

BÀI TẬP ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Biên soạn: Tập thể GV Bộ môn Toán – Khoa Công nghệ thông tin – HVNN VN

Bài 1. Cho các ma trận: $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & -5 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 & 34 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$

Hãy thực hiện các phép tính sau: $A+B$, $A-3B$, A^t+2B^t , A^tB , $A.B^t$, $A.B^tC$.

ĐS: $A^tB = \begin{bmatrix} 14 & 14 & 5 \\ 28 & -16 & 23 \\ 42 & 34 & 9 \end{bmatrix}$, $A.B^t = \begin{bmatrix} 6 & 34 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $A.B^tC = \begin{bmatrix} 62 & 0 \\ 0 & 62 \end{bmatrix}$

Bài 2. Cho các ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ và $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1) Hai ma trận nào có thể nhân được với nhau ?

2) Tính AB , ABC , C^n .

ĐS: 1) AB, BA, BC, CA

2) $AB = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $ABC = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $C^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Bài 3. Thực hiện các phép tính sau:

1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^3$. **ĐS:** 1) $\begin{bmatrix} 14 \\ 10 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} -1 & 27 & -9 \\ 18 & -28 & 0 \\ 0 & 9 & -1 \end{bmatrix}$.

Bài 4. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

1) Tìm ma trận X thỏa mãn $A^2 + 2A - 3X = 0$

2) Tính A^{2017} .

ĐS: 1) $X = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & 2 \\ 0 & \frac{8}{3} \end{bmatrix}$; 2) $A^{2017} = \begin{bmatrix} 2^{2017} & 2017 \cdot 2^{2016} \\ 0 & 2^{2017} \end{bmatrix}$

Bài 5. Tính các định thức sau:

1) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x \\ 1 & x & 0 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 1 & -a & 1 \\ -2 & 1 & -a \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

ĐS: 1) $(x+2)(x-1)^2$ 2) 0 3) $3a^2 - 4a + 2$ 4) 40 5) -45

Bài 6. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & m \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

1) Với $m=1$ hãy tính $\det A$, $\det(5A^t)$, $\det(A^4)$.

BÀI TẬP ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Biên soạn: Tập thể GV Bộ môn Toán – Khoa Công nghệ thông tin – HVNN VN

2) m là giá trị nào đó mà $\det A = 3$. Với những giá trị m đó hãy tính $\det(A^{-1})$, $\det(2A^2)$

ĐS: 1) $\det A = 2$, $\det(5A^t) = 250$, $\det(A^4) = 16$

$$2) \det A^{-1} = \frac{1}{3}, \det(2A^2) = 72$$

Bài 7. Tìm hạng của các ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 7 & 2 \\ 1 & 10 & 17 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 5 & 3 \\ 7 & 9 & 7 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

ĐS: $r(A) = 2$, $r(B) = 3$, $r(C) = 2$

Bài 8 : Xác định hạng của các ma trận sau tùy theo tham số a :

$$1) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 3 \end{bmatrix} \quad 2) B = \begin{bmatrix} 3 & a & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 7 & 2 \\ 1 & 10 & 17 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad 3) C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 10 & 2 \\ 1 & 4 & 7 & 2 \\ 6 & a & -8 & 2 \end{bmatrix}$$

ĐS: 1) Với $a = 0; -5 \rightarrow r(A) = 2; a \neq 0; -5 \rightarrow r(A) = 3$.

2) Với $a = 0 \rightarrow r(B) = 2; a \neq 0 \rightarrow r(B) = 3$.

3) Với $a = -6 \rightarrow r(C) = 2; a \neq -6 \rightarrow r(C) = 3$.

Bài 9. Tìm m để ma trận sau có hạng bằng 2:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ m & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

ĐS: $m = 0$

Bài 10. Cho các ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 5 \\ -1 & -4 & 3 \\ 3 & 9 & -7 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad D = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 3 \\ -1 & -4 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

1) Hãy tính các tích AB và BA . Từ đó hãy cho biết ma trận A có khả nghịch không? chỉ ra ma trận nghịch đảo (nếu có) của ma trận A .

