HỌC VIỆN NÔNG NGHIỆP VIỆT NAM
VIETNAM NATIONAL UNIVERSITY OF AGRICULTURE

PGS.TS. Nguyễn Văn Định

BÀI GIẢNG ĐAI SỐ TUYẾN TÍNH

Hà Nội - 2018

email: nvdinh@vnua.edu.vn | website: fita.vnua.edu.vn/nvdinh

CHƯƠNG 1
Ma trận – Định thức – Hệ PT truyến tính

Nội dung chương gồm 6 phần:

Bài 1.1. Ma trận trên trường số thực

Bài 1.2. Các phép toán trên các ma trận

Bài 1.3. Định thức

Bài 1.4. Hạng của ma trận

Bài 1.5. Ma trận nghịch đảo

Bài 1.6. Hệ phương trình tuyến tính

CHƯƠNG 1
Ma trận – Định thức – Hệ PT truyến tính

1.1 Ma trận trên trường số thực

1.1.1 Định nghĩa ma trận

- *Định nghĩa: Một bảng các số thực được xếp thành m hàng và n cột được gọi là một ma trận (thực) cấp m x n và ký hiệu là $A_{m \times n}$; $B_{m \times n}$ ...*

- Như vậy ma trận A có dạng: $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots \dots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ & & \dots \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & amj & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$

- Ma trận A như trên thường được viết ngắn gọn là A = $(a_{ij})_{m \times n}$, trong đó a_{ij} là phần tử nằm trên hàng thứ *i* và cột thứ *j* của ma trận A

CHƯƠNG 1
Ma trận – Định thức – Hệ PT truyến tính

1.1 Ma trận trên trường số thực (tt)

1.1.2 Các dạng ma trận đặc biệt

- Ma trận không
- Ma trận vuông
- Ma trận đơn vị
- Ma trận chéo
- Ma trận đối xứng
- Ma trận tam giác
- Ma trận hình thang
- Ma trận chuyển vị

1.2 Các phép toán trên ma trận

1.2.1 Phép cộng hai ma trận

- *Định nghĩa: Cho 2 ma trận cùng cấp $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$ Tổng 2 ma trận A và B là một ma trận được ký hiệu và xác định như sau:*

$$\boxed{A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}}$$

- *Nhận xét: tổng A và B là ma trận cùng cấp có các phần tử bằng tổng các phần tử tương ứng của A và B.*

1.2.2 Phép nhân ma trận với một số thực

- *Định nghĩa: Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m \times n}$ và một số thực k. Tích của ma trận A với số k là một ma trận cùng cấp, được ký hiệu và xác định:*

$$\boxed{k.A = (k.a_{ij})_{m \times n}}$$

- *Nhận xét: Để nhân ma trận A với số k ta nhân mọi phần tử của A với số k.*

CHƯƠNG 1
Ma trận – Định thức – Hệ PT truyến tính

1.2 Các phép toán trên ma trận (next CNKTOC T4-19/9)

- *Thí dụ:*
- *Cho A* = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$; B = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ => A + B = $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 7 & 7 \end{vmatrix}$

- *Cho* X = $\begin{bmatrix} x & 1 & 1 & a \\ 2 & y & 2 & b \\ 3 & 3 & z & c \end{bmatrix}$; Y = $\begin{bmatrix} -x & 1 & 1 & x \\ 2 & -y & 2 & y \\ 3 & 3 & -z & z \end{bmatrix}$ => X + Y = $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & a+x \\ 4 & 0 & 4 & b+y \\ 6 & 6 & 0 & c+z \end{bmatrix}$

- A + 2B = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ => A + 2B = $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 4 & 9 & 8 \end{vmatrix}$

- $3A^C + B^C = 3.\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 12 \\ 6 & 15 \\ 9 & 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 8 & 17 \\ 8 & 19 \end{bmatrix}$

1.2 Các phép toán trên ma trận (tt)

1.2.3 Phép nhân hai ma trận

- *Định nghĩa: Cho ma trận $A_{m \times n}$; $B_{n \times p}$, tích của ma trận A với ma trận B là ma trận $C = (c_{ij})_{m \times p}$, với các phần tử c_{ij} tính theo công thức*:

$$\boxed{c_{ij} = a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + \dots + a_{in}.b_{nj}} \quad (i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, p)$$

