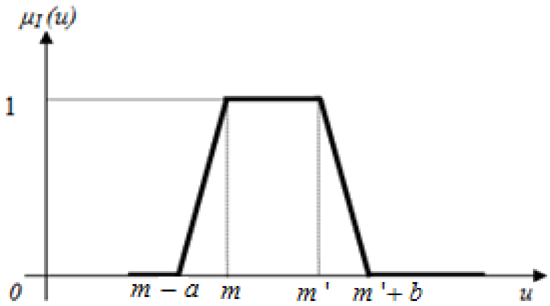
Đồ thị

- Số mờ L-R với hàm thộc như trên còn gọi là số mờ "tam giác"

Định nghĩa 2.9

Một khoảng mờ I kiểu L-R là một bộ bốn I = (m, m', a, b) trong đó m và m' 2 là giá trị lõi nhỏ nhất và lớn nhất của I, a là "độ trải trái" (Left spread), b là "độ trải phải" (Right spread) của I, với a, b > 0; hàm thuộc của I được xác định như sau:

$$\mu_I(u) = \begin{cases} 0 & if\ u \le m-a; or\ u \ge m'+b \\ 1+\dfrac{u-m}{a}, & if\ m-a < u < m \\ 1+\dfrac{m'-u}{b}, & if\ m' < u < m'+b \\ 1 & if\ m \le u \le m' \end{cases}$$



Đồ thị

- Khoảng mờ L-R với hàm thuộc như trên còn gọi là số mờ hình thang.

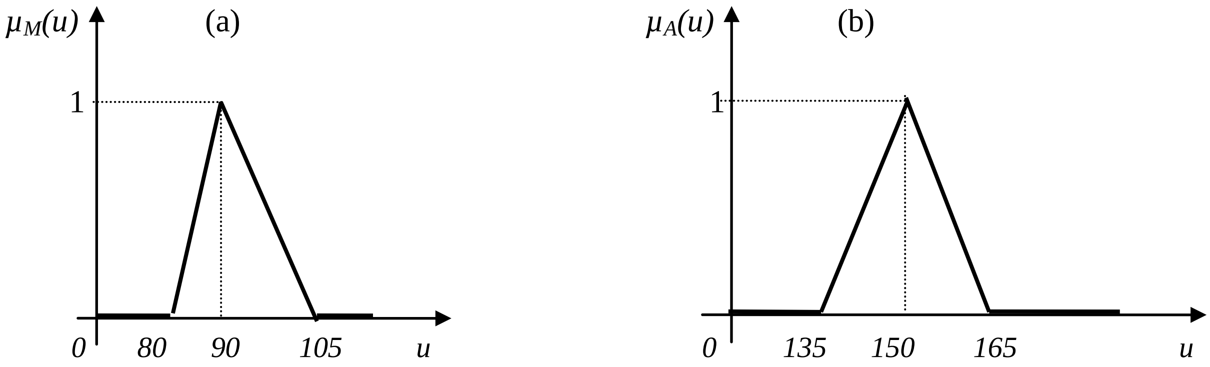
Chú ý

1. Do khoảng mờ là một tập mờ lồi chuẩn hóa, nên mọi giá trị trong khoảng [m, m'] đều là giá trị lõi của khoảng mờ I, tức là Ker(I) = [m, m']. Khi m = m' thì khoảng mờ I chỉ chứa 1 giá trị lõi, và I là một số mờ tam giác.

2. Người ta có thể cho số mờ tam giác bằng việc cho sai số của M theo tỷ lệ, chẳng hạn có thể cho số mờ M = m ± k%, là tương đương với cho M = (m, m*k%, m*k%), trong đó độ trải trái và độ trải phải là bằng nhau: a = b = m*k%.

Thí dụ 2.9

1. Cho số mờ yam giác M = (90, 10, 15) , ta có biểu diễn hình học của số mờ này là tập mờ tam giác trong hình 2.8 (a). Ở đây M được hiểu là một giá trị không biết chính xác: "vào khoảng 90".



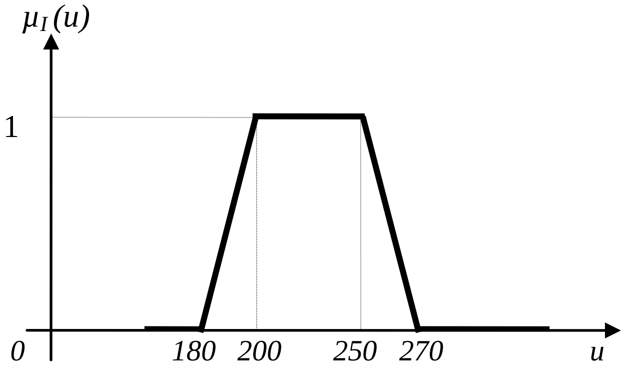
Hình 2.8 (a). Số mờ M và (b). số mờ N.

