PHÂN TÍCH MARKOV VÀ ỨNG DỤNG

1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ XÍCH MARKOV

1.1. Một số định nghĩa

- ***Định nghĩa 1***

Xét một hệ thống (có thể là hệ thống vật lí, hệ thống sinh thái hay hệ thống dịch vụ,…) tiến triển theo thời gian. Gọi X(t) là vị trí (trạng thái) của hệ tại thời điểm t. Như vậy ứng với mỗi thời điểm t, X(t) chính là một biến ngẫu nhiên mô tả vị trí (trạng thái) của hệ thống. Quá trình $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ được gọi là một *quá trình ngẫu nhiên.*

1. Các khái niệm cơ bản về xích Markov

- Tập hợp các vị trí có thể có của hệ gọi là *không gian trạng thái*, kí hiệu là S.
- Nếu sự tiến triển của hệ trong tương lai chỉ phụ thuộc vào hiện tại và hoàn toàn độc lập với quá khứ (*tính không nhớ). Thì quá trình ngẫu nhiên X(t) được* gọi là *quá trình Markov.*

1. Các khái niệm cơ bản về xích Markov

- ***Định nghĩa 2***

Nếu không gian trạng thái S gồm một số hữu hạn hoặc vô hạn đếm được các trạng thái thì quá trình Markov X(t) được gọi là *xích Markov. Lúc này, có thể kí hiệu S = {1,* 2, 3,...}, tức là các trạng thái được đánh số. Hơn nữa, nếu tập các giá trị t không quá đếm được (chẳng hạn, t = 0, 1, 2,...) thì ta có xích Markov với *thời gian rời rạc, hay* xích Markov rời rạc. Nếu $t \in [0, \infty)$ thì ta có xích Markov với *thời gian liên tục, hay xích* Markov liên tục.

- ***Định nghĩa 3***

Xét một xích Markov. Nếu xác suất chuyển trạng thái p(s, i, t, j) = p(s+h, i, t+h, j), $\forall i, \forall j, \forall s, \forall t$ và $\forall h > 0$ thì ta nói rằng xích Markov *thuần nhất theo thời gian.*

1.2 Ma trận xác suất chuyển trạng thái và phân phối dừng

Ví dụ 2:. Trong một khu phố 1000 dân (khách hàng) có 3 siêu thị là A, B và C (A, B, C được coi là các vị trí 1, 2, 3 của hệ thống siêu thị này). Giả sử rằng, trong từng tháng mỗi khách hàng luôn trung thành với một siêu thị. Ngoài ra, cũng giả sử rằng trong tháng đầu số khách vào các siêu thị lần lượt là 200, 500 và 300; tức là có 20% khách hàng vào siêu thị A, 50% vào B và 30% vào C. Như vậy, có thể dự đoán rằng một khách hàng vào A với xác suất 0,2; vào B với xác suất 0,5 và vào C với xác suất 0,3. Để mô tả tình trạng phân chia thị phần trong tháng đầu (tháng 0) của hệ thống siêu thị trên,

1.2 Ma trận xác suất chuyển trạng thái và phân phối dừng

chúng ta thiết lập biến ngẫu nhiên X(0) với quy tắc: nếu khách hàng mua hàng ở siêu thị A thì đặt X(0)=1, ở siêu thị B thì đặt X(0) = 2, còn ở siêu thị C thì X(0) = 3

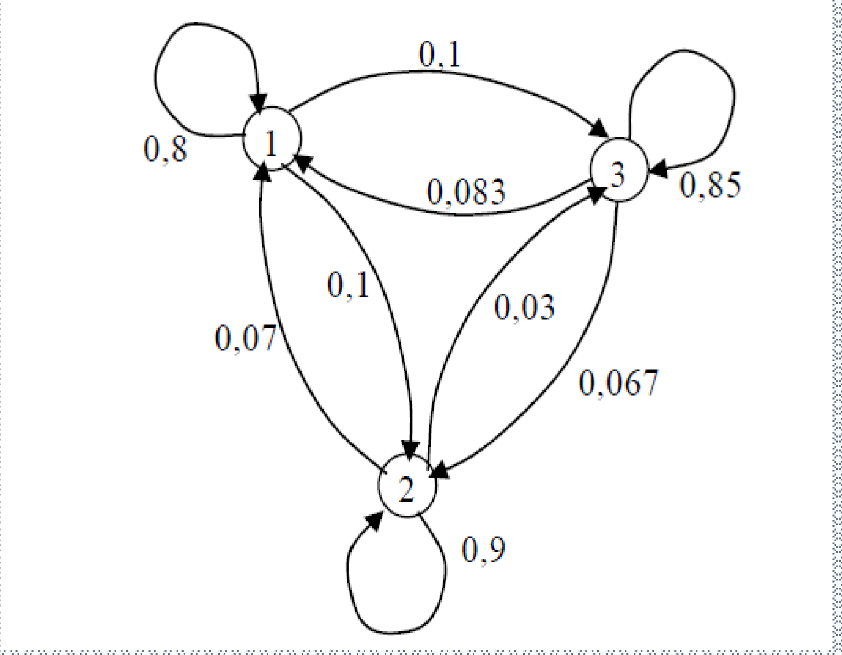
- Kí hiệu P[X(0) = 1] = π1(0), P[X(0) = 2] = π2(0), P[X(0) = 3] = π3(0) thì véc tơ Π(0) =[π1(0), π2(0), π3(0)] = [0,2; 0,5; 0,3] được gọi là *véc tơ phân phối xác suất tại thời điểm t = 0*