> *Nhận xét:*

- *Tích A.B chỉ thực hiện được khi số cột của ma trận A bằng số hàng của ma trận B.*
- *Ma trận kết quả có số hàng bằng số hàng ma trận A, số cột bằng số cột ma trận B, tức là $A_{m \times n} . B_{n \times p} = C_{m \times p}$*
- *Tích A.B là không giao hoán được.*

1.2.3 Phép nhân hai ma trận (tt)

Nhắc lại công thức: $\boxed{c_{ij} = a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + \ldots + a_{in}.b_{nj}}$

- *Thí dụ 1: Cho A =* $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$; B = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$. Tìm ma trận tích C = A . B ?

- Ta thấy ma trận tích có cấp 2x2: C = $\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$

- c_{11} = 1.3 + 2.1 + 3.4 = 17 ; c_{12} = 1.2 + 2.0 + 3.5 = 17
- c_{21} = 4.3 + 5.1 + 6.4 = 41 ; c_{22} = 4.2 + 5.0 + 6.5 = 38

Kết quả:

A.B = $\begin{bmatrix} 17 & 17 \\ 41 & 38 \end{bmatrix}$

- *Thí dụ 2: Cho A =* $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$; B = $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

- Hãy tính tích A . B? (dành cho SV như bài tập)

Kết quả:

A.B = $\begin{bmatrix} 4 & 10 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

CHƯƠNG 1
Ma trận – Định thức – Hệ PT truyến tính

1.2 Các phép toán trên ma trận next (CNKTOC-tuần 12?)

1.2.4 Các tính chất của các phép toán trên ma trận

- *Trong các tính chất dưới đây, giả thiết A, B, C, I, θ là các ma trận có cấp phù hợp; k, l là các số thực*:

- TC1: A + B = B + A
- TC2: A + B + C = (A + B) + C = A + (B + C)
- TC3: A + θ = A, θ + A = A ;
- A. θ = θ.A = θ (*cấp của A và θ:* $A_{m\,x\,n}.\theta_{n\,x\,p} = \theta_{mxp}$; $\theta_{m\,x\,n}.A_{n\,x\,p} = \theta_{m\,x\,p}$)
- TC4: $k(A + B) = kA + kB$; $(k + l)A = kA + lA_{mxp}$
- TC5: A.B.C = A(B.C) = (A.B)C (*chú ý giữ nguyên thứ tự các ma trận*)
- TC6: I.A = A ; A.I = A (*chú ý cấp của I:* $I_m . A_{m\,x\,n} = A$; $A_{m\,x\,n} . I_n = A$)

1.3 Định thức

1.3.1 Định nghĩa định thức

- *Định nghĩa 1.3.1: Cho ma trận vuông A cấp n, định thức của ma trận A là một giá trị thực, được ký hiệu là |A|, hay* det(A), *và được xác định duy nhất theo giá trị các phần tử trong ma trận A.*

- *Định thức của ma trận vuông cấp n cũng gọi là định thức cấp n*

1.3.2 Tính giá trị của định thức

- Với ma trận vuông cấp 1: A = [*a*] thì $\boxed{|A| = a}$ (1)

- *Thí dụ 1:* A = [-5] thì |A| = -5

- Với ma trận vuông cấp 2 : A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ thì $\boxed{|A| = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}}$ (2)

- *Thí dụ 2:* cho A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ thì det(A) = 1x4 – 2x3 = -2

1.3.2 Tính giá trị của định thức (tt)

- Với A là ma trận vuông cấp 3: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

thì:

$$\boxed{\begin{aligned} |A| = \ & a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} \\ & - a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{12}.a_{21}.a_{33} - a_{11}.a_{23}.a_{32} \end{aligned}} \quad (3)$$

- *Thí dụ 3:* cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, theo quy tắc (3), tính được:

$|A| = 1.5.0 + 2.6.1 + 3.4.1 - 3.5.1 - 2.4.0 - 1.6.1 = 3$

- *Với các định thức cấp n, có thể khai triển thành tổng các định thức con cấp n-1.*