Hàm thuộc của số mờ M là:

$$\mu_M(u)=\begin{cases}0 & if\ u\le 80;or\ u\ge 105\\ 1+\dfrac{u-90}{10}, & if\ 80<u<90\\ 1+\dfrac{90-u}{15}, & if\ 90<u<105\\ 1 & if\ u=90\end{cases}=\begin{cases}0 & if\ u\le 80\,or\,u\ge 105\\ \dfrac{u-80}{10} & if\ 80<u<90\\ \dfrac{105-u}{15} & if\ 80<u<90\\ 1 & if\ u=90\end{cases}$$

2. Hình 2.8 (b) là biểu diễn của số mờ N = 150 $\pm$ 10%, là một giá trị "khoảng chừng 150"

3. Một khoảng mờ I = $(200, 250, 20, 20)_{L\text{-}R}$ là một tập mờ hình thang với hàm thuộc có đồ thị như sau:



Hình 2.9 Tập mờ hình thang I xem như một khoảng mờ

Hàm thuộc của khoảng mờ I là:

$$\mu_I(u)=\begin{cases}0 & if\ u\le 180\,or\,u\ge 270\\ 1+\dfrac{u-200}{20} & if\ 180<u<200\\ 1+\dfrac{250-u}{20} & if\ 250<u<270\\ 1 & if\ \ 200\le u\le 250\end{cases}$$ hay là : $$\mu_I(u)=\begin{cases}0 & if\ u\le 180;or\ u\ge 270\\ \dfrac{u-180}{20}, & if\ 180<u<200\\ \dfrac{270-u}{20}, & if\ 250<u<270\\ 1 & if\ 200\le u\le 250\end{cases}$$

Khoảng mờ này đặc trưng cho một giá trị không biết chính xác: "khoảng chừng giữa 200 và 250" cho nên thực chất thì khoảng mờ cũng được coi như số mờ. Trong chuyên đề này, chúng ta sẽ dùng khái niệm "số mờ" để chỉ cả số mờ và khoảng mờ, nếu không cần phân biệt.

2.3.3 Các phép toán số học mờ trên các số mờ kiểu L-R

Ta chỉ xét một số phép toán số học mờ đơn giản nhất trên các số mờ kiểu L-R, đó là lấy đối của số mờ, phép cộng hai số mờ và phép trừ hai số mờ… Với những phép toán số học khác thì có thể không bảo đảm cho kết quả là một số mờ, ta không trình bày trong phần này.

Định nghĩa 2.10

Cho hai số mờ kiểu L-R: $M = (m, a, b)_{L\text{-}R}$ *và* $N = (n, c, d)_{L\text{-}R}$ *, khi đó ta có các phép toán mờ:*

- *Số đối mờ của M là một số mờ kiểu L-R, được ký hiệu và xác định như sau:*

  $$-M = (-m, b, a)_{L\text{-}R}.$$

- *Tổng mờ của M và N là một số mờ kiểu L-R, được ký hiệu và xác định như sau:*

  $$M \oplus N = (m+n, a+c, b+d)_{L\text{-}R}$$

- *Hiệu mờ của M và N là một số mờ kiểu L-R, được ký hiệu và xác định như sau:*

  $$M \,\Theta\, N = M \oplus (-N) = (m-n, a+d, b+c)_{L\text{-}R}$$

- $M \otimes N = (m.n, mc+na, md+n\,b)_{L\text{-}R}$
- *Nghịch đảo của số mờ* $M = (m, a, b)_{L\text{-}R}$ *, với* $m \neq 0$*, là số mờ được ký hiệu và xác định như sau:* $\frac{1}{M} = (\frac{1}{m}, \frac{b}{m^2}, \frac{a}{m^2})$
- *Thương của hai số mờ* $M = (m, a, b)_{L\text{-}R}$ *, và* $N = (n, c, d)_{L\text{-}R}$ *, với* $n \neq 0$*, là số mờ được ký hiệu và xác định như sau:* $\frac{M}{N} = (\frac{m}{n}, \frac{md+na}{n^2}, \frac{md+na}{n^2})$

Thí dụ 2.10 Xét các số mờ trong thí dụ 2.9 với $M = (90, 10, 15)_{L\text{-}R}$ và $N = (150, 15, 15)_{L\text{-}R}$

1. Ta có $-M = (-90, 15, 10)_{L\text{-}R}$,
2. Ta có $M \oplus N = (240, 25, 30)_{L\text{-}R}$,
3. Ta có $N \,\Theta\, M = (60, 25, 30)_{L\text{-}R}$,
4. $M \otimes N = (13500, 2850, 3600)_{L\text{-}R}$