hay *véc tơ phân phối ban đầu*

1.2 Ma trận xác suất chuyển trạng thái và phân phối dừng

- Ở các tháng sau ta có ma trận xác suất và sơ đồ chuyển trạng thái

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}07 & 0{,}9 & 0{,}03 \\ 0{,}083 & 0{,}067 & 0{,}85 \end{bmatrix} = [p_{ij}]_{3\times 3}.$$



1.2 Ma trận xác suất chuyển trạng thái và phân phối dừng

- Véc tơ phân phối xác suất tại thời điểm t = 1 là Π(1) = [π1(1) , π2(1) , π3(1)] cho biết tỉ lệ phần trăm khách hàng vào các siêu thị A, B và C trong tháng 1. Bằng phép tính ma trận cũng tìm được Π(1) như sau:

$$\Pi^{(1)} = \Pi^{(0)} \times P=[0{,}2\ 0{,}5\ 0{,}3]\times\begin{bmatrix}0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1\\ 0{,}07 & 0{,}9 & 0{,}03\\ 0{,}083 & 0{,}067 & 0{,}85\end{bmatrix} = [0{,}2199\ 0{,}4901\ 0{,}2900].$$

$$\Pi^{(2)} = \Pi^{(1)} \times P = [0{,}2199\ 0{,}4901\ 0{,}2900] \times \begin{bmatrix}0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1\\ 0{,}07 & 0{,}9 & 0{,}03\\ 0{,}083 & 0{,}067 & 0{,}85\end{bmatrix}$$

$$= [0{,}234297\ 0{,}48251\ 0{,}283193].$$

1.2 Ma trận xác suất chuyển trạng thái và phân phối dừng

- Dễ thấy Π(2) = Π(1)×P=Π(0)×P2. Tương tự, có thể chứng minh được Π(n+m) = Π(n) ×P(m), trong đó Π(n+m) và Π(n) là các véc tơ phân phối tại các thời điểm t = m + n và t = n, còn P(m) là ma trận xác suất chuyển trạng thái sau m bước.
- Có thể chứng minh dễ dàng xích Markov trong ví dụ này là xích Markov rời rạc và thuần nhất theo thời gian
- Câu hỏi đặt ra là lim Π(n) =?
- Xuất phát từ Π(n+1) = Π(n) × P, cho qua giới hạn cả hai vế khi n → ∞ ta có: Π = Π ×P, hay Π ×(I - P) = 0.
- Trong ví dụ trên ta tìm được Π = [0,273 0,454 0,273].

1.2 Ma trận xác suất chuyển trạng thái và phân phối dừng

- ***Định nghĩa 5***

Xét xích Markov rời rạc và thuần nhất với ma trận chuyển P = [pij]N×N. Lúc đó, véc tơ phân phối xác suất Π = [π1, π2,..., πN] thỏa mãn điều kiện Π ×(I - P) = 0 được gọi là *phân phối dừng của xích Markov đã cho.*

- Có thể thấy ngay, phân phối dừng Π không phụ thuộc vào Π(0) mà chỉ phụ thuộc vào ma trận P.

1.3. Các tính chất và định lí

- Tính chất

1/ $p^{(n+m)}_{ij} = \sum_{k=1}^{N} p^{(n)}_{ik}\, p^{(m)}_{kj}$ (đây là phương trình *Chapman-Kolmogorov*).

2/ $P^{(2)} = P \times P = P^2$, $P^{(n)} = P^n$ và $P^{(n+m)} = P^{(n)} \times P^{(m)}$.