2) Ma trận C có phải ma trận nghịch đảo của ma trận B hay không? Vì sao?

3) Tìm ma trận X (nếu có) thỏa mãn: $XA = B$.

4) Hãy tính tích CD . Từ đó hãy cho biết ma trận D có khả nghịch không? chỉ ra ma trận nghịch đảo (nếu có) của ma trận D .

ĐS: 1) $AB = BA = I_3$, $A^{-1} = B$ 2) không 3) $X = B^2 = \dots$ 4) $CD = 3I_3$

BÀI TẬP ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Biên soạn: Tập thể GV Bộ môn Toán – Khoa Công nghệ thông tin – HVNN VN

Bài 11. Tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của các ma trận sau : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

ĐS: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

Bài 12. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & m & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

- 1) Tìm m để ma trận A khả nghịch.
- 2) Giả sử m là những giá trị mà ma trận A khả nghịch. Chứng minh rằng với những giá trị m đó thì A^2, A^3 cũng khả nghịch.
- 3) Với $m = -1$, hãy tìm ma trận nghịch đảo của A .

ĐS: 1) $m \neq -1/2$ 3) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -5 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Bài 13. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

- 1) Với giá trị nào của m thì hạng của ma trận A bằng 3? Với các giá trị m vừa tìm được thì ma trận A có khả nghịch không?
- 2) Với $m = -1$, hãy tính tích các phần tử nằm trên đường chéo chính của ma trận nghịch đảo A^{-1} (nếu có)

ĐS: 1) $m \neq -\frac{3}{5}$ (hạng của ma trận vuông A bằng cấp của ma trận khi và chỉ khi $\det(A) \neq 0$); 2) -3

Bài 14. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1+m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+m & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+m \end{bmatrix}$

- 1) Tìm điều kiện của m để A khả nghịch.
- 2) Khi A khả nghịch, giả sử ma trận nghịch đảo của A là $A^{-1} = (c_{ij})_{4 \times 4}$. Tìm m để $c_{23} = \frac{1}{4}$ và

$$\det(A^{-1}) = -\frac{1}{16}$$

ĐS: 1) $m \neq 0$ và $m \neq -4$ 2) $m = -2$

BÀI TẬP ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Biên soạn: Tập thể GV Bộ môn Toán – Khoa Công nghệ thông tin – HVNN VN

Bài 15. Giải các hệ phương trình tuyến tính sau

$$1) \begin{cases} x - y - 2z + t = -2 \\ 2x - y + z + 3t = -3 \\ -x + 2y + 3z - 2t = -1 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 5x_1 - 10x_2 - 12x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ 5x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 5 \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 = 7 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$$

ĐS: 1) $\begin{cases} z = a \in \mathbb{R} \\ x = a - 5 \\ y = -1 - 3a \\ t = 2 - 2a \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x_4 = a \in \mathbb{R} \\ x_2 = b \in \mathbb{R} \\ x_3 = \frac{-2a}{3} \\ x_1 = 2b - 3a \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -1 \\ x_4 = -1 \end{cases}$; 5) vô nghiệm

Bài 16.

1) Với giá trị nào của m thì các hệ phương trình sau có nghiệm:

$$a) \begin{cases} x - 2y + z - t = -1 \\ 3x + y - 2z + t = 2 \\ x + 5y - 4z + mt = 5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y + 10z - 6t = 3 \\ x + 2y + mz - t = 1 \\ 2x + 5y - z + mt = 2 \end{cases}$$

2) Với giá trị nào của m thì hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất? Có vô số nghiệm?

$$\begin{cases} x + 3y - 2t = 0 \\ -y + 2z - t = 0 \\ 2x - z + t = 0 \\ 4x + y + mz = 0 \end{cases}$$