Chú ý :

1. Đối với phép nhân 2 số mờ, cần đảm bảo rằng khi M và N có tất cả các giá trị được chứa trong $\mathbf{R}^+$, đồng thời a và b là khá bé so với m. còn c và d là khá bé so với n. Nói chung những điều kiện này trong thực tế thường thỏa mãn

2. *Có thể thực hiện việc nhân một số mờ* $M = (m, a, b)_{L\text{-}R}$ *với một số thực rõ* $k \in \mathbf{R}$*:*

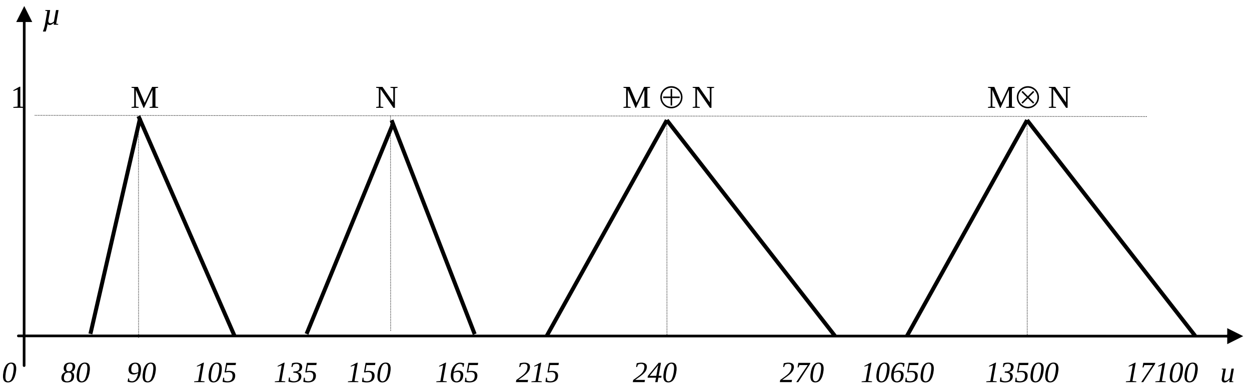
$k > 0$:	$k.M = (km, ka, kb)_{L\text{-}R}$
$k < 0$:	$k.M = (km, -kb, -ka)_{L\text{-}R}$
$k = 0$:	$0.M = 0$ *(số không rõ)*

Chẳng hạn, với các số mờ trong thí dụ 2.10, ta có:

$2M = (180, 20, 30)_{L\text{-}R}$

$\frac{M}{2} = (45, 5, 7.5)_{L\text{-}R}$

Một số kết quả trong thí dụ trên được minh họa như sau:



Hình 2.10 Các số mờ M, N, M⊕N và M⊗N trong thí dụ 2.10

Các phép toán trên cũng áp dụng tương tự cho các khoảng mờ, ta có định nghĩa sau:

Định nghĩa 2.10

Cho hai khoảng mờ kiểu L-R: $I = (m, m', a, b)_{L\text{-}R}$ và $J = (n, n', c, d)_{L\text{-}R}$, khi đó ta có các phép toán mờ:

- *Khoảng đối mờ của I là một khoảng mờ kiểu L-R, được ký hiệu và xác định như sau:*

  $$- I = (-m', -m, b, a)_{L\text{-}R}.$$

- *Tổng mờ của I và J là một khoảng mờ kiểu L-R, được ký hiệu và xác định như sau:*

  $$I \oplus J = (m+n, m'+n', a+c, b+d)_{L\text{-}R}$$

- *Hiệu mờ của I và J là một khoảng mờ kiểu L-R, được ký hiệu và xác định như sau:*

  $$I \ominus J = (m-n', m'-n, a+d, b+c)_{L\text{-}R}$$

- *Tích mờ của I và J là một khoảng mờ kiểu L-R, được ký hiệu và xác định như sau:*

  $$I \otimes J = (mn, m'n', mc+na, m'd+n' b)_{L\text{-}R}$$

Chú ý :

1. Đối với phép nhân 2 khoảng mờ, cần đảm bảo rằng khi I và J có tất cả các giá trị được chứa trong $\mathbf{R}^+$, đồng thời a và b là khá bé so với m. còn c và d là khá bé so với n. Nói chung những điều kiện này trong thực tế thường thỏa mãn.
2. Có thể thực hiện việc nhân một *khoảng mờ $I = (m, m', a, b)_{L\text{-}R}$ với một số thực rõ $k \in$* $\mathbf{R}$:

   $k > 0$: $\quad k.I = (km, km', ka, kb)_{L\text{-}R}$

   $k < 0$: $\quad k.I = (km', km, -kb, -ka)_{L\text{-}R}$

   $k = 0$: $\quad 0.I = 0$ *(số không rõ)*

Các bạn sinh viên có thể tự tìm những thí dụ cho các phép toán số học mờ trên các khoảng mờ.