3/ $\Pi^{(n+m)} = \Pi^{(n)} \times P^{(m)}$.

1.3. Các tính chất và định lí

- Định lí

1/Giả sử P là ma trận xác suất chuyển chính quy, tức là tồn tại chỉ số n_0, sao cho $\forall$ i, j thì xác suất chuyển từ i đến j sau n_0 bước là một số dương: $p_{ij}^{(n_0)} > 0$. Khi đó tồn tại $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_N > 0$ và $\pi_1 + \pi_2 + ... + \pi_N = 1$ để cho $\lim_{n\to\infty} p^{(n)}_{ij} = \pi_j$, không phụ thuộc vào i.

Các số $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_N$ được tìm từ hệ phương trình

$$x_j = \sum_{k=1}^{N} x_k p_{kj},\ j = 1, 2, ..., N,\ x_j \geq 0\ \forall j \text{ và } \sum_{j=1}^{N} x_j = 1.$$

2/Nếu có các số $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_N$ thoả mãn điều kiện $\pi_1 + \pi_2 + ... + \pi_N = 1$ và $\lim_{n\to\infty} p^{(n)}_{ij} = \pi_j$, không phụ thuộc vào i thì ma trận P là ma trận chính quy.

2.1. Tìm cân bằng thị phần

- Trở lại ví dụ đã xét, với ma trận chuyển trạng thái P đã cho và tính toán phân phối dừng thì khi thời gian đủ dài thì tỷ lệ khách hàng hàng vào các siêu thị A, B, C tương ứng là 27,3%, 45,4% và 27,3%.
- Phân phối dừng này có thể tìm được từ hệ $\Pi \times (I - P) = 0$ và điều kiện tổng các tỷ lệ bằng 1.

2.2. Chính sách thay thế vật tư thiết bị

- Trong một hệ thống điện kĩ thuật, các thiết bị cùng một loại được phân ra các trạng thái sau đây: vừa mới thay, còn tốt, vẫn dùng được và đã bị hỏng. Theo số liệu thống kê được, ta có ma trận xác suất chuyển trạng thái như sau:

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 1,0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

- Sau mỗi tuần (xem hàng đầu của ma trận P) có 0%, 80%, 20% và 0% số các thiết bị mới thay chuyển sang trạng thái mới thay, còn tốt, vẫn dùng được và đã bị hỏng.

2.2. Chính sách thay thế vật tư thiết bị

- Xuất phát từ Π(n+1) = Π(n) × P, cho qua giới hạn cả hai vế khi n → ∞ ta có: Π = Π × P, hay Π ×(I - P) = 0.
- Kí hiệu x1 = π1, x2 = π2, x3 = π3 và x4 = π4 ta sẽ có hệ:

$$\begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ -0,8x_1 + 0,4x_2 = 0 \\ -0,2x_1 - 0,4x_2 + 0,5x_3 = 0 \\ -0,5x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_4 = \dfrac{1}{6} \\ x_2 = x_3 = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

2.2. Chính sách thay thế vật tư thiết bị

- Vậy phân phối dừng $\Pi = [1/6\ 1/3\ 1/3\ 1/6]$.
- Giả sử rằng chi phí thay mới một thiết bị là 25 nghìn (đồng) và thất thu khi mỗi một thiết bị hỏng là 18,5 nghìn thì mỗi tuần hệ thống trên phải chi trung bình trên một thiết bị số tiền là: $(1/6)\times 25 + (1/6)\times 18{,}5 = 7{,}25$ nghìn/thiết bị/tuần.

2.2. Chính sách thay thế vật tư thiết bị

- Ta xét xét phương án thứ hai cho việc thay thế vật tư thiết bị với ma trận xác suất chuyển trạng thái sau đây:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0,8. & 0,2 \\ 0 & 0,6 & 0,4 \\ 1,0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Với ma trận P trên đây, phân phối dừng Π = [1/4 1/2 1/4]. Lúc này, mỗi tuần hệ thống trên phải chi trung bình trên một thiết bị số tiền là: (1/4)×25 + (0)×18,5 = 6,25 nghìn/thiết bị/tuần. Như vậy hệ thống sẽ tiết kiệm được 1 nghìn/thiết bị/một tuần. Vậy phương án sau tốt hơn phương án trước

2.3. Phân tích Markov trong dự báo thất thu cho các hợp đồng thực hiện trước

- Hợp đồng tại từng thời điểm của một công ty có thể rơi vào một trong các trạng thái sau:

– S0: hợp đồng được thanh toán,

– S1: hợp đồng không được thanh toán,

– S2: hợp đồng sẽ được thanh toán đúng thời hạn,

– S3: hợp đồng sẽ được thanh toán chậm.

