

## 2. Mô Hình Mạng PERT(Program Evaluation and Review Technique)

### 2.1 Các khái niệm của PERT

Mạng PERT giúp trả lời các câu hỏi:

- Dự án sẽ hoàn thành khi nào?
- – Mỗi hoạt động của dự án nên được bắt đầu vào thời điểm nào và kết thúc vào thời điểm nào?
- – Những hoạt động nào của dự án phải kết thúc đúng thời hạn để tránh cho toàn bộ dự án bị kết thúc chậm hơn so với kế hoạch?
- – Liệu có thể chuyển các nguồn dự trữ (nhân lực, vật lực) từ các hoạt động “không căng” sang các hoạt động “căng” (các hoạt động phải hoàn thành đúng tiến độ) mà không ảnh hưởng tới thời hạn hoàn thành dự án?
- – Những hoạt động nào cần tập trung theo dõi?

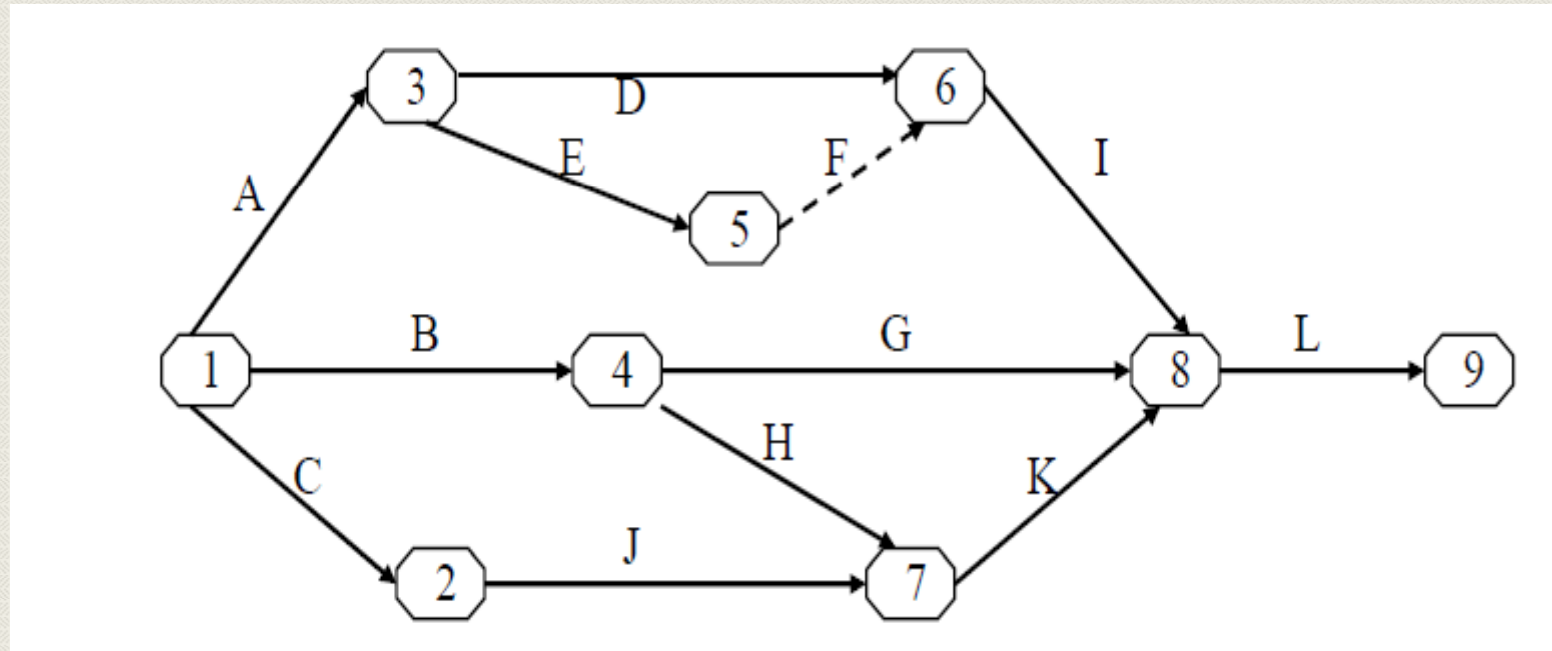
## 2. Mô Hình Mạng PERT

**Ví dụ:** Cho bảng các hoạt động của dự án, thứ tự và thời gian thực hiện

Hoạt động	Hoạt động kế trước	Thời gian thực hiện (tuần)
A	–	2
B	–	2
C	–	2
D	A	3
E	A	4
F	E	0 (hoạt động giả)
G	B	7
H	B	6
I	D, F	4
J	C	10
K	H, J	3
L	G, I, K	4

## 2. Mô Hình Mạng PERT

- Vẽ sơ đồ mạng PERT như sau:

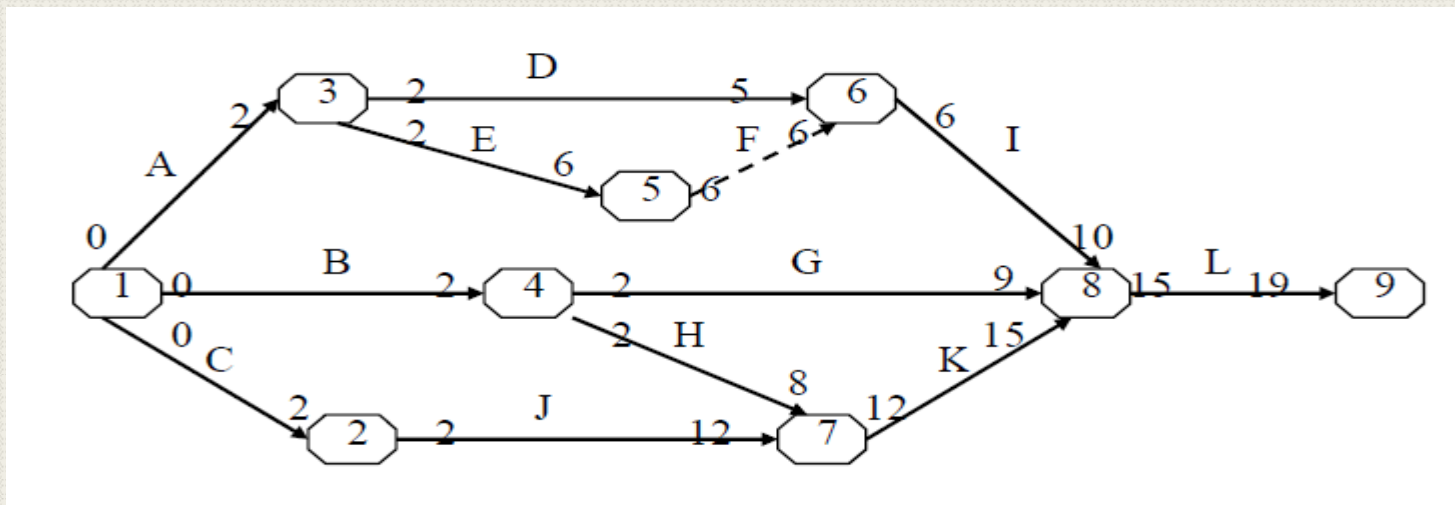


## 2. Mô Hình Mạng PERT

- *Xác định thời gian tối thiểu thực hiện dự án*
- Để xác định thời gian tối thiểu thực hiện dự án, trước hết chúng ta nghiên cứu khái niệm thời điểm bắt đầu sớm nhất và thời điểm kết thúc sớm nhất (EST và EFT – *Earliest start time* và *Earliest finish time*) cho từng hoạt động.
- **Ví dụ 2: Hoạt động A có  $ESTA = 0$  và  $EFTA = 2$ , vì**
  - Thời điểm bắt đầu sớm nhất là khi bắt đầu khởi động dự án,
  - Thời điểm kết thúc sớm nhất là sau 2 tuần.
- Mọi quan hệ giữa EST và FFT là:  
 $EFT = EST + \text{thời gian thực hiện hoạt động.}$

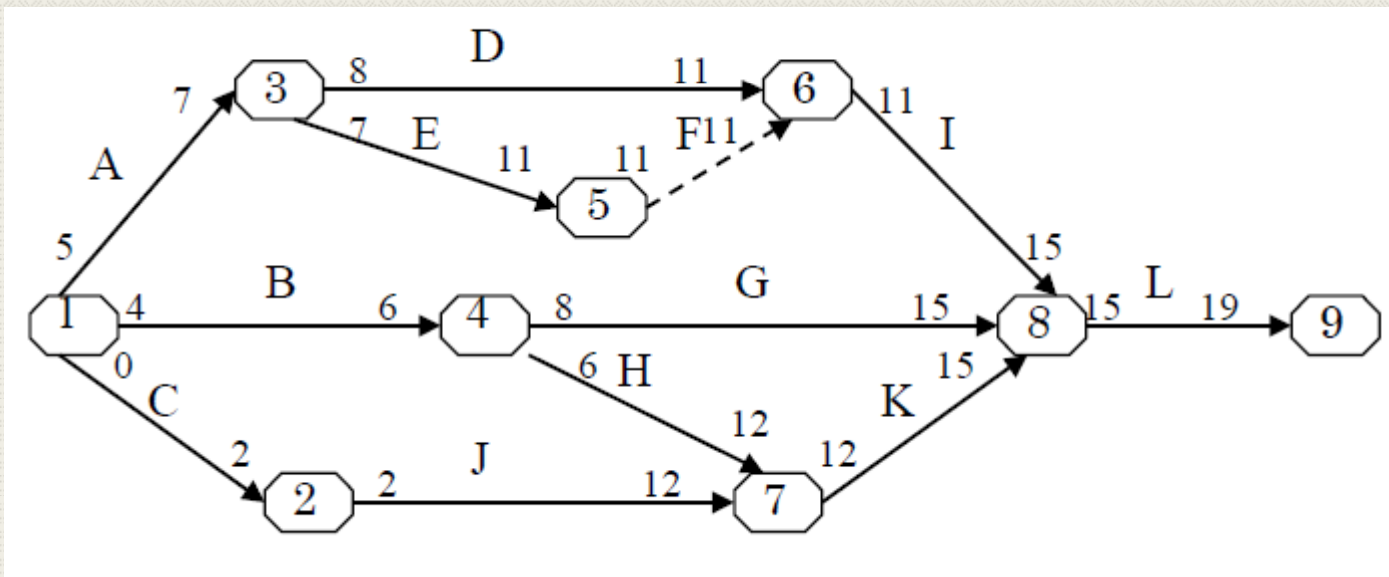
## 2. Mô Hình Mạng PERT

- Để xác định EST chúng ta có quy tắc “*thời điểm bắt đầu sớm nhất*”: *thời điểm bắt đầu sớm nhất của một hoạt động rời một nút nào đó là thời điểm muộn nhất trong các thời điểm kết thúc sớm nhất đối với các hoạt động đi vào nút đó*



## 2. Mô Hình Mạng PERT

- Bước tiếp theo là xác định thời điểm bắt đầu muộn nhất và thời điểm kết thúc muộn nhất (LST và LFT – *Latest start time* và *Latest finish time*) cho từng hoạt động.