2.4 CÁC QUAN HỆ MỜ MỘT NGÔI

Một loại quan hệ mờ được sử dụng khá nhiều trong việc biểu diễn các thông tin không chính xác, đó là các quan hệ mờ một ngôi. Quan hệ mờ một ngôi trên U là trường hợp riêng của các quan hệ mờ hai ngôi trên U, mà trong đó, ta cố định một phần tử Y của U, và xét mức độ mà các phần tử khác của U có liên hệ với phần tử Y. Các quan hệ mờ một ngôi đóng vai trò như là các toán tử mờ tác động vào các giá trị "rõ" và cho kết quả là một đại lượng mờ. Các đại lượng mờ còn có thể được xác định bằng các quan hệ mờ một ngôi, mà dưới đây ta sẽ giới thiệu một số quan hệ thường gặp trong các biểu thức số học mờ hoặc biểu thức logic mờ và có nhiều ứng dụng trong việc xử lý các thông tin không chính xác và không đầy đủ.

2.3.1 Quan hệ mờ "*close to*"

Với Y là một giá trị cho trước trên miền tham chiếu U, những phần tử *u* thuộc U có giá trị "xấp xỉ với Y", "gần với Y" (close to Y), "vào khoảng Y" (around Y) được gọi là thuộc quan hệ *"close to Y"*. Hiển nhiên Y là chắc chắn thuộc quan hệ *"close to Y"*, và những phần tử u càng xa Y thì mức độ thuộc về quan hệ này càng giảm. Như vậy, quan hệ mờ "close to" có thể được xem như một tập con mờ trên U, và được định nghĩa hình thức như sau:

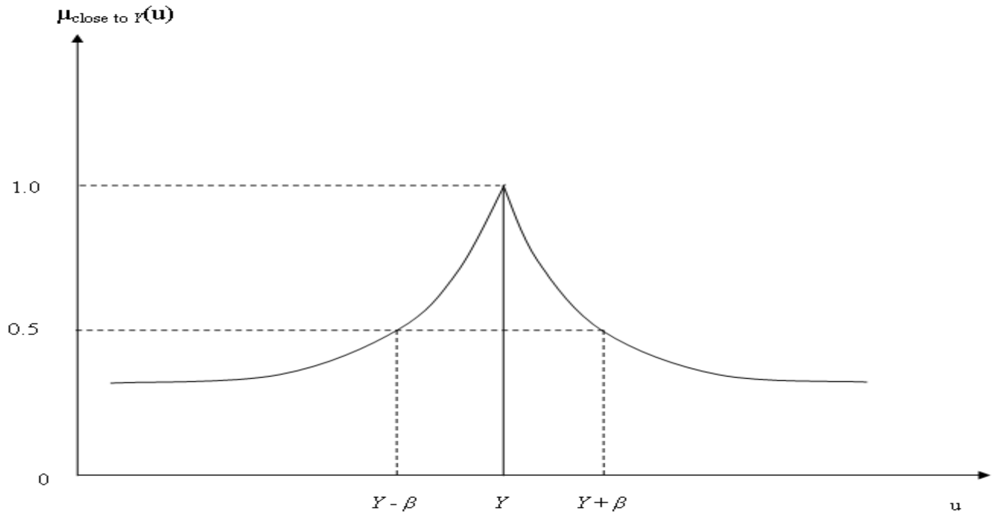
Định nghĩa 2.6

Cho U là tập các số thực, với Y thuộc U, quan hệ mờ 'close to Y" trên U là một tập con mờ trên U, xác định bởi hàm thuộc $\mu_{close\ to\ Y}(u)$: $U \rightarrow [0, 1]$ như sau:

$$\forall u \in U,\ \mu_{close\ to\ Y}(u) = \frac{1}{1+\left(\frac{u-Y}{\beta}\right)^2}$$

- Dễ thấy rằng khi u = Y thì $\mu_{close\ to\ Y}(Y) = 1$, do đó "close to Y" là một tập con mờ chuẩn hóa, vậy "close to Y" là một đại lượng mờ.