2.3. Phân tích Markov trong dự báo thất thu cho các hợp đồng thực hiện trước

- Ma trận xác suất chuyển trạng thái (sau từng tháng):

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{bmatrix}$$

- Hiện tại công ti có các hợp đồng phải thanh toán đúng hạn với tổng số 500 triệu vàcác hợp đồng cho thanh toán chậm với tổng số 100 triệu. Hãy xác định trong tổng trên có bao nhiêu sẽ được thanh toán, còn bao nhiêu sẽ là nợ "xấu" không đòi được.

2.3. Phân tích Markov trong dự báo thất thu cho các hợp đồng thực hiện trước

- Có thể thấy ngay rằng các trạng thái S0 và S1 là các trạng thái "hấp thụ" (*absorbing state), tức là mọi hợp* đồng dù hiện đang ở trạng thái nào thì cuối cùng sau một thời gian nhất định cũng sẽ rơi vào một trong hai trạng thái trên. Trong khi đó các trạng thái S2 và S3 được gọi là các trạng thái truyền ứng (hay các trạng thái di chuyển).
- Để giải quyết câu hỏi trên ta phân tích như sau:

2.3. Phân tích Markov trong dự báo thất thu cho các hợp đồng thực hiện trước

- Xét ma trận chuyển P

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,2 & 0,1 \end{bmatrix} \text{(như trong bài toán trên)},$$

$$= \begin{bmatrix} J & O \\ K & M \end{bmatrix} \text{ với } J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} p_{20} & p_{21} \\ p_{30} & p_{31} \end{bmatrix}, O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} p_{22} & p_{23} \\ p_{32} & p_{33} \end{bmatrix},$$

- Trong đó pij là xác suất chuyển từ trạng thái Si sang trạng thái Sj sau một bước.

2.3. Phân tích Markov trong dự báo thất thu cho các hợp đồng thực hiện trước

- Xét uik là xác suất hấp thụ vào trạng thái Sk khi trạng thái ban đầu là Si, k = 0, 1, còn i = 2, 3.
- Gọi vi là thời gian trung bình cho tới khi rơi vào một trong các trạng thái hấp thụ nếu trạng thái ban đầu là Si, i = 2, 3.
- Gọi wij là thời gian trung bình xích Markov ở trong trạng thái Sj trước khi nó rơi vào một trong các trạng thái hấp thụ nếu trạng thái ban đầu là Si, i = 2, 3.

$$U = \begin{bmatrix} u_{20} & u_{21} \\ u_{30} & u_{31} \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} w_{22} & w_{23} \\ w_{32} & w_{33} \end{bmatrix},$$

2.3. Phân tích Markov trong dự báo thất thu cho các hợp đồng thực hiện trước

- Ta có:

$$U = (I - M)^{-1},\ V = (I - M)^{-1} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ và } W = (I - M)^{-1} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Quay trở lại ví dụ, ta tìm ma trận R = I - M và ma trận nghịch đảo của nó R−1, ở đây I là ma trận đơn vị cùng cỡ với ma trận M. Ta có:

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} 1{,}5254 & 0{,}3390 \\ 0{,}3390 & 1{,}1864 \end{bmatrix},$$

2.3. Phân tích Markov trong dự báo thất thu cho các hợp đồng thực hiện trước

- Ta tính được:

$$R^{-1} \times K = \begin{bmatrix} 0,8983 & 0,1017 \\ 0,6441 & 0,3559 \end{bmatrix}.$$

- Ý nghĩa: Trong số các hợp đồng hiện tại ở trạng thái S2 (phải thanh toán đúng kì hạn) cuối cùng sau một thời gian nhất định có 89,83% sẽ rơi vào trạng thái S0 (được thanh toán) và 10,17% sẽ rơi vào trạng thái S1 (không được thanh toán). Tương tự cho các hợp đồng hiện tại ở trạng thái S3 (thanh toán chậm)

2.3. Phân tích Markov trong dự báo thất thu cho các hợp đồng thực hiện trước

- Ta thực hiện phép tinh:

$$[500\ 100]\times\begin{bmatrix}0{,}8983 & 0{,}1017\\ 0{,}6441 & 0{,}3559\end{bmatrix}=[459{,}32\ 140{,}68],$$

- Như vậy trong 500 triệu phải thanh toán đúng kì hạn và 100 triệu thanh toán chậm cuối cùng sẽ có 459,32 triệu được thanh toán và 140,68 triệu là nợ "xấu" không đòi được. Để cải thiện tình trạng này, công ti cần nghiên cứu tìm ra một chính sách tín dụng hợp lí hơn.