1.3 Định thức (tt)

1.3.3 Định thức con

- *Định nghĩa 1.3.2*

Cho ma trận vuông A cấp n: A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \dots & \dots & \\ a_{i1} & ai_2 & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ & & \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$

nếu xóa đi hàng thứ i và cột thứ j của ma trận A, ta được một ma trận vuông cấp n-1, định thức của ma trận này gọi là định thức con cấp n-1 của ma trận A ứng với phần tử a_{ij} *và ký hiệu là* D_{ij}

- *Chú ý rằng* a_{ij} *là phần tử ở giao điểm hàng , cột bị xóa*

CHƯƠNG 1
Ma trận – Định thức – Hệ PT truyến tính

1.3 Định thức (tt)

- Thí dụ 4: Cho ma trận vuông cấp 3: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

- Ta tính một số định thức con của A:

$D_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -6$ $D_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3$ $D_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$

- Thí dụ 5: cho ma trận vuông cấp 4: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Tính các định thức con ứng với các phần tử ở hàng 4? (dành cho SV)

1.3 Định thức (tt)

1.3.4 Khai triển định thức cấp n

Cho ma trận vuông A cấp n: A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots\dots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ & & \dots\dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$

Khi đó định thức của ma trận A được tính bởi các công thức:

- khai triển theo hàng *i* của mt A $\boxed{|A| = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}D_{ij}}$ (4)
- khai triển theo cột *j* của mt A $\boxed{|A| = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}D_{ij}}$ (5)

➢ *Ta thường chọn khai triển theo hàng (hay cột) có chứa nhiều số 0.*

1.3.3 Khai triển định thức cấp n (tt)

- *Thí dụ 6*. Hãy tính định thức của ma trận vuông A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

  - Áp dụng công thức: $\boxed{|A| = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}D_{ij}}$, chọn hàng *i* = 3.

  ➢ $|A| = (-1)^{3+1}a_{31}D_{31} + (-1)^{3+2}a_{32}D_{32} + (-1)^{3+3}a_{33}D_{33}$

  $= (-1)^{3+1}.1.\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}.1.\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}.0.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$

  $= 1.\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 1.\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 0 = 1.(-3) - 1.(-6) = 3$ (*so sánh với thí dụ 3*)

- *Thí dụ 7.* Tính định thức: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ *(bài tập dành cho SV)*

1.3 Định thức (tt)

1.3.5 Các tính chất của định thức

- Tính chất 1: Định thức có 1 hàng gồm toàn số 0 thì bằng 0
- Tính chất 2: Đổi chố hai hàng (hay 2 cột) thì định thức đổi dấu
- Tính chất 3: Định thức có hai hàng (hay 2 cột) giống nhau hoặc tỷ lệ nhau thì bằng 0.
- Tính chất 4: Nhân 1 hàng (hay 1 cột) với số k thì giá trị định thức tăng lên k lần.
- Tính chất 5: Có thể đưa thừa số chung của 1 hàng (hay 1 cột) ra ngoài dấu định thức.
- Tính chất 6: Nhân 1 hàng (hay 1 cột) của định thức rồi cộng vào hàng (hay cột) khác thì giá trị định thức không đổi.
- Tính chất 7: Định thức của ma trận tam giác bằng tích các phần tử trên đường chéo.
- Tính chất 8: Chuyển vị ma trận thì định thức không đổi: $|A| = |A^C|$
- Tính chất 9 : Định thức của tích hai ma trận bằng tích các định thức.
- Tính chất 10: Nếu 1 hàng (hay 1 cột) bằng tổng 2 hàng (hay 2 cột) thì có thể tách định thức thành tổng 2 định thức tương ứng.