3) Tìm m để hệ phương trình sau trở thành hệ Cramer? Khi đó hãy tính thành phần x trong công thức nghiệm:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ 2my - 2z = 1 \\ -x + y - 3z = 3 \end{cases}$$

ĐS:

1) a) $m \neq 4$ b) $m \neq 3$ (HD: Biến đổi ma trận bổ sung của hệ pttt về dạng bậc thang. Hệ pttt có nghiệm khi và chỉ khi $r(A) = r(A^{bs})$)

2) $\det(A) = 11m + 5$ với A là ma trận hệ số của hệ pttt (Hệ vuông thuần nhất có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\det(A) \neq 0$, có vô số nghiệm khi và chỉ khi $\det(A) = 0$)

3) $m \neq -1/2$

Bài 17. Tìm tất cả các ma trận X (nếu có) thỏa mãn:

$$1) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} X = X \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad 2) X \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad 3) X \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$4) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad 5) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

ĐS: 1) $X = \begin{bmatrix} x & y \\ y & x+y \end{bmatrix}, x, y \in \mathbb{R};$ 2) $X = \begin{bmatrix} -3 & 7 & 2 \\ 1 & -1.5 & 0.5 \end{bmatrix};$

3) $X = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix};$ 4) $X = \begin{bmatrix} 7/4 \\ 5/4 \\ -7/4 \end{bmatrix};$ 5) $X = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

Bài 18. Trong các tập hợp sau, tập hợp nào là không gian véctor con của các không gian tương ứng ?

- 1) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3z = 1\}$ trong \mathbb{R}^3
- 2) $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy - 2z = 0\}$ trong \mathbb{R}^3 .
- 3) $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2t - 3 = 0, y - t - z = 0\}$ trong \mathbb{R}^4
- 4) $J = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3z = 0\}$ trong \mathbb{R}^3
- 5) $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y \geq 0\}$

ĐS: 4)

Bài 19. Trong \mathbb{R}^3 , véctor u sau đây có phải là tổ hợp tuyến tính của các véctor còn lại không? Tại sao? Với $u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (0, -1, 1), u_3 = (-2, -1, 3), u = (2, -1, 5)$.

ĐS: Có vì $u = 2u_1 + 3u_2$.

Bài 20. Tìm điều kiện của m để véctor u trong \mathbb{R}^3 sau đây là tổ hợp tuyến tính của các véctor còn lại với $u_1 = (0, 1, -1), u_2 = (-2, 1, 3), u_3 = (m, 2, -1), u = (1, m, 2)$.

ĐS: Là THTT khi và chỉ khi $m \neq \frac{-1}{2}$

Bài 21: Chứng minh $U = \{u = (1, -1), v = (0, 3)\}$ là một hệ sinh của không gian véctor \mathbb{R}^2 . Hãy tìm biểu thị tuyến tính của mỗi véctor $w = (4, 2), t = (-2, 5), s = -3w + t$ qua hệ véctor U .

ĐS: $w = 4u + 2v, t = -2u + v, s = -14u - 5v$

Bài 22. Họ các véctor sau độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính trong không gian tương ứng?

- 1) $V = \{v_1 = (-2, 4), v_2 = (1, -2)\}$ trong \mathbb{R}^2 .
- 2) $V = \{v_1 = (2, -1, 1, 0), v_2 = (4, -2, 2, 1)\}$ trong \mathbb{R}^4
- 3) $U = \{u_1 = (1, -2, 0, 4), u_2 = (3, -2, 1, 1), u_3 = (0, 0, 0, 0)\}$ trong \mathbb{R}^4 .
- 4) $U = \{u_1 = (1, -2, 0), u_2 = (3, -2, 1), u_3 = (2, 0, 1)\}$ trong \mathbb{R}^3 .