## 2. Mô Hình Mạng PERT

- **Xác định hoạt động găng, đường găng**
- Hoạt động găng là hoạt động mà
- $LST - EST = LFT - EFT = 0$ , hay  $[EST, EFT] \equiv [LST, LFT]$
- $Slack = LST - EST = 0$
- $Slack = LFT - EFT = 0$  (độ trễ cho phép bằng 0).
- *Giải thích: Slack  $\equiv$  độ nới lỏng (độ trễ).*
- Trong ví dụ đang xét, các hoạt động găng là:  $C \rightarrow J \rightarrow K \rightarrow L$  và tạo thành đường găng (*Critical Path*). Vì vậy, phương pháp mạng PERT còn có tên là phương pháp đường găng (*CPM – Critical Path Method*).
- **Xác định đường găng bằng phần mềm Lingo (tự sv tìm hiểu)**

## 2. Mô Hình Mạng PERT

- Thời gian thực hiện từng hoạt động của dự án nói chung là một lượng biến động khó dự đoán trước, chúng ta giả thiết chúng là các biến ngẫu nhiên. Giả sử ta có các số liệu ước tính về thời gian thực hiện các hoạt động của dự án a, m, b.
- Lúc đó thời gian trung bình và độ lệch chuẩn thời gian thực hiện các hoạt động đượctính theo công thức  $t = (a + 4m + b) / 6$



## 2. Mô Hình Mạng PERT

Hoạt động	Hoạt động kề trước	Thời gian ước tính				
		a (sớm nhất)	m (nhiều khả năng xảy ra nhất)	b (muộn nhất)	t (thời gian trung bình)	$\sigma$ (độ lệch tiêu chuẩn, độ biến thiên)
A	–	1	2	3	2	1/3
B	–	1	2	3	2	1/3
C	–	1	2	3	2	1/3
D	A	1	2	9	3	4/3
E	A	2	3	10	4	4/3
F	E	0	0	0	0	0
G	B	3	6	15	7	2
H	B	2	5	14	6	2
I	D, F	1	4	7	4	1
J	C	4	9	20	10	8/3
K	H, J	1	2	9	3	4/3
L	G, I, K	4	4	4	4	0

## 2. Mô Hình Mạng PERT

- Bước tiếp theo là lập sơ đồ mạng cho dự án với các thời gian trung bình  $t$  và tìm đường găng. Đường găng là  $C \rightarrow J \rightarrow K \rightarrow L$  bao gồm các hoạt động găng  $C, J, K$  và  $L$ . Các hoạt động này có độ trễ cho phép bằng 0, hay nói cách khác, không cho phép sự chậm trễ nào
- Thời gian thực hiện dự án là một lượng ngẫu nhiên tính theo công thức:  $T = TC + TJ + TK + TL$ . Ta tìm kì vọng của  $T$  (thời gian trung bình thực hiện dự án) theo công thức:  $m = mT = tC + tJ + tK + tL = 2 + 10 + 3 + 4 = 19$  (tuần).

## 2. Mô Hình Mạng PERT

- Tính độ lệch chuẩn của thời gian thực hiện dự án:

$$\sigma = \sigma_T = \sqrt{\sigma_C^2 + \sigma_J^2 + \sigma_K^2 + \sigma_L^2} = \sqrt{(1/3)^2 + (8/3)^2 + (4/3)^2 + 0} = 3.$$

- Ta coi T là biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn  $N(m=19, \sigma=3)$
- Ta tính được

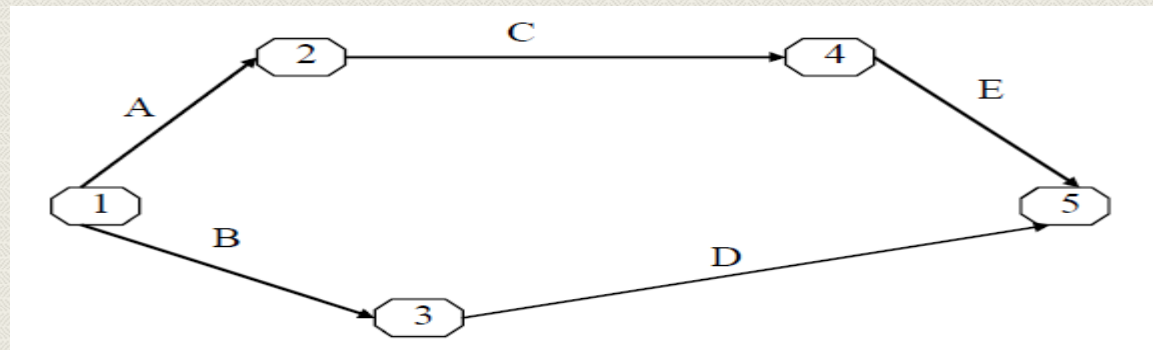
$$P(T \leq 21) = 75\% \text{ và } P(T \leq 23) = 90\%$$

## 2. Mô Hình Mạng PERT

- **2.3. Điều chỉnh dự án khi kế hoạch một số hoạt động bị phá vỡ**

**Ví dụ :** Đôi khi trong quá trình thực hiện dự án, kế hoạch của một số hoạt động bị phá vỡ. Chính vì vậy, khi phát hiện dự án đang bị chậm so với kế hoạch đề ra ta cần định lại thời gian thực hiện (thời gian rút gọn) một số hoạt động trong giai đoạn tới. Xét các dữ kiện cho trong hình và bảng dưới đây

## 2. Mô Hình Mạng PERT



Hoạt động	Thời gian định mức	Thời gian rút gọn	Kinh phí bổ sung/1đơn vị thời gian rút gọn (triệu đồng)
A	6	4	2
B	4	3	3
C	3	2	1
D	8	6	1,5
E	7	4	0,5

## 2. Mô Hình Mạng PERT

- Sau khi có thời gian định mức cho các hoạt, dễ dàng tìm được thời gian tối thiểu cần thiết để hoàn thành kế hoạch là 16 (tuần). Tuy nhiên do yêu cầu mới, cần rút gọn thời gian hoàn thành dự án trong vòng (không vượt quá) 10 (tuần).
- Muốn vậy ta thực hiện các điểm sau:
  - Tìm thời gian tối thiểu dự định thực hiện dự án (16 tuần) và tìm đường găng.
  - Ước tính thời gian rút gọn tối đa (cột 3).
  - Khi rút gọn thời gian trên đường găng cũng phải chú trọng đồng thời các cung đường khác.