1.3 Định thức (tt)

1.3.5 Những chú ý khi tính định thức

- *Khi định thức cấp $\leq$ 3: tính trục tiếp theo các công thức (1), (2), (3) trong 1.3.1*
- *Khi định thức cấp > 3:*
  - *Khai triển định thức theo hàng hay cột có nhiều số 0 rồi áp dụng công thức (4) hoặc (5)*
  - *Biến đổi định thức về dạng tam giác, rồi tính tích các phần tử trên đường chéo (tính chất 7).*
  - *Áp dụng linh hoạt các tính chất của định thức để đưa định thức về dạng đơn giản hơn: đặt thừa số chung của hàng hay cột, phát hiện hai hàng giống nhau hay tỷ lệ nhau…*

1.3.6 Những chú ý khi tính định thức

Một số thí dụ tính định thức:

- *Thí dụ 7:* D = $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ => ĐS: 160

- *Thí dụ 8:* D = $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ => ĐS: -45

- *Thí dụ 9: D =* $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ ĐS: $(x+2)(x-1)^2$ *D =* $\begin{vmatrix} 1 & -a & 1 \\ -2 & 1 & -a \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ *ĐS:* $3a^2-4a+2$

1.4 Hạng của ma trận

1.4.1 Định thức con của ma trận

- *Định nghĩa: Cho ma trận cấp m x n:* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \dots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ & & \dots & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$

  Nếu chọn ra k hàng và k cột, 1≤ k ≤ min{m, n}, xóa đi các hàng các cột không chọn thì các phần tử còn lại trên k hàng, k cột đã chọn tạo nên một ma trận vuông cấp k; định thức của ma trận này gọi là định thức con cấp k của ma trận A.

- *Chú ý: Với mỗi ma trận A cấp mxn, có nhiều định thức con cấp k, tùy theo cách chọn k hàng và k cột.*

CHƯƠNG 1
Ma trận – Định thức – Hệ PT truyến tính

1.4.1 Định thức con của ma trận

- *Thí dụ:* Cho ma trận A = $\begin{bmatrix} 2 & & & & 9 \\ & & & & \\ 3 & & & & 15 \end{bmatrix}$

- *Chọn các hàng 1, 2, 4; các cột 1, 2, 3 =>* *định thức con cấp 3*: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \end{vmatrix}$

- *Chọn các hàng 2, 4; các cột 1, 5 =>* *định thức con cấp 2*: $\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 15 \end{vmatrix}$

- *Chú ý rằng định thức con cấp cao nhất của ma trận A trên đây là cấp 4, và có 5 định thức con cấp 4 của ma trận A.*

CHƯƠNG 1
Ma trận – Định thức – Hệ PT truyến tính

1.4 Hạng của ma trận

1.4.2 Định nghĩa Hạng của ma trận

- *Định nghĩa: cho ma trận A cấp mxn, hạng của ma trận A là cấp cao nhất của một định thức con khác 0 có mặt trong ma trận A.*
- *Ký hiệu hạng của ma trận A là r*(*A*)
- *Thí dụ*: tính hạng các ma trận
- A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$. Ta thấy A có định thức con $\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ = -15 ≠ 0
- đây là định thức con khác không cấp cao nhất. Vậy r(A) = 2.
- B = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 4 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
  - Có thể tính được mọi định thức cấp 3 đều = 0
  - Mọi định thức cấp 2 đều bằng 0.
  - Có định thức |1| = 1 ≠ 0. Vậy r(B) = 1.

CHƯƠNG 1
Ma trận – Định thức – Hệ PT truyến tính

1.4 Hạng của ma trận

1.4.3 Các phép biến đổi sơ cấp trên ma trận

- Đổi chỗ 2 hàng (hay 2 cột) của ma trận
- Nhân 1 hàng (hay 1 cột) của ma trận với 1 số khác 0.
- Nhân 1 hàng (hay 1 cột) của ma trận với 1 số rồi cộng vào hàng (hay cột) khác.

- *Định lý1*: *Các biến đổi sơ cấp không làm thay đổi hạng ma trận*.
- *Định lý 2: Hạng của ma trận hình thang bằng số hàng khác 0.*

CHƯƠNG 1
Ma trận – Định thức – Hệ PT truyến tính

1.4 Hạng của ma trận

1.4.3 Tính hạng của ma trận

- Dùng định nghĩa: tìm định thức con khác 0 trong A có cấp cao nhất, khi đó r(A) = cấp của định thức con khác 0 đó (cấp cao nhất)
- Dùng ma trận hình thang: biến đổi sơ cấp để đưa A về dạng ma trận hình thang, khi đó r(A) = số hàng khác không. (Theo định lý 2)