BÀI TẬP ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Biên soạn: Tập thể GV Bộ môn Toán – Khoa Công nghệ thông tin – HVNN VN

- 5) $U = \{u_1 = (-1, 2, 4), u_2 = (3, -2, 2), u_3 = (1, 0, 3), u_4 = (1, 1, 1)\}$ trong \mathbb{R}^3 .
6) $S = \{s_1 = (0, -1, 2, 4), s_2 = (-1, 2, 4, 0), s_3 = (2, 4, 0, -1), s_4 = (4, 0, -1, 2)\}$ trong \mathbb{R}^4 .

ĐS: 1) PTTT 2) ĐLTT 3) PTTT 4) PTTT 5) PTTT 6) ĐLTT

Bài 23.

- 1) Trong không gian vectơ \mathbb{R}^3 cho họ vectơ:

$$V = \{v_1 = (-1, 2, 4), v_2 = (3, -2, 1), v_3 = (2, -1, 5)\}$$

- a) Chứng minh rằng họ V là cơ sở của không gian \mathbb{R}^3 .
b) Các họ vectơ $I = \{v_1, v_2\}$ và $J = \{v_1, v_3\}$ độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính? Vì sao?
c) Hãy tìm một biểu thị tuyến tính của vectơ v_1 qua các vectơ còn lại của họ vectơ V .
2) Chứng minh họ vectơ $U = \{u_1 = (1, 3), u_2 = (2, -2)\}$ là một cơ sở của không gian vectơ \mathbb{R}^2 .
3) Họ vectơ sau đây có phải là một cơ sở của không gian vectơ \mathbb{R}^3 không?

$$W = \{w_1 = (-2, 3, 4), w_2 = (3, -2, 5), w_3 = (5, 0, 23)\}$$

ĐS: 1b) họ vectơ I, J ĐLTT 1c) không có 3) không

Bài 24. Với giá trị nào của m thì họ vectơ sau đây độc lập tuyến tính? Phụ thuộc tuyến tính?

- 1) $V = \{v_1 = (2, 1, 1, m), v_2 = (2, 1, -1, m), v_3 = (10, 5, -1, 5m)\}$ trong \mathbb{R}^4 .
2) $U = \{u_1 = (2, 1, 2m), u_2 = (2, 1, -1), u_3 = (1+m, 2, -3)\}$ trong \mathbb{R}^3 .
3) $W = \{w_1 = (m, 2, 1), w_2 = (1, -2, m), w_3 = (2, 2, 3)\}$ trong \mathbb{R}^3 .

ĐS:

- 1) PTTT khi $m = -1/2$; ĐLTT khi $m \neq -1/2$
2) PTTT khi $m = -1/2$ hoặc $m = 3$; ĐLTT khi $m \neq -1/2$ và $m \neq 3$
3) PTTT khi $m = -1$ hoặc $m = 0$; ĐLTT khi $m \neq -1$ và $m \neq 0$

Bài 25. Trong không gian vectơ \mathbb{R}^3 cho tập hợp: $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2z = 0, x - y - z = 0\}$.

- 1) Chứng minh rằng Q là không gian vectơ con của \mathbb{R}^3 .
2) Tìm một cơ sở và tính số chiều của không gian Q .
3) Chứng minh vectơ $u = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in Q$ và tìm tọa độ của u trong cơ sở tìm được ở trên.

ĐS: 2) Một cơ sở $U = \{v = (2, 1, 1)\}$ $\dim V = 1$ 3) $u_U = \left(\frac{1}{2}\right)$

Bài 26. Trong không gian vectơ \mathbb{R}^3 cho tập hợp $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y + z = 0\}$

- 1) Vectơ $u = (1, 2, 3)$ có thuộc W không? Chỉ ra một vectơ (khác vectơ không) thuộc W .
2) Chứng minh rằng W là một không gian vectơ con của \mathbb{R}^3 .
3) Tìm một cơ sở, số chiều của không gian W .
4) Chứng minh vectơ $u = (1, 2, 5) \in W$ và tìm tọa độ của u trong cơ sở của W tìm được ở trên.