## 2. Mô Hình Mạng PERT

- Ta thấy cần thực hiện A, C và E với thời gian rút gọn tối đa (4, 2, 4) để tổng các thời gian thực hiện các hoạt động giảm là 10 tuần), đồng thời rút gọn các hoạt động B và D ở mức cho phép:
- Phương án 1: rút bớt thời gian thực hiện hoạt động B một tuần và rút bớt D một tuần.
- Phương án 2: không rút bớt B và rút bớt D hai tuần.
- Bài toán đặt ra là rút ngắn dự án như thế nào để chi phí tăng giá là nhỏ nhất?

## 2. Mô Hình Mạng PERT

**2.4. Tính thời gian rút gọn tối ưu bằng phương pháp đơn hình (tự nghiên cứu)**

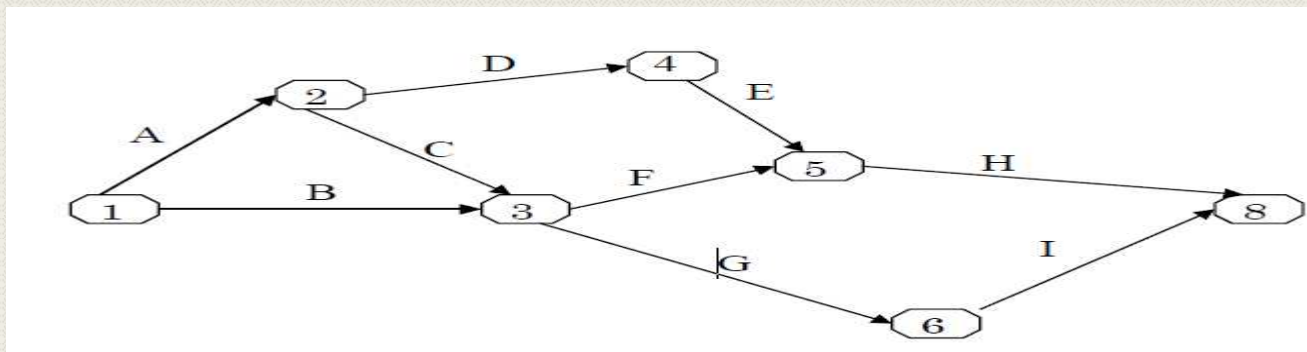
**2.5. Áp dụng mạng PERT trong phân tích chi phí và quản lý tài chính dự án**

- **Ví dụ :** Chúng ta xem xét dự án với các dữ kiện cho trong bảng và hình dưới đây. Tính được thời gian tối thiểu để hoàn thành dự án là 15 (tháng) ?.



## 2. Mô Hình Mạng PERT

Hoạt động	EST	LST	Thời gian thực hiện (tháng)	Tổng chi phí (triệu đồng)	Chi phí/một tháng (triệu đồng)
A	0	0	3	30	10
B	0	8	2	200	100
C	3	9	1	40	40
D	3	3	4	20	5
E	7	7	5	75	15
F	4	10	2	100	50
G	4	10	1	75	75
H	12	12	3	18	6
I	5	11	4	240	60



## 2. Mô Hình Mạng PERT

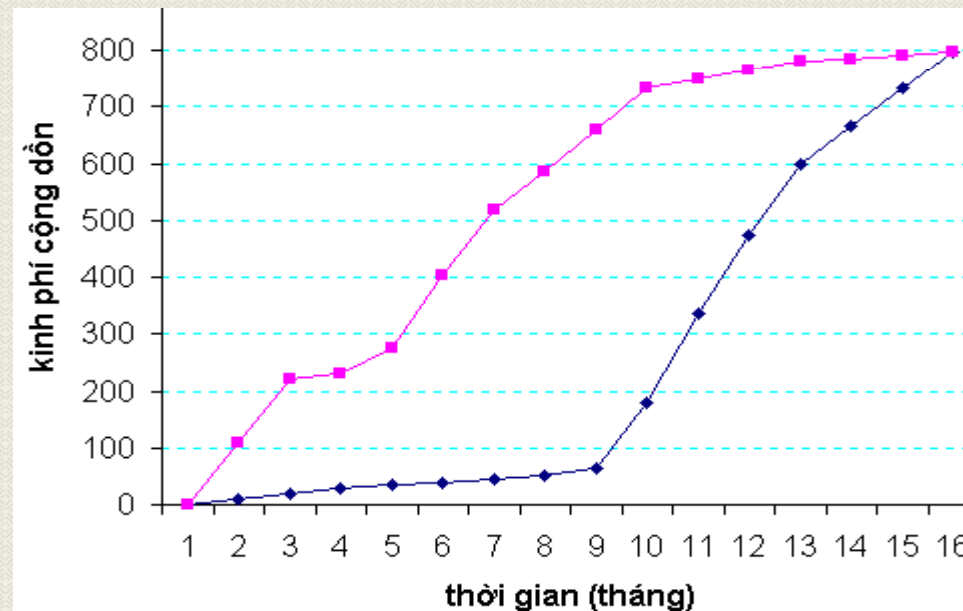
- Nguyên tắc điều hành tài chính một dự án là:
  - Luồng kinh phí phải được đưa vào dần dần sao cho đáp ứng được tiến độ dự án.
  - Nếu kinh phí đưa vào thừa hoặc thiếu (theo tiến độ) thì phải kịp thời điều chỉnh.
  - Cần nắm bắt được: những hoạt động nào không dùng hết kinh phí dự kiến, những hoạt động nào sử dụng kinh phí nhiều hơn dự kiến để có sự điều chỉnh thích hợp.
  - Các báo cáo định kì cho phép kiểm soát được dự án về tiến độ và luồng kinh phí.