➢ *Các thí dụ tính hạng của ma trận*

Thí dụ 1: Cho ma trận A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 6 & 8 & 7 \\ 3 & 5 & 9 & 11 & 15 \end{bmatrix}$; B = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 3 \end{bmatrix}$

1/. Tính hạng ma trận A [Đưa về MT hình thang. ĐS : r(A) =3]

2/. Tính hạng ma trận B theo tham số a [ĐS:r(B) = 2 khi a = 0;-5, trái lai: 3]

1.5 Ma trận nghịch đảo

1.5.1 Định nghĩa ma trận nghịch đảo

- *Định nghĩa: Cho ma trận vuông A cấp n, nếu tồn tại một ma trận vuông B cùng cấp sao cho A.B = B.A = I thì ma trận B gọi là ma trận nghịch đảo của ma trận A. (khi đó A cũng là nghịc đảo của B)*
- *Ký hiệu ma trận nghịch đảo của ma trận A là* ***A^{-1}***
- *Nếu A có ma trận nghịch đảo thì A được gọi là khả nghịch.*

- *Thí dụ*: Cho ma trận A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ và một ma trận B = $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.
- Ta có: A.B = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ = I. Tương tự: B.A = I

=> Vậy B là ma trận nghịch đảo của A, và A là mt nghịch đảo của B

1.5 Ma trận nghịch đảo (tt)

1.5.2 Tìm ma trận nghịch đảo

- *Định lý: Cho ma trận vuông A cấp n, nếu có |A|≠ 0 thì ma trận A khả nghịch và ta có :*

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^*}$$

- *A^* gọi là ma trận phụ hợp của ma trận A, xác định như sau:*

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & An_1 \\ A_{12} & A_{22} & \dots & An_2 \\ & \dots \dots & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & Ann \end{bmatrix}$$

- *Các A_{ij} là phần phụ đại số của phần tử a_{ij} của ma trận A, được viết theo thứ tự chuyển vị trong A^*, xác định bởi công thức:*

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j}.D_{ij}}$$

1.5.2 Tìm ma trận nghịch đảo (tt)

- *Thí dụ: Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Bước 1: Tính |A|= 3 ≠ 0 (thí dụ trước). có|A|≠ 0 Vậy ma trận A là khả nghịch. (|A| ≠ 0 thì ma trận A còn gọi là *không suy biến*)

Bước 2: tính ma trận nghịch đảo của A theo công thức: $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^*}$

- *Tính các A_{ij} theo công thức:* $\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j}.D_{ij}}$
- $A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -6$; $A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = +6$; $A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$
- $A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3$; $A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3$; $A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$
- $A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3$; $A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = +6$; $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3$

Ma trận phụ hợp:

$$A^* = \begin{bmatrix} -6 & 3 & -3 \\ 6 & -3 & 6 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

1.5.2 Tìm ma trận nghịch đảo (tt)

- *Thí dụ1 (tt): Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A =* $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
  - Ta đã tính được ma trận A^*. Áp dụng công thức: $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^*}$
  - Ta có $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -6 & 3 & -3 \\ 6 & -3 & 6 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ => $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \end{bmatrix}$
- *Thí dụ 2*: Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
  - *Bước 1*: tính được |A| = 0. Vậy A là ma trận suy biến.
  - *Bước 2*: Kết luận A không có ma trận nghịch đảo.

CHƯƠNG 1
Ma trận – Định thức – Hệ PT truyến tính

1.5.3 Tìm ma trận nghịch đảo bằng biến đổi sơ cấp

- *Có thể tìm ma trận nghịch đảo bằng cách biến đổi sơ cấp:*

  - *Bước 1: Để tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A cấp n, đặt ma trận đơn vị I cấp n bên phải ma trận A => ma trận mới có dạng:*

$$(A \mid I)$$

  - *Bước 2*: Dùng các phép biến đổi sơ cấp (mục 1.4.3) để biến đổi đồng thời các hàng của cả A và I, sao cho cuối cùng ma trận A trở thành ma trận đơn vị. Khi đó phần chứa ma trận I chính là ma trận A^{-1}.