ĐS:

- 1) Không. VD chọn $u = (1, 1, 2) \in W$
- 2) Cách 1: Chứng minh W đóng kín với phép toán cộng và nhân với vô hướng.
Cách 2: Viết $W = \text{span}\{u_1, u_2\}$
- 3) Một cơ sở $S = \{u_1 = (3, 1, 0), u_2 = (-1, 0, 1)\}$; $\dim W = 2$
- 4) $u_s = (2, 5)$

Bài 27. Trong không gian vectơ \mathbb{R}^4 cho tập hợp $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2t = 0, y - z - t = 0\}$

- 1) Vectơ $u = (1, 2, 5, 4)$ có thuộc S không?
- 2) Chứng minh rằng S là một không gian véc tơ con của \mathbb{R}^4 .
- 3) Tìm một cơ sở và tính số chiều của không gian S .

ĐS: 1) Không 3) Một cơ sở $U = \{u_1 = (-2, 1, 1, 0), u_2 = (0, 1, 0, 1)\}$; $\dim S = 2$.

Bài 28. Trong không gian vectơ \mathbb{R}^4 cho tập hợp $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y + 2t = 0\}$.

- 1) Chứng minh H là một không gian vectơ con của \mathbb{R}^4
- 2) Tìm một cơ sở, số chiều của không gian H
- 3) Chứng minh vectơ $u = (-4; 2; -1; 1)$ thuộc H và tìm tọa độ của u trong cơ sở tìm được ở trên.

ĐS: 2) Một cơ sở $U = \{u_1 = (1, 0, 0, 0), u_2 = (0, -2, 1, 0), u_3 = (0, 0, 0, 1)\}$; $\dim H = 3$;

3) $u_s = (-4, -2, 1)$

Bài 29. Trong không gian vectơ \mathbb{R}^2 cho hai tập hợp

$$U = \{u_1 = (1, -1), u_2 = (2, 1)\} \text{ và } V = \{v_1 = (3, 1), v_2 = (1, -1)\}$$

- 1) Chứng minh rằng U và V là hai cơ sở của \mathbb{R}^2 .
- 2) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ U sang V .
- 3) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ V sang U .
- 4) Tìm tọa độ của vectơ $x = (3, -1)$ trong cơ sở U .
- 5) Tìm vectơ y trong \mathbb{R}^2 có tọa độ trong cơ sở U là $y_U = (4, -5)$.
- 6) Biết tọa độ của vectơ z trong cơ sở U là $z_U = (7, 2)$, hãy tìm tọa độ của z trong cơ sở V .

ĐS: 2) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$; 3) $B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{4} \\ 1 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$; 4) $x_U = \left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$; 5) $y = (-6, -9)$; 6) $z_V = \left(\frac{3}{2}, \frac{13}{2}\right)$

Bài 30. Trong không gian vectơ \mathbb{R}^3 cho hai tập hợp $U = \{u_1 = (1, 1, -1), u_2 = (1, 1, 0), u_3 = (2, 1, -1)\}$

và $V = \{v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (1, 0, -1), v_3 = (1, 1, 1)\}$.

- 1) Chứng minh U và V là hai cơ sở của \mathbb{R}^3 .
- 2) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ U sang V .
- 3) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ V sang U .

- 4) Tìm tọa độ của vectơ $x = (2, 3, -1)$ trong cơ sở U .
- 5) Tìm vectơ y trong \mathbb{R}^3 có tọa độ trong cơ sở U là $y_U = (1, 1, -1)$.
- 6) Biết tọa độ của vectơ z trong cơ sở V là $z_V = (1, 0, 2)$, hãy tìm tọa độ của z trong cơ sở U .