# Bảng số liệu cho giải ngân sớm nhất và muộn nhất

T.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	10 10	10 10	10 10												
B	100	100							100	100					
C				40						40					
D				5 5	5 5	5 5	5 5								
E								15 15	15 15	15 15	15 15	15 15			
F					50	50					50	50			
G					75						75				
H													6 6	6 6	6 6
I						60	60	60	60			60	60	60	60
Σ	110 10	110 10	10 10	45 5	130 5	115 5	65 5	75 15	75 115	15 155	15 140	15 125	6 66	6 66	6 66
Σ+	110 10	220 20	230 30	275 35	405 40	520 45	585 50	660 65	735 180	750 335	765 475	780 600	786 666	792 732	798 798

## 2. Mô Hình Mạng PERT

- Lập bảng theo dõi kinh phí cho dự án từ tháng 1 đến tháng 15
- Vẽ đồ thị miền kinh phí khả thi



## 2. Mô Hình Mạng PERT

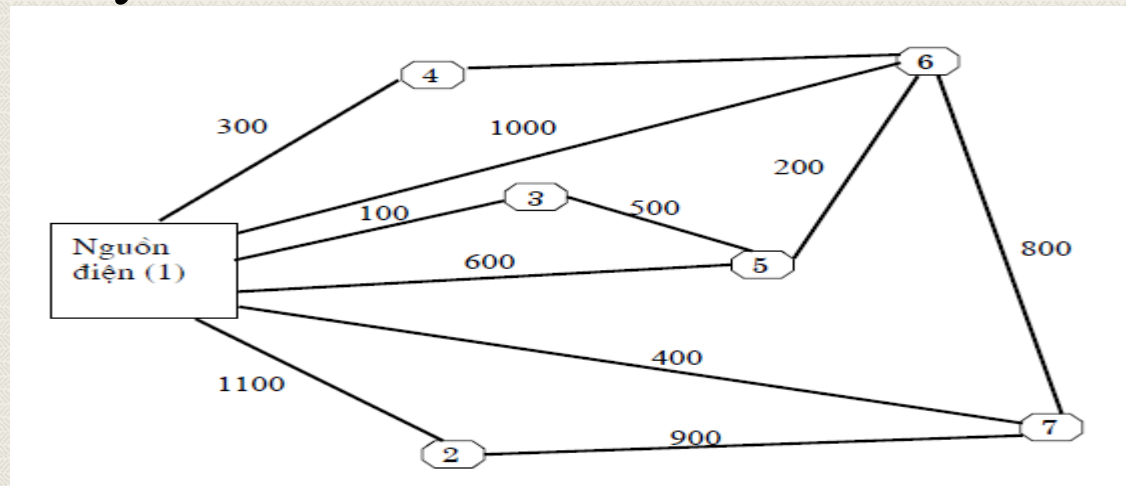
- **Tóm tắt:**

Các vấn đề cơ bản cần giải quyết khi áp dụng phương pháp PERT hay CPM trong theo dõi và đánh giá dự án là:

- Xác định được sơ đồ mạng PERT của dự án.
- Tìm được đường găng và các hoạt động găng.
- Tính được độ tin cậy ứng với các mốc thời hạn hoàn thành dự án khi số liệu là ngẫu nhiên.
- Biết cách điều chỉnh thời gian rút gọn khi tiến độ thực hiện dự án là chậm so với kế hoạch.
- Phân tích chi phí và điều hành kinh phí dự án.

## 3. Một Số Mô Hình Mạng Khác

- **3.1 Bài toán cây khung tối thiểu**
- Ví dụ: Mắc cáp truyền hình trong khu vực dân cư từ trạm phát đến được 7 hộ gia đình với chi phí đường dây là bé nhất. Sơ đồ khoảng cách từ trạm phát tới các hộ gia đình như dưới đây



## 3.1 Bài toán cây khung tối thiểu

- **Thuật giải Prim**
- *Bước khởi tạo: Lập bảng (ma trận) khoảng cách giữa các nút mạng. Trong bảng trên, chọn cột bất kì (ví dụ cột 1, tức là ta chọn nút 1 để bắt đầu), gạch bỏ cột vừa chọn ra khỏi bảng.*

### **Các bước lặp**

- **Bước 1:** Đánh dấu vào hàng tương ứng (hàng cùng chỉ số) với cột vừa chọn. Trên các hàng đã được đánh dấu tìm ô có giá trị nhỏ nhất.
- **Bước 2:** Chọn cột tương ứng với ô vừa tìm được (*cột 3 biểu diễn nút chọn mới, ghi cung đường vừa tìm được  $1 \rightarrow 3$* ), rồi gạch bỏ nó đi (*gạch bỏ cột 3*). Nếu trong bảng vẫn còn các cột chưa gạch bỏ hết thì quay về bước 1, nếu trái lại chuyển sang bước kết thúc.
- **Bước kết thúc.** Nếu tất cả các cột đã bị gạch bỏ hết thì dừng với tất cả các cung đường liên thông tìm được tạo nên cây khung tối thiểu.