Hàm thuộc của số quan hệ "close to Y" được chỉ ra ở hình 2.11

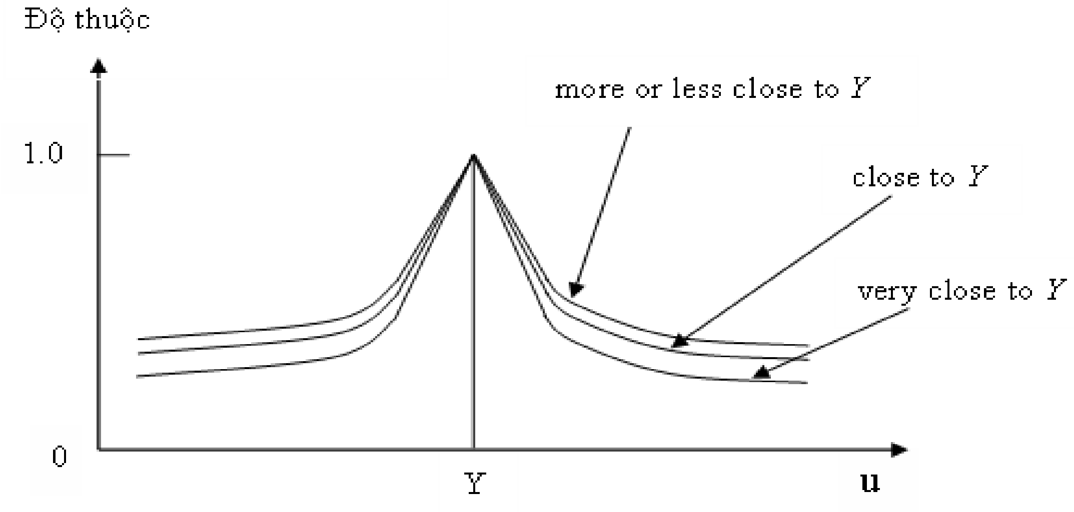


Hình 2.11. Hàm thuộc của quan hệ mờ "close to Y"

Nhận xét: các giá trị β lớn tương ứng với các đường cong mở rộng, các giá trị của β nhỏ tương ứng với các đường cong hẹp hơn. Ta có thể thấy hàm thuộc của số mờ "*close to Y* " và lát cắt $\alpha = 0.5$ cắt nhau tại $u = Y \pm \beta$.

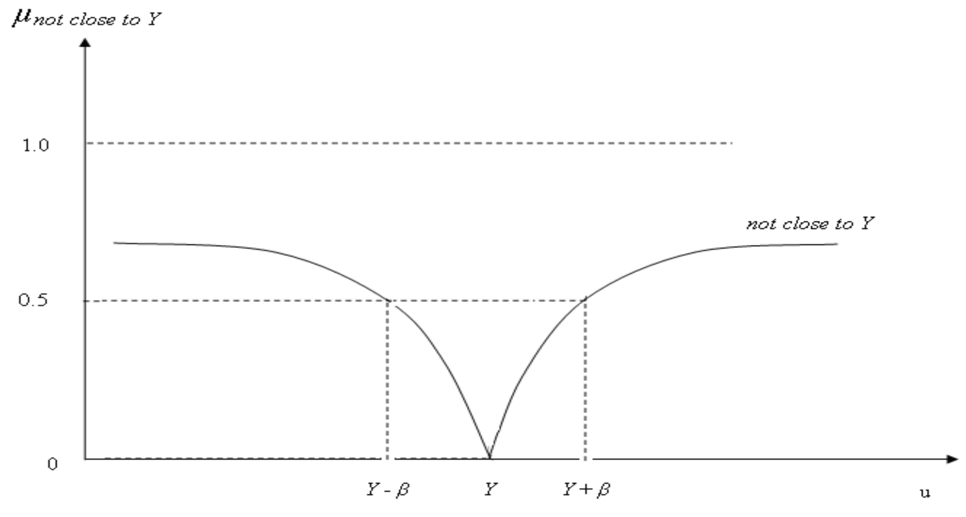
Chú ý: Dựa vào quan hệ mờ "close to Y", ta xây dựng các quan hệ mờ sửa đổi: "*very close to Y*", '*very very…very close to Y*", "*more or less close to Y*" và *"not close to Y"*. Hàm thuộc của các quan hệ mờ này được định nghĩa và có đồ thị như sau:

- $\mu_{\text{very close to } Y}(u) = (\mu_{\text{close to } Y}(u))^2$.
- $\mu_{\text{very very …very close to } Y}(u) = (\mu_{\text{close to } Y}(u))^{2*(\text{times of very})}$.
- $\mu_{\text{more or less close to } Y}(u) = (\mu_{\text{close to } Y}(u))^{1/2}$.
- $\mu_{\text{not close to } Y}(u) = (1 - \mu_{\text{close to } Y}(u))$



Hình 2.12 Hàm thuộc các quan hệ mờ: "close to Y", "very close to Y", "more or less close to Y"

Từ đồ thị hàm thuộc của quan hệ "close to Y" ta vẽ được đồ thị của hàm thuộc "not close to Y" bằng cách lấy đối xứng đồ thị "close to Y" qua trục $\mu = 0.5$, hàm này không phải là hàm lồi, và tập mờ "not close to Y" cũng không phải tập mờ chuẩn hóa, do đó quan hệ "not close to Y" không phải là số mờ.