ĐS: 2) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; 3) $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; 4) $x_U = (2, 2, -1)$;

5) $y = (0, 1, 0)$; 6) $z_U = (0, 2, -1)$

Bài 31. Tìm hạng của họ các vectơ sau:

- 1) $U = \{u_1 = (-2, 1, 1), u_2 = (2, -3, 1), u_3 = (-1, 0, 1), u_4 = (1, -3, 2)\}$ trong không gian vectơ \mathbb{R}^3 .
- 2) $V = \{v_1 = (-2, 1, 1), v_2 = (2, -3, 1), v_3 = (4, 0, 1)\}$ trong không gian vectơ \mathbb{R}^3 .
- 3) $W = \{w_1 = (2, 2, 0, 0, -1), w_2 = (3, -3, 1, 5, 2), w_3 = (1, -1, -1, 0, 0)\}$ trong không gian vectơ \mathbb{R}^5 .

ĐS: 1) 2; 2) 3; 3) 3.

Bài 32. Trong không gian vectơ \mathbb{R}^4 hãy tìm hạng của họ các vectơ sau tùy theo m :

$$U = \{u_1 = (2, 1, 1, m), u_2 = (1, 3, -1, 2), u_3 = (-3, 1, -3m, 0)\}$$

ĐS: $m = 1$ thì hạng của họ vectơ là 2; $m \neq 1$ thì hạng của họ vectơ là 3.

Bài 33. Trong các ánh xạ sau, ánh xạ nào không phải ánh xạ tuyến tính ?

- 1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, x \in \mathbb{R}, f(x) = (x, 3x)$
- 2) $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x, y) = (x + 2y, 3x - y + 1)$
- 3) $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \in \mathbb{R}^2, h(x, y) = (xy, x - y)$
- 4) $k: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, k(x, y, z) = (x + 2y, x - y + z, x - 2z)$
- 5) $l: \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}), (x, y) \in \mathbb{R}^2, l(x, y) = \begin{bmatrix} 2x - y & x + y \\ -x + 3y & 3x - y \end{bmatrix}$

ĐS: g, h

Bài 34. Cho ánh xạ $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ xác định bởi: $\forall u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(u) = (x + y, y - z)$

- 1) Chứng minh rằng f là ánh xạ tuyến tính.
- 2) Tìm $\ker f, \text{Im } f$ và tính hạng của f .
- 3) Tìm ma trận của f trong cơ sở $U = \{u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (1, 0, 1), u_3 = (1, 1, 1)\}$ của \mathbb{R}^3 và cơ sở $V = \{v_1 = (1, 1), v_2 = (1, 2)\}$ của \mathbb{R}^2 .

ĐS: $\ker f = \{u = (-t, t, t) | t \in \mathbb{R}\}$; $\text{Im } f = \mathbb{R}^2$; $r(f) = \dim(\text{Im } f) = 2$; $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$.

Bài 35. Cho ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$\forall u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(u) = (x + 2y, 3y + z, 3x - 2z)$$

- 1) Tìm $\ker f, \text{Im } f$ và hãy chỉ ra cho mỗi không gian đó một cơ sở.

BÀI TẬP ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Biên soạn: Tập thể GV Bộ môn Toán – Khoa Công nghệ thông tin – HVNN VN

- 2) Tìm hạng của ánh xạ f .
- 3) Tìm ma trận A của ánh xạ f trong cơ sở $U = \{u_1 = (0,1,1), u_2 = (1,0,1), u_3 = (1,1,1)\}$ của \mathbb{R}^3 .

ĐS: 1) $\ker f = \{u = (2t, -t, 3t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(2, -1, 3)\}$

2) $\text{Im } f = \text{span}\{(1,0,3), (2,3,0), (0,1,-2)\} = \text{span}\{(1,0,3), (0,1,-2)\}$; $r(f) = 2$.

3) $A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ -6 & 0 & -3 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$.

Bài 36. Giả sử $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ là một ánh xạ tuyến tính sao cho $f(1,1) = (3,4)$ và $f(2,3) = (5,2)$

- 1) Tìm $f(3,-4)$
- 2) Xác định $f(x,y)$ với mọi $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

ĐS: 1) $f(3,-4) = (16,54)$; 2) $f(x,y) = (4x-y, 10x-6y)$.