## 3.1 Bài toán cây khung tối thiểu

	(Nút hàng)	√		√	Nút (cột)			
		1	2	3	4	5	6	7
√	1	0	11	1	3	6	10	4
	2	11	0	M	M	M	M	9
√	3	1	M	0	M	5	M	M
√	4	3	M	M	0	M	7	M
	5	6	M	5	M	0	2	M
...	6	10	M	M	7	2	0	8
√	7	4	9	M	M	M	8	0

- Kết thúc thuật giải prim ta thu được cây khung  $1 \rightarrow 3, 1 \rightarrow 4, 1 \rightarrow 7, 3 \rightarrow 5, 5 \rightarrow 6$  và  $7 \rightarrow 2$ .

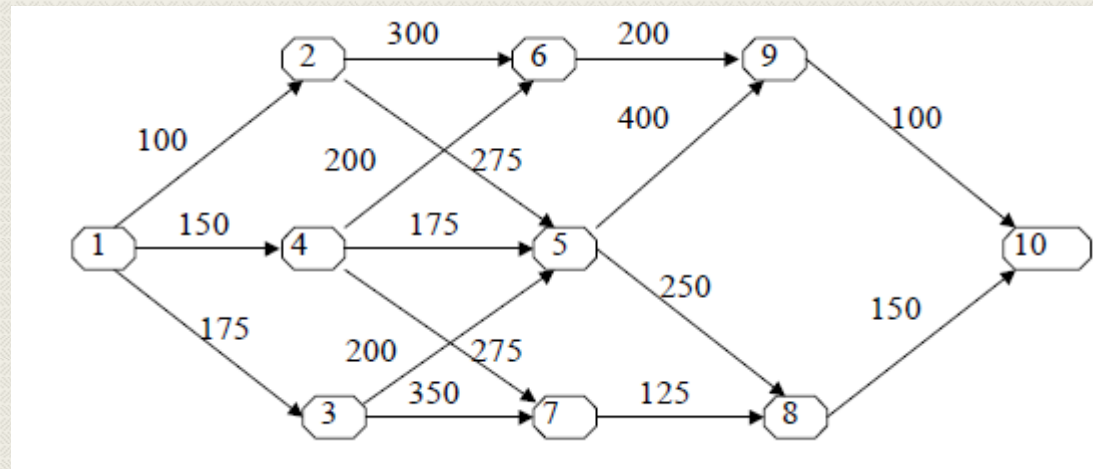


## 3.2 Quy hoạch động

### 3.2. Bài toán tìm đường đi ngắn nhất và quy hoạch động

**Ví dụ: Bài toán tìm đường đi ngắn nhất.**

Có một người đi xuất phát từ nút 1 và kết thúc hành trình ở nút 10 theo hành trình như hình dưới đây.



## 3.2 Quy hoạch động

- *Nguyên tắc tối ưu Bellman trong quy hoạch động*
- Chúng ta chia bài toán thành nhiều giai đoạn, tức là thành nhiều bài toán nhỏ. Tại mỗi giai đoạn ta cần tìm phương án tối ưu là các phương án tốt nhất của tình trạng hiện có, xét trong mối quan hệ với các phương án tối ưu đã tìm được của các giai đoạn trước.
- Ta có thể giải quyết bài toán dần theo từng giai đoạn theo cách *tính toán tiến hoặc tính toán lùi (backward computing)*

## 3.2 Quy hoạch động

- Các giai đoạn tính toán của quy hoạch động

Giai đoạn	Đầu vào	Đầu ra	Đường đi tối ưu	Khoảng cách tới đích
Giai đoạn I	8	10	8 → 10	150
	9	10	9 → 10	100
Giai đoạn II	5	8	5 → 8	400
	6	9	6 → 9	300
	7	9	7 → 8	275
Giai đoạn III	2	5	2 → 6	600
	3	6	3 → 5	600
	4	7	4 → 6	500
Giai đoạn IV		2	1 → 2	700
	1	3	1 → 3	775
		4	1 → 4	650

## 3.2 Quy hoạch động

- **Quy trình tính toán tổng quát**
  - Trước hết, cần chọn có các biến trạng thái (*state variables*) như mô tả trong bảng
  - Xác định hàm mục tiêu: Đặt  $F_i(x_i)$  là khoảng cách ngắn nhất tới đích tính tại giai đoạn  $i$
  - Lập hàm truy toán:  $F_{i+1}(x_{i+1}) = \text{Min} [F_i(x_i) + f_i(u_i)]$ , Min tìm theo mọi tổ hợp thích hợp  $x_i$  và  $u_i$ , trong đó  $u_i$  là biến điều khiển để điều khiển chuyển trạng thái từ trạng thái  $x_i$  sang  $x_{i+1}$  và  $f_i(u_i)$  là hiệu ứng của biến điều khiển tác động lên hàm truy toán (và lên hàm mục tiêu, nếu tính đến bài toán cuối cùng)

## 3.2 Quy hoạch động

- Bảng các biến trạng thái

Biến	Số trạng thái	Các trạng thái (nút)	Giá trị có thể xảy ra của các biến trạng thái
$x_4$	1	1	$x_4 = 1$
$x_3$	3	2, 3, 4	$x_3 = 2; x_3 = 3; x_3 = 4$
$x_2$	3	5, 6, 7	$x_2 = 5; x_2 = 6; x_2 = 7$
$x_1$	2	8, 9	$x_1 = 8; x_1 = 9$
$x_0$	1	10	$x_0 = 10$

## 3.2 Quy hoạch động

$F_0(x_0) = 0$	$x_0 = 10$	$u_0$	$f_0(u_0)$	$F_1(x_1)$
$x_1 = 8$	$+ u_0 = 150$	150	150	150
$x_1 = 9$	$+ u_0 = 100$	100	100	100