Hình 2.13 Hàm thuộc của quan hệ mờ "not close to Y"

2.3.2 Quan hệ mờ "*at least*"

Với Y là một giá trị cho trước trên miền tham chiếu U, những phần tử u thuộc U có giá trị "ít nhất là xấp xỉ Y", "vào khoảng Y hoặc lớn hơn Y" (at least Y), được gọi là thuộc quan hệ "*at least Y*". Hiển nhiên Y và những phần tử lớn hơn Y là chắc chắn thuộc quan hệ này. Những phần tử u nhỏ hơn Y một chút vẫn có thể coi là thuộc quan hệ này, càng nhỏ hơn Y thì mức độ thuộc về quan hệ này càng giảm, u nhỏ đến một mức ω nào đó thì hoàn toàn không thuộc quan hệ "*at least Y*" . Như vậy, quan hệ mờ "*at least Y*" có thể được xem như một tập con mờ trên U, và được định nghĩa hình thức như sau:

Định nghĩa 2.7

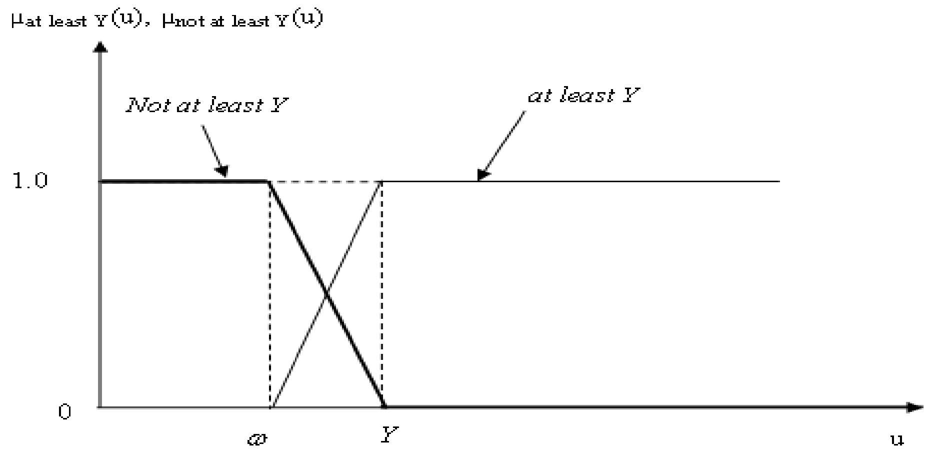
Cho U là tập các số thực, với Y thuộc U, quan hệ mờ "at least Y" trên U là một tập con mờ trên U, xác định bởi hàm thuộc $\mu_{at\ least\ Y}(u)$: $U \rightarrow [0, 1]$ như sau:

$$\forall u \in U,\quad \mu_{at\ least\ Y}(u) = \begin{cases} 0 & u \le \omega \\ \dfrac{u - \omega}{Y - \omega} & \omega < u < Y \\ 1 & u \ge Y \end{cases}$$

- Dễ thấy rằng khi u = Y thì $\mu_{at\ least\ Y}(Y) = 1$, do đó "at leastY" là một tập con mờ lồi và chuẩn hóa, vậy "at least Y" là một số mờ.
- Dựa vào số mờ "*at least Y*", có thể định nghĩa một số mờ "*not at least Y*" với hàm thuộc như sau:

$$\mu_{not\ at\ least\ Y}(u) = (1 - \mu_{at\ least\ Y}(u))$$

Hàm thuộc của quan hệ mờ "at least Y" và "not at least Y" có đồ thị như sau:



Hình 2.14. Hàm thuộc của quan hệ mờ "at least Y" và "not at least Y"

Nhận xét: Đồ thị của hàm thuộc của quan hệ "*at least Y*" và "*not at least Y*" có độ dốc càng lớn nếu giá trị của ω càng lớn, tức là khi ω càng gần với Y, và ngược lại, độ dốc này càng nhỏ khi ω càng xa Y, (ω < Y).

Quan hệ mờ "at least Y" sẽ xác định số mờ "at least Y" trên U, đó là những giá trị "ít nhất là vào khoảng Y", chú ý phân biệt với quan hệ "ít nhất là bằng Y", tức là " ≥ Y", là một quan hệ rõ.