2.4. Tìm phân phối giới hạn cho một hệ thống kĩ thuật

- Một hệ thống kĩ thuật có hai chi tiết có thể bị hỏng ở bất kì thời điểm nào. Tại mỗi thời điểm hệ thống có thể rơi vào một trong những trạng thái sau
- S0: cả 2 chi tiết tốt;
- S1: chi tiết 1 hỏng, chi tiết 2 bình thường;
- S2: chi tiết 1 bình thường, chi tiết 2 hỏng;
- S3: cả hai chi tiết đều hỏng.
- Biến X(t) có thể rơi vào một trong các vị trí/trạng thái S0, S1, S2 và S3. Chú ý rằng lúc này ta có xích Markov (thời gian) liên tục với không gian trạng thái S ={S0, S1, S2, S3}.

2.4. Tìm phân phối giới hạn cho một hệ thống kĩ thuật

- Giả sử dòng tín hiệu đến (hay xảy ra) tuân theo phân phối Poát−xông *P (λ) với λ là số tín hiệu đến* trung bình trong một khoảng thời gian nhất định (coi là một đơn vị thời gian), λ còn được gọi là cường độ của dòng tín hiệu đến. Lúc đó, trong khoảng thời gian như trên thì số tín hiệu xảy ra sẽ nhận giá trị k với xác suất $\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$
- Ta gọi phần tử xác suất P là xác suất xuất hiện (ít nhất) một tín hiệu trong khoảng thời gian Δ t thì ta có P = λΔt.
- *Chú ý: Nếu dòng tín hiệu đến có phân phối Poát−xông P(λ) thì thời gian giữa hai* tín hiệu liên tiếp có phân phối mũ ε(λ).

2.4. Tìm phân phối giới hạn cho một hệ thống kĩ thuật

- Gọi $\lambda 1$ số lần chi tiết 1 hỏng và $\lambda 2$ số lần chi tiết 2 hỏng (tính trung bình) trên 1 đơn vị thời gian. Lúc đó, ta có thể coi dòng tín hiệu chi tiết 1 và 2 hỏng là dòng Poát−xông với các tham số $\lambda 1$ và $\lambda 2$.
- Gọi T1 và T2 là thời gian sửa chữa chi tiết 1 và 2, có phân phối mũ với các kì vọng tsc1 và tsc2 là thời gian sửa chữa (trung bình) chi tiết 1 và chi tiết 2. Vậy T1 và T2 có phân phối mũ $\varepsilon(\mu 1)$ và $\varepsilon(\mu 2)$, với $\mu 1 = 1/tsc1$ và $\mu 2 = 1/tsc2$.

2.4. Tìm phân phối giới hạn cho một hệ thống kĩ thuật

- Tại thời điểm t ta có biến ngẫu nhiên X(t) = Xt với phân phối xác suất sau đây:

X_t	S_0	S_1	S_2	S_3
P	$\pi_0(t)$	$\pi_1(t)$	$\pi_2(t)$	$\pi_3(t)$

- Ta tính $\pi 0(t + \Delta t)$ tại thời điểm tiếp theo $(t + \Delta t)$ theo công thức xác suất toàn phần $\pi 0(t + \Delta t) = \pi 0(t)p00 + \pi 1(t)p10 + \pi 2(t)p20$, trong đó: pi0 là xác suất hệ ở trạng thái Si tại thời điểm t và chuyển sang trạng thái S0 tại thời điểm $(t+ \Delta t)$.

2.4. Tìm phân phối giới hạn cho một hệ thống kĩ thuật

- Ta có π0(t + Δt) = π0(t) [1 − (λ1 + λ2)Δt] + π1(t) μ1 Δt + π2(t) μ2 Δt. Do đó ta có công thức:

$$\frac{\pi_0(t+\Delta t)-\pi_0(t)}{\Delta t}=\pi_1(t)\mu_1+\pi_2(t)\mu_2-\pi_0(t)\lambda_1-\pi_0(t)\lambda_2 .$$

- Cho qua giới hạn: Δt → 0

$$\frac{d\pi_0(t)}{dt}=\pi_1(t)\mu_1+\pi_2(t)\mu_2-\pi_0(t)\lambda_1-\pi_0(t)\lambda_2$$

- Khi t đủ lớn [π0(t), π1(t), π2(t), π3(t)] → [π0, π1, π2, π3]