*Giai đoạn 2:*

$x_2$	$x_1 = 8$	$x_1 = 9$	$F_1(x_1) + f_1(u_1)$		$F_2(x_2) =$ $\text{Min}[F_1(x_1) + f_1(u_1)]$
			$x_1 = 8$	$x_1 = 9$	
5	$+u_1 = 250$	$+u_1 = 400$	400	500	$400 = 150 + 250$
6	-	$+u_1 = 200$	-	300	$300 = 100 + 200$
7	$+u_1 = 125$	-	275	-	$275 = 150 + 125$

## 3.2 Quy hoạch động

*Giai đoạn 3:*

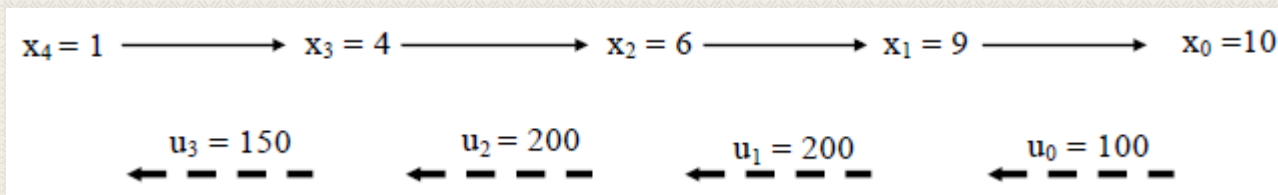
$x_3$	$x_2$			$F_2(x_2) + f_2(u_2)$			$F_3(x_3) = \text{Min}$ [ $F_2(x_2) + f_2(u_2)$ ]
	5	6	7	$x_2 = 5$	$x_2 = 6$	$x_2 = 7$	
2	$u_2 = 275$	$u_2 = 300$	–	675	600	–	600
3	$u_2 = 200$	–	$u_2 = 350$	600	–	625	600
4	$u_2 = 175$	$u_2 = 200$	$u_2 = 275$	575	500	550	500

*Giai đoạn 4:*

$x_4$	$x_3 = 2$	$x_3 = 3$	$x_3 = 4$	$F_3(x_3) + f_3(u_3)$			$F_4(x_4) = \text{Min}$ [ $F_3(x_3) + f_3(u_3)$ ]
				$x_3 = 2$	$x_3 = 3$	$x_3 = 4$	
1	$u_3 = 100$	$u_3 = 175$	$u_3 = 150$	700	775	650	650

## 3.2 Quy hoạch động

- *Đáp số:  $F_4(x_4) = F_4(1) = 650$  với đường đi ngắn nhất*



- **Một số ứng dụng của Quy hoạch động (xem giáo trình)**



# Thuật toán Dijkstra để tìm đường đi ngắn nhất

- **Nhắc lại Bài toán:**

Cho  $G = (V, E)$  đơn, liên thông, có trọng số dương ( $w(u,v) > 0$  với mọi  $u$  khác  $v$ ). Tìm đường đi ngắn nhất từ  $u_0$  đến  $v$  và tính khoảng cách  $d(u_0, v)$ .

- **Phương pháp:**

Xác định tuần tự các đỉnh có khoảng cách đến  $u_0$  từ nhỏ đến lớn.  
Trước tiên đỉnh có khoảng cách nhỏ nhất đến  $u_0$  là  $u_0$ .

Trong  $V \setminus \{u_0\}$  tìm đỉnh có khoảng cách đến  $u_0$  nhỏ nhất (đỉnh này phải là một trong các đỉnh kề với  $u_0$ ), giả sử đó là  $u_1$ .

Trong  $V \setminus \{u_0, u_1\}$  tìm đỉnh có khoảng cách đến  $u_0$  nhỏ nhất (đỉnh này phải là một trong các đỉnh kề với  $u_0$  hoặc  $u_1$ ), giả sử đó là  $u_2$ .

Tiếp tục như trên cho đến bao giờ tìm được khoảng cách từ  $u_0$  đến mọi đỉnh.

Nếu  $G$  có  $n$  đỉnh thì:  $0 = d(u_0, u_0) < d(u_0, u_1) \leq d(u_0, u_2) \leq \dots \leq d(u_0, u_{n-1})$

# Thuật toán Dijkstra

- **Thuật toán Dijkstra**

**Bước 1:**

$i := 0$

$S := V \setminus \{u_0\}$

$L(u_0) := 0$

Với mọi  $v \in S$ ,  $L(v) := \infty$  và được đánh dấu bởi  $(\infty, -)$

Nếu  $n = 1$  thì xuất  $d(u_0, u_0) = 0 = L(u_0)$

**Bước 2:**

Với mọi  $v \in S$  và kề với  $u_i$  (nếu đồ thị có hướng thì  $v$  là đỉnh sau của  $u_i$ ),

$L(v) := \min\{L(v), L(u_i) + w(u_i, v)\}$

Xác định  $k := \min\{L(v), v \in S\}$

Nếu  $k = L(v_j)$  thì xuất  $d(u_0, v_j) = k$  và đánh dấu  $v_j$  bởi  $(L(v_j), u_i)$