2.3.3 Quan hệ mờ "*at most*"

Với Y là một giá trị cho trước trên miền tham chiếu U, những phần tử u thuộc U có giá trị "cùng lắm là xấp xỉ Y", "vào khoảng Y hoặc nhỏ hơn Y" (at most Y), được gọi là thuộc quan hệ "*at most Y*". Hiển nhiên Y và những phần tử nhỏ hơn Y là chắc chắn thuộc quan hệ này. Những phần tử u lớn hơn Y một chút vẫn có thể coi là thuộc quan hệ này, càng lớn hơn Y thì mức độ thuộc về quan hệ này càng giảm, khi u lớn đến một mức δ nào đó thì hoàn toàn không thuộc quan hệ "*at most Y*". Như vậy, quan hệ mờ "*at most Y*" có thể được xem như một tập con mờ trên U, và được định nghĩa hình thức như sau:

Định nghĩa 2.8

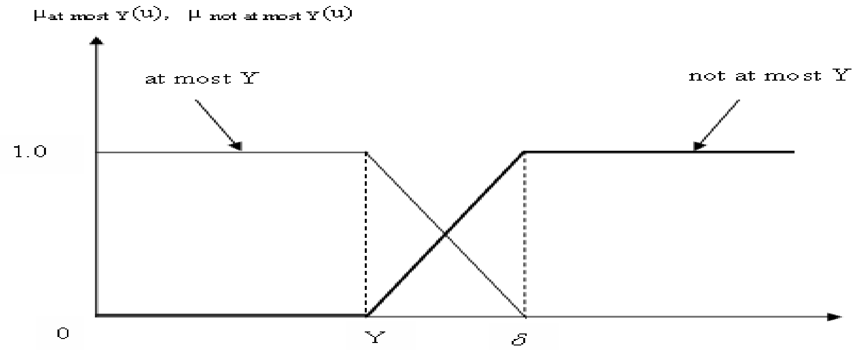
Cho U là tập các số thực, với Y thuộc U, quan hệ mờ "at most Y" trên U là một tập con mờ trên U, xác định bởi hàm thuộc $\mu_{at\ most\ Y}(u)$: U→ [0, 1] như sau:

$$\mu_{at\ most\ Y}(u) = \begin{cases} 1 & u \le Y \\ \dfrac{\delta - u}{\delta - Y} & Y < u < \delta \\ 0 & u \ge \delta \end{cases}$$

- Dễ thấy rằng khi u = Y thì $\mu_{at\ mostY}(Y) = 1$, do đó "at mostY" là một tập con mờ lồi và chuẩn hóa, vậy "at most Y" là một số mờ.
- Dựa vào số mờ "*at most Y*", có thể định nghĩa một số mờ "*not at most Y*" với hàm thuộc như sau:

$$\mu_{not\ at\ most\ Y}(u) = (1- \mu_{at\ most\ Y}(u))$$

Hàm thuộc của quan hệ mờ "*at most Y*" và "*not at most Y*" được chỉ ra ở *Hình 2.15.*



Hình 2.15 Hàm thuộc của quan hệ mờ "at most Y" và "not at most Y"

Nhận xét: Đồ thị của số mờ "at most Y", "not at most Y" sẽ có phần đồ thị là đường dốc với độ dốc càng lớn nếu giá trị của δ càng nhỏ, tức là khi δ càng gần với Y, ngược lại, độ dốc này càng nhỏ khi khi giá trị δ càng xa Y, (Y < δ).

Các quan hệ mờ "close to", "not close to", "at least", "at most", "not at least", "not at most", có thể xem như sự mềm dẻo hóa các quan hệ rõ tương ứng, tức là các quan hệ này được hiểu như là "fuzzy equal to" (fuzzy =), "fuzzy not equal to" (fuzzy ≠), "fuzzy greater than and equal to (fuzzy ≥)", "fuzzy less than and equal to" (fuzzy ≤), "fuzzy less than" (fuzzy <), "fuzzy greater than" (fuzzy >).

Bài tập chương 2

1. Cho tập các số nguyên: U = {1, 2, 3, 4, 5}. Xét R là quan hệ " nhỏ hơn hay bằng " trên U như sau: $\forall a, b \in U$, ta nói aRb nếu $a \leq b$.

a/. Hãy biểu diễn quan hệ R bằng một tập con của tích Descartes U xU.

b. Hãy viết ma trận quan hệ R .

c/. Quan hệ trên có những tính chất nào trong các tính chất sau: phản xạ, đối xứng và bắc cầu?