Bài 37. Giả sử $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ là một ánh xạ tuyến tính sao cho $f(1,-1) = (-1,1,2)$ và $f(-2,3) = (2,3,-4)$.

- 1) Chứng minh rằng $U = \{u_1 = (1,-1), u_2 = (-2,3)\}$ là một cơ sở của \mathbb{R}^2
- 2) Tìm $f(3,-5)$
- 3) Tổng quát, tìm $f(x,y)$ với mọi $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$
- 4) Tính hạng của f
- 5) Tìm $\ker f$

ĐS: 2) $f(3,-5) = (-3,-7,2)$;

3) Biểu diễn $u = (x,y) = (3x+2y)u_1 + (x+y)u_2$, từ đó $f(x,y) = (-x, 6x+5y, 2x)$.

4) $r(f) = 2$; 5) $\ker f = \{(0,0)\}$

Bài 38. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.

- 1) Tìm các giá trị riêng của ma trận A . Ma trận A có chéo hóa được không? Vì sao?
- 2) Tìm các véc tơ riêng của A .
- 3) Xác định ma trận P làm chéo hóa ma trận A và đưa ra ma trận $P^{-1}AP$.

ĐS: 1) Các giá trị riêng $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ và $\lambda_3 = 3$; A chéo hóa được.

2) Các véc tơ riêng tương ứng là $(0, -4t, t)$, $(t, t, 0)$, $(2t, 0, t)$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3) $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

BÀI TẬP ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Biên soạn: Tập thể GV Bộ môn Toán – Khoa Công nghệ thông tin – HVNN VN

Bài 39. Cho ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ có ma trận là $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ trong cơ sở chính tắc

$E = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ của \mathbb{R}^3 .

- 1) Tìm công thức xác định ánh xạ tuyến tính f .
- 2) Tìm ma trận của ánh xạ f trong cơ sở $U = \{u_1 = (1, 0, 0), u_2 = (1, 0, 1), u_3 = (1, 1, 1)\}$ của \mathbb{R}^3 .
- 3) Tìm các giá trị riêng và các vectơ riêng của ma trận A . Ma trận A có chéo hóa được không? nếu có hãy viết ma trận P làm chéo hóa A .

ĐS: 1) Với $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f(u) = (y + z, x + z, x + y)$

(HD: Với $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, có $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$ suy ra $f(u) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3)$)

2) $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

3) Mt A có hai giá trị riêng là $\lambda_1 = 2$ (bội 1) và $\lambda_2 = -1$ (bội 2).

Vectơ riêng ứng với gt riêng $\lambda_1 = 2$ có dạng $v = [x \ x \ x]^t$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Vectơ riêng ứng với gt riêng $\lambda_2 = -1$ có dạng $v = [x \ y \ -x - y]^t$; $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x, y) \neq (0, 0)$.

Ma trận $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ làm chéo hóa A và $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Bài 40. Cho ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ có ma trận là $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ trong hai cơ sở

$U = \{u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (1, 0, 1), u_3 = (1, 1, 1)\}$ của \mathbb{R}^3 và cơ sở $V = \{v_1 = (1, 1), v_2 = (1, 2)\}$ của \mathbb{R}^2

- 1) Tính $f(4, 2, 1)$.
- 2) Tìm công thức xác định ánh xạ tuyến tính f .
- 3) Tìm hạt nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính f và tìm cho mỗi không gian con này một cơ sở.

ĐS:

1) $f(4, 2, 1) = (10, 17)$

(HD: Biểu diễn $u = (4, 2, 1) = 3u_1 + 2u_2 - u_3 \Rightarrow f(u) = 3f(u_1) + 2f(u_2) - f(u_3)$)

2) Với $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ có $u = (x - z)u_1 + (x - y)u_2 + (-x + y + z)u_3$

CT xác định f là $f(u) = (2x + y, 4x + y - z)$.