$u_{i+1} := v_j$

$S := S \setminus \{u_{i+1}\}$

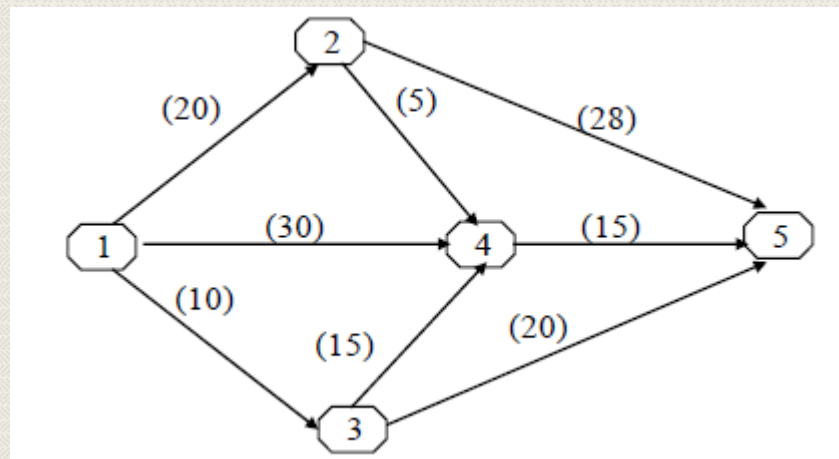
**Bước 3:**

$i := i + 1$

Nếu  $i = n - 1$  thì kết thúc, nếu không thì quay lại Bước 2.

## 3.4 Bài Toán Tìm Luồng Cực Đại

- **Ví dụ:** Xét mạng đường đi có hướng từ nút 1 tới nút 5 với các tải năng tối đa của các cung đường đã biết như hình dưới. Bài toán đặt ra là: Cần xác định được luồng cực đại (Maximal Flow) giữa nút 1 (nút nguồn) và nút 5 (nút hút).



## 3.4 Bài Toán Tìm Luồng Cực Đại

- Về mặt toán học, ta gọi một *luồng chấp nhận được* là một *véc tơ*  $(x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{24}, x_{25}, x_{34}, x_{35}, x_{45})$ ,  $x_{ij} \in [0, x_{ij}^{\max}] \forall$  cung  $(i, j)$  cho trên mạng đường đi có hướng và thoả mãn:
- Ở một nút bất kì thì luồng vào và ra là cân bằng.
- Luồng ra ở nút nguồn bằng luồng vào ở nút đích và bằng  $v$ . Lúc này, một *luồng cực đại* là một luồng chấp nhận được sao cho giá trị  $v$  của luồng đạt được là lớn nhất

## 3.4 Bài Toán Tìm Luồng Cực Đại

- *Thuật toán Ford – Fulkerson*
- *Bước khởi tạo. Tìm một luồng chấp nhận được.*
- *Các bước lặp.*

**Bước 1:** Tìm một đường tăng luồng bằng thủ tục đánh dấu. Nếu không có thì chuyển về bước kết thúc. Còn nếu có thì xét giá trị tăng luồng tương ứng  $\Delta(P)$ .

**Bước 2:** Nếu  $\Delta(P) < +\infty$  thì đẩy thêm  $\Delta(P)$  đơn vị tải năng dọc theo đường tăng luồng  $P$  để được luồng chấp nhận được mới rồi quay về bước 1. Nếu trái lại,  $\Delta(P) = +\infty$  thì về bước kết thúc.

*Bước kết thúc. Tìm luồng cực đại với giá trị hữu hạn hoặc kết luận bài toán có luồng chấp nhận được với giá trị  $v = +\infty$ .*

**Làm sao để tìm luồng tăng?**

## 3.4 Bài Toán Tìm Luồng Cực Đại

- **Thủ tục đánh dấu**
- *Bước khởi tạo. Gọi  $I$  là tập nút đã được đánh dấu  $I$ , ban đầu đặt  $I = \{\text{nút nguồn}\}$ .*
- *Các bước lặp.*

**Bước 1:** Nếu  $I$  chứa nút hút hoặc  $I = \emptyset$  thì về bước kết thúc. Nếu trái lại, chọn nút bất kỳ  $i \in I$  để quét (đồng thời đưa nó ra khỏi tập  $I$ ), tức là xét tất cả các nút  $j$  cạnh  $i$ , nói cách khác, xét mọi cung tiến có dạng  $(i, j)$  là cung trên mạng đường đi một chiều đã cho và tương ứng với nó là cung lùi  $(j, i)$ .

**Bước 2:** Xét các cung tiến  $(i, j)$  mà có  $j$  chưa được đánh dấu (không nằm trong tập  $I$ ) thì ta đưa  $j$  vào tập  $I$  với điều kiện  $x_{ij}$  (hiện có)  $< \max x_{ij}$ , còn nếu xét các cung lùi thì điều kiện đó là  $x_{ij}$  (hiện có)  $> 0$  và quay trở lại bước 1. Chú ý một khi nút hút được đưa vào tập  $I$  thì cũng về ngay bước kết thúc.

- *Bước kết thúc. Tìm đường tăng luồng  $P$*

## 3.4 Bài Toán Tìm Luồng Cực Đại

Bước	Tìm đường tăng luồng	Giá trị tăng luồng	Các tải năng của các cung trên luồng hiện tại (luồng chấp nhận được)	Giá trị luồng
Bước khởi tạo			$x_{ij} = 0 \forall$ cung $(i, j)$	0
Bước lặp 1	$1 \rightarrow 2 \rightarrow 5$	20	$x_{12} = x_{25} = 20, x_{ij} = 0 \forall$ cung $(i, j)$ khác	20
Bước lặp 2	$1 \rightarrow 3 \rightarrow 5$	10	$x_{12} = x_{25} = 20, x_{13} = x_{35} = 10, x_{ij} = 0 \forall$ cung $(i, j)$ khác	30
Bước lặp 3	$1 \rightarrow 4 \rightarrow 5$	15	$x_{12} = x_{25} = 20, x_{13} = x_{35} = 10, x_{14} = x_{45} = 15, x_{ij} = 0 \forall$ cung $(i, j)$ khác	45