2. Cho tập các số nguyên: U = {1, 2, 3, 4, 5}. S là quan hệ mờ hai ngôi trên U xác định bởi hàm thuộc sau:

$$\forall x, y \in U,\ f_S(x, y) = \max\{0; 1 - \frac{|x - y|}{3}\}$$

a/. Hãy xác định ma trận quan hệ mờ của S.

b/. Hãy biểu diễn quan hệ mờ S bằng tập con mờ của tích Descartes U xU

c/. Quan hệ trên có những tính chất nào trong các tính chất sau: phản xạ, đối xứng và bắc cầu max-min?

d/. S có phải là quan hệ tương tự hay không ?.

3. Chứng minh bổ đề : Nếu S là một quan hệ tương tự trên U, thì với mọi $\alpha \in [0, 1]$, mọi quan hệ mức α liên kết với S là quan hệ tương đương trên U.

4. Cho quan hệ S trên miền trị U như sau:

S	a	b	c	d
a	1	0.8	0	0
b	0.8	1	0	0
c	0	0	1	0.7
d	0	0	0.7	1

a/. Chứng minh rằng S là một quan hệ tương tự trên U.

b/. Tìm các phân hoạch liên kết với quan hệ tương tự S.

5. Cho 2 số đo trọng lượng M1 và M2 là các số gần đúng với sai số tỷ lệ, M1 là 500 (gam) với sai số đến 1% và M2 là 300 (gam) với sai số đến 1%, hãy biểu diễn chúng bởi các số mờ L-R và tính tổng của chúng.

6. Cho 2 số đo trọng lượng N1 là 500 (gam) với sai số đến 2% và N2 là 600 (gam) với sai số đến 1%, hãy biểu diễn chúng bởi các số mờ L-R và tính tổng của chúng. Biểu diễn số mờ N1$\oplus$ N2 dưới dạng số gần đúng với sai số tỷ lệ.

7. Giá mua một ngôi nhà là "xấp xỉ giữa 300 và 500 (triệu đồng), chính xác tới 10 triệu", giá sửa chữa tu bổ ngôi nhà đó "xấp xỉ giữa 30 và 40 (triệu đồng), chính xác tới 1 triệu". Tính giá thành ngôi nhà.

8. Cho các tri thức về tuổi của Linh: tới Hà nội lúc khoảng 20 tuổi (hơn kém 6 tháng), ở lại Hà nội khoảng 1 năm rưỡi (hơn kém 3 tháng), sau đó đã rời khỏi Hà nội khoảng 2 năm, có thể sớm hơn 3 tháng hoặc muộn hơn 6 tháng.

a). Hãy biểu diễn tuổi của Linh khi tới Hà nội bằng một số mờ L-R.

b). Hãy biểu diễn thời gian Linh ở Hà nội bằng một số mờ L-R

c). Hãy biểu diễn tuổi của Linh hiện nay bằng một số mờ L-R.

d). Cho biết trong khoảng tuổi nào thì chắc chắn Linh đã rời khỏi Hà nội.

e). Cho biết trong khoảng tuổi nào thì chắc chắn Linh đang ở Hà nội.

9. Biết rằng tầm nhìn xa trên một sân bay vào ngày hôm qua là "vào khoảng 0,5" (km), trong đó "vào khoảng 0,5" là số mờ $(0,5\ ;\ 0,1\ ;\ 0,1)_{L\text{-}R}$ với hàm thuộc tam giác.

Tầm nhìn xa ngày hôm nay thấp hơn ngày hôm qua "xấp xỉ giữa 0,2 và 0,3", trong đó "xấp xỉ giữa 0,2 và 0,3" là một khoảng mờ $(0,2\ ;\ 0,3\ ;\ 0,1\ ;\ 0,1)_{L\text{-}R}$. Hỏi có thể đặc trưng tầm nhìn xa của ngày hôm nay bởi khoảng mờ hay số mờ nào?

10. Ta có các sự kiện sau:

a/. Bữa trưa vào khoảng 12 giờ (sớm hoặc muộn hơn 30 phút)

b/. Thời gian ăn bữa trưa xấp xỉ 1 tiếng (nhanh hoặc chậm hơn 15 phút)

c/. Một chút thời gian sau giờ G (một chút là khoảng 10 phút, sai số 5 phút).

d/. Giờ xuất phát vào lúc sau bữa trưa một chút (hơn kém 30 phút).

Xác định các số mờ tam giác hay khoảng mờ hình thang biểu diễn thời gian của các sự kiện trên (đơn vị : giờ)

11. Một căn phòng có chiều dài 'khoảng 10 m $\pm$ 2%' và chiều rộng 'khoảng 4 m $\pm$ 1%', tính diện tích và chu vi căn phòng.