3) Có $\ker f = \{u = (x, -2x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(1, -2, 2)\}$

Từ $\dim(\ker f) + \dim(\text{Im } f) = \dim(\mathbb{R}^3)$ suy ra $\text{Im } f = \mathbb{R}^2$, VD 1 cơ sở là V .

Bài 41. Cho $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ là ánh xạ xác định bởi: $\forall u = (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(u) = (-8x + 15y, -6x + 11y)$

- 1) Chứng minh rằng f là ánh xạ tuyến tính
- 2) Tìm $\ker f$, $\text{Im } f$ và tính hạng của f
- 3) Tìm ma trận A của ánh xạ tuyến tính f trong trong cơ sở $U = \{u_1 = (1, 1), u_2 = (2, 1)\}$ của \mathbb{R}^2
- 4) Tìm các giá trị riêng và các vectơ riêng của ma trận A . Ma trận A có chéo hóa được không? nếu có, hãy viết ma trận P làm chéo hóa A

ĐS: 2) $\ker f = \{(0, 0)\} \Rightarrow \text{Im } f = \mathbb{R}^2$

3) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

4) A có 2 giá trị riêng là $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = 2$.

Vectơ riêng ứng với gt riêng $\lambda_1 = 1$ có dạng $u = \begin{bmatrix} x \\ 2x \end{bmatrix}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Vectơ riêng ứng với gt riêng $\lambda_2 = 2$ có dạng $u = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ma trận $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ làm chéo hóa A và $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Bài 42. Cho ánh xạ $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ xác định bởi: $\forall u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(u) = (x + z, y, x + z)$

- 1) Chứng minh rằng f là ánh xạ tuyến tính.
- 2) Tìm $\ker f$, $\text{Im } f$ và tính hạng của f . Chỉ ra cho mỗi không gian $\ker f$, $\text{Im } f$ một cơ sở.
- 3) Tìm ma trận A của ánh xạ tuyến tính f trong trong cơ sở chính tắc $E = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ của \mathbb{R}^3 .
- 4) Tìm các giá trị riêng và các vectơ riêng của ma trận A . Ma trận A có chéo hóa được không? nếu có hãy viết ma trận P làm chéo hóa A .

ĐS: 2) $\ker f = \{(x, 0, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(1, 0, -1)\}$; $\text{Im } f = \text{span}\{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$; $r(f) = 2$.

3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4) A có 3 giá trị riêng là $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ và $\lambda_3 = 2$.

Vectơ riêng ứng với gt riêng $\lambda_1 = 0$ có dạng $u = [x \ 0 \ -x]^T, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Vectơ riêng ứng với gt riêng $\lambda_2 = 1$ có dạng $u = [0 \ y \ 0]^T, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Vectơ riêng ứng với gt riêng $\lambda_3 = 2$ có dạng $u = [z \ 0 \ z]^T, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ma trận $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ làm chéo hóa A và $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

BÀI TẬP ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Biên soạn: Tập thể GV Bộ môn Toán – Khoa Công nghệ thông tin – HVNN VN

Bài 43. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ và $u = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$. Hỏi u, v có là những vectơ riêng của ma trận A không? vì sao?

HD: $Au = -4u$; $Av = \begin{bmatrix} -9 \\ 11 \end{bmatrix} \neq \lambda v, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Bài 44. Ma trận sau có chéo hóa được không? Nếu được hãy đưa ma trận đó về dạng chéo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

HD: Ma trận A có hai giá trị riêng là $\lambda_1 = 1$ (bội 1) và $\lambda_2 = -2$ (bội 2).

K/g riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 1$ (bội 1) là không gian 1 chiều sinh bởi $v = [1 \ -1 \ 1]^T$.

K/g riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = -2$ (bội 2) là không gian 1 chiều sinh bởi $v = [-1 \ 1 \ 0]^T$

Ma trận A vuông cấp 3 không có đủ 3 vectơ riêng ĐLTT, do đó A không chéo hóa được.

----- HẾT -----