2.4. Tìm phân phối giới hạn cho một hệ thống kĩ thuật

- Khi đó π0(t) là không đổi nên tao có dπ0(t)/dt=0. Do đó ta có phương trình $\pi_1\mu_1 + \pi_1\mu_2 - \pi_0\lambda_1 - \pi_0\lambda_2 = 0$
- Tương tự thì ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{d\pi_0}{dt} = \mu_1\pi_1 + \mu_2\pi_2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\pi_0 = 0 \\ \dfrac{d\pi_1}{dt} = \lambda_1\pi_0 + \mu_2\pi_3 - (\lambda_2 + \mu_1)\pi_1 = 0 \\ \dfrac{d\pi_2}{dt} = \lambda_2\pi_0 + \mu_1\pi_3 - (\lambda_1 + \mu_2)\pi_2 = 0 \\ \dfrac{d\pi_3}{dt} = \lambda_2\pi_1 + \lambda_1\pi_2 - (\mu_1 + \mu_2)\pi_3 = 0 \end{cases}$$

2.4. Tìm phân phối giới hạn cho một hệ thống kĩ thuật

- Một cách tổng quát, phân phối giới hạn được tìm từ hệ phương trình $-\pi_j q_{jj} = \sum_{i \neq j} \pi_i q_{ij}$ hay $\sum_{i \in S} \pi_i q_{ij} = 0, \forall j \in S$ và $\sum_{i \in S} \pi_i = 1$

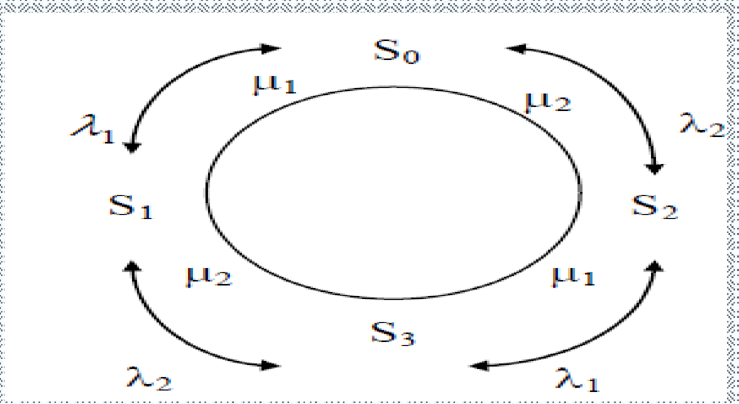
- Trong đó – *qii là cường độ chuyển từ trạng thái sang các trạng thái khác (không kể i), còn qij là cường độ chuyển từ trạng thái i sang trạng thái j, được định nghĩa như sau:*

$$q_{ii} = -\lim_{\Delta t \to 0} (P[X(t+\Delta t) \neq i / X(t) = i] / \Delta t),$$

$$q_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} (P[X(t+\Delta t) = j / X(t) = i] / \Delta t),$$

2.4. Tìm phân phối giới hạn cho một hệ thống kĩ thuật

- Lúc đó, Q = [qij] được gọi là *ma trận cường độ. Ta thấy, để tìm* phân phối giới hạn cần phải giải hệ [π0 π1 π2 π3]Q = 0 hay QT[π0 π1 π2 π3]T = 0.
- **Ví dụ:** Cho λ1 = 1, λ2 = 2, μ1 = 2, μ2 = 3. Từ sơ đồ cường độ chuyển trạng thái cho bởi hình sau:



2.4. Tìm phân phối giới hạn cho một hệ thống kĩ thuật

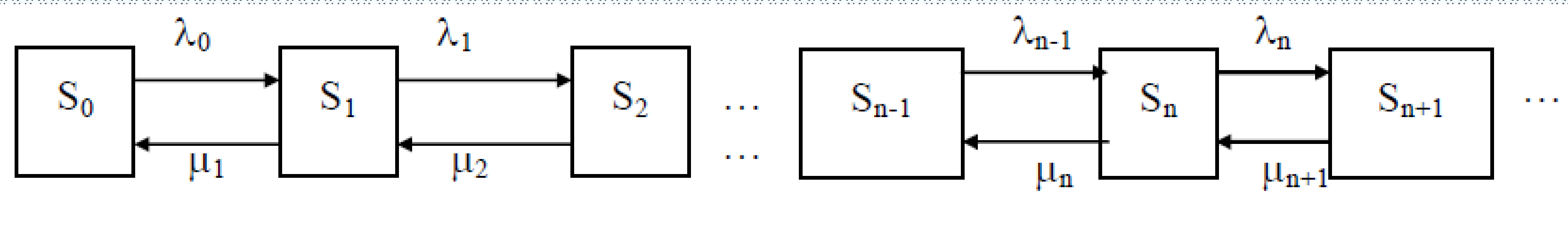
- Có thể tìm được ma trận cường độ Q, với QT có dạng sau:

$$Q^T = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

- Giải hệ [π0 π1 π2 π3]Q = 0 hay QT[π0 π1 π2 π3]T = 0 (với điều kiện bổ trợ π0 + π1 + π2+ π3 = 1) có kết quả: 0 π = 6/15 = 0,4 ; 1 π =3/15= 0,2; 2 π = 4/15 = 0,27; 3 π = 2/15=0,13.
- Ý nghĩa kinh tế: tự đọc

2.5. Một ứng dụng của quá trình sinh - tử cho hệ thống hàng chờ

- Quá trình sinh – tử là trường hợp riêng của xích Markov thuần nhất thời gian liên tục, với không gian trạng thái S không quá đếm được S = {S0, S1, S2,..., Sn,...} và ma trận cường độ Q = [qij] có tính chất *qij = 0 với* |*i* −*j* |≥ 2.



2.5. Một ứng dụng của quá trình sinh - tử cho hệ thống hàng chờ

- Từ trạng thái Sn tại thời điểm t hệ X(t) chỉ có thể chuyển tới một trong các trạng thái Sn+1, Sn hoặc Sn−1. Vì vậy chúng ta có các cường độ chuyển

$$\mu_0 = \lambda_{-1} = 0,\ q_{00} = -\lambda_0,\ q_{n,\,n+1} = \lambda_n,\ q_{n,\,n-1} = \mu_n \text{ và } q_{n,\,n} = -(\lambda_n + \mu_n)\ \forall n.$$

- Trong trường hợp λn, μn > 0, ∀n > 0, theo định lí đã được chứng minh, phân phối giới hạn có thể tìm được bằng cách giải hệ: [π0 π1 π2 π3...]Q = 0, với ma trận cường độ Q đã biết.

2.5. Một ứng dụng của quá trình sinh - tử cho hệ thống hàng chờ

- Ta cần giải hệ:

$$\begin{cases} q_{00}\pi_0 + q_{10}\pi_1 + q_{20}\pi_2 + \ldots = 0, \\ q_{01}\pi_0 + q_{11}\pi_1 + q_{21}\pi_2 + \ldots = 0, \\ q_{02}\pi_0 + q_{12}\pi_1 + q_{22}\pi_2 + \ldots = 0, \\ \ldots. \end{cases}$$

- Do tính chất quá trình sinh tử hệ trên trở thành:

$$\begin{cases} -\lambda_0\pi_0 + \mu_1\pi_1 + \ldots = 0, \\ \lambda_0\pi_0 - (\lambda_1 + \mu_1)\pi_1 + \mu_2\pi_2 + \ldots = 0, \\ \lambda_1\pi_1 - (\lambda_2 + \mu_2)\pi_2 + \mu_3\pi_3 + \ldots = 0, \\ \ldots \end{cases}$$

2.5. Một ứng dụng của quá trình sinh - tử cho hệ thống hàng chờ

- Từ đây dễ dàng tìm được $\pi n+1 = (\lambda n/\mu n+1)\pi n$, $\forall n = 1, 2, 3,\ldots$ để đi tới công thức tính $\pi i, \forall i$.

$$\pi_1 = (\lambda_0/\mu_1)\pi_0,$$

$$\pi_2 = (\lambda_1/\mu_2)\pi_1 = (\lambda_1\lambda_0/\mu_2\mu_1)\pi_0,$$

$$\pi_3 = (\lambda_2/\mu_3)\pi_2 = (\lambda_2\lambda_1/\mu_3\mu_2)\pi_1 = (\lambda_2\lambda_1\lambda_0/\mu_3\mu_2\mu_1)\pi_0.$$

…

$$\pi_{n+1} = (\lambda_n/\mu_{n+1})\pi_n = \ldots = (\lambda_n\lambda_{n-1}\ldots\lambda_0/\mu_{n+1}\mu_n\ldots\mu_1)\pi_0,$$

- Kết hợp với điều kiện $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$, ta có

$$\pi_0 = 1/\left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_k\lambda_{k-1}\ldots\lambda_0/\mu_{k+1}\mu_k\ldots\mu_1)\right).$$

2.5. Một ứng dụng của quá trình sinh - tử cho hệ thống hàng chờ

- **Ví dụ 2:** Giả sử dòng khách hàng đến mua vé ở một văn phòng bán vé với M quầy phục vụ là dòng Poát−xông với tham số $\lambda = 6$ khách hàng/1 phút. Biết nguyên tắc phục vụ là FCFS (*First come first served)* và thời gian phục vụ tại mỗi quầy có luật phân phối mũ với kì vọng 1/3 (phút).
- Cần trả lời hai câu hỏi sau đây:

− Số quầy hàng tối thiểu là bao nhiêu để hàng chờ không trở nên dài vô hạn?

− Giả sử Nt là số khách hàng đang chờ hay đang được phục vụ tại thời điểm t. Chọn M = 4 và một khách hàng sẽ chờ để được phục vụ nếu $N_t \le 4$, chờ với xác suất 0,5 nếu Nt = 5 và sẽ bỏ đi nếu Nt = 6. Hãy xác định phân phối dừng của quá trình này?

2.5. Một ứng dụng của quá trình sinh - tử cho hệ thống hàng chờ

- Đây là một quá trình sinh–tử với không gian trạng thái S = {S0, S1, S2,..., Sn,...}, trong đó Sn là trạng thái trong văn phòng có n khách hàng
- Các cường độ chuyển là $\lambda k = 6$ với $k = 0, 1, 2,...$ còn $\mu k = 3k$ với $k \le M$ và $\mu k = 3M$ với $k > M$

Do $\lambda_k/\mu_{k+1} = 6/3M < 1$ (khi $k \ge M$) nên với $M \ge 3$ thì:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_k \lambda_{k-1} \ldots \lambda_0 / \mu_{k+1} \mu_k \ldots \mu_1) < \infty.$$

- Bởi vậy hàng đợi sẽ không dài vô hạn

2.5. Một ứng dụng của quá trình sinh - tử cho hệ thống hàng chờ

- Trong câu hỏi thứ hai, ta có λ0 = λ1 = λ2 = λ3 = λ4 = 6, λ5 = 3.
- Theo công thức tính

$$\pi_0 = 1/(1+\sum_{k=0}^{5} (\lambda_k \lambda_{k-1} \ldots \lambda_0 / \mu_{k+1} \mu_k \ldots \mu_1))$$

- Ta tính được π0 = 12/89. Từ đó tính ra π1 = 24/89, π2 = 24/89, π3 = 16/89, π4 = 8/89, π5 = 4/89 và π6 = 1/89

3. MÔ PHỎNG XÍCH MARKOV

3.1. Mô phỏng xích Markov thời gian rời rạc

- Chúng ta sẽ mô phỏng xích Markov rời rạc và thuần nhất thông qua ví dụ với phân phối X0 và ma trận chuyển trạng thái P

X_0	1	2	3
$\Pi^{(0)}$	$\pi_1^{(0)} = 0,2$	$\pi_2^{(0)} = 0,5$	$\pi_3^{(0)} = 0,3$

$$P = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,07 & 0,9 & 0,03 \\ 0,083 & 0,067 & 0,85 \end{bmatrix}.$$

3.1. Mô phỏng xích Markov thời gian rời rạc

- **Phương pháp 1:**
- Để mô phỏng X0 ta áp dụng phương pháp mô phỏng phân phối rời rạc đã học ở chương III. Trên máy tính, ta phát sinh ra một số ngẫu nhiên r = RANDOM[0,1) theo luật phân phối đều U[0,1) trong [0,1). Nếu $r \le 0,2$ ta lấy X0 = 1; nếu $0,2 < r \le 0,7$ thì ta lấy X0 = 2 ; còn nếu $r > 0,7$ thì đặt X0 = 3
- Giả sử đã biết X0 = 2, lúc đó ta cần mô phỏng biến ngẫu nhiên X1 căn cứ phân phối tương ứng là 0,07; 0,9; 0,03

3.1. Mô phỏng xích Markov thời gian rời rạc

- Để mô phỏng X1 ta làm tương tự X0. Các bước tiếp theo mô phỏng X2, X3,... được tiến hành tương tự (cho tới X500 chẳng hạn).
- Lặp lại quy trình này bắt đầu từ X0 cho một số bước lặp L đủ lớn (chẳng hạn 1000 lần), ta sẽ có một bộ 1000 số liệu cho X500
- Từ đó, có thể tìm được bảng phân phối tần suất (còn gọi là xác suất thực nghiệm) của X500.

3.1. Mô phỏng xích Markov thời gian rời rạc

- **Phương pháp 2: tự đọc**