- *Thí dụ:* Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ bằng biến đổi sơ cấp.

CHƯƠNG 1
Ma trận – Định thức – Hệ PT truyến tính

- Thí dụ tìm ma trận nghịch đảo bằng biến đổi sơ cấp
- *Bước 1*:
- Viết ma trận I vào bên phải ma trận A:

	A			I	
1	2	3	1	0	0
4	5	6	0	1	0
1	1	0	0	0	1

- *Bước 2*:
- Biến đổi sơ cấp theo các dòng của cả A và I để đưa A về ma trận đơn vị I_3:

	A			I	
1	2	3	1	0	0
0	-3	-6	-4	1	0
0	-1	-3	-1	0	1

	A			I	
1	0	-1	-1.667	0.6667	0
0	-3	-6	-4	1	0
0	0	-1	0.3333	-0.333	1

	A			I	
1	0	0	-2	1	-1
0	-3	0	-6	3	-6
0	0	-1	0.3333	-0.333	1

	=> I			=> A^{-1}	
1	0	0	-2	1	-1
0	1	0	2	-1	2
0	0	1	-1/3	1/3	-1

- Ở bảng cuối cùng, ma trận A đã là ma trận đơn vị, bên phải là ma trận A^{-1}

1.6 Hệ phương trình tuyến tính

1.6.1 Các khái niệm

- Hệ phương trình tuyến tính tổng quát có dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots. + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots. + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

- Hệ (1) gồm *m* phương trình với *n* ẩn $x_1, x_2, \ldots x_n$.
- Trong hệ (1):
  - a_{ij} là hệ số của ẩn thứ *j* tại phương trình thứ *i*.
    (i = 1, 2, … , m ; j = 1, 2, … , n)
  - b_i là hệ số tự do (vế phải) của phương trình thứ *i*

CHƯƠNG 1
Ma trận – Định thức – Hệ PT truyến tính

1.6.1 Các khái niệm (tt)

- Từ hệ (1) lập các ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1j} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2j} \dots a_{2n} \\ . & \dots\dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mj} \dots a_{mn} \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

- *Các ma trận của hệ: Gọi A là ma trận hệ số, X là ma trận ẩn số* và *B là ma trận vế phải* của hệ (1)
- *Dạng ma trận của hệ*: Với những ký hiệu trên, hệ (1) có thể viết:

$$AX = B \qquad (2)$$

- (2) gọi là dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính 1.

CHƯƠNG 1
Ma trận – Định thức – Hệ PT truyến tính

1.6.1 Các khái niệm (tt)

- *Nghiệm của hệ (1)* là bộ n số thực $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sao cho khi thay các x_j bởi t_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) thì tất cả các phương trình của hệ đều thỏa mãn.
- Khi hệ (1) có nghiệm thì hệ gọi là tương thích, trái lại hệ gọi là không tương thích.
- *Thí dụ:* Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \quad (*) \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$$

- Viết các ma trận của hệ:
- A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$; B = $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$; X = $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$
- *Rõ ràng $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$ là một nghiệm của hệ. Vậy hệ là tương thích*.

1.6.1 Các khái niệm (tt)

- *Hai hệ phương trình tuyến tính được gọi là tương đương nếu nghiệm của hệ này là nghiệm của hệ kia và ngược lại.*
- Nếu hai hệ phương trình tương đương thì có thể giải hệ này thay cho hệ kia để tìm nghiệm.
- Các phép biến đổi tương đương cho hệ phương trình tuyến tính
- Đổi chỗ hai phương trình cho nhau.
- Nhân hai vế một phương trình với một số khác 0.
- Nhân hai vế của một phương trình với một số rồi cộng vào một phương trình khác
- Hoán đổi vị trí của hai ẩn trong tất cả các phương trình của hệ (ít khi dùng)

1.6.2 Giải hệ phương trình tuyến tính tổng quát

- Điều kiện tương thích
- Xét hệ phương trình (1):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

- Từ hệ (1) lập ma trận $\overline{A}$ = (A | B) có dạng: $\overline{A} = \left[\begin{array}{c|c} a_{11}\ a_{12}\ldots a_{1j}\ldots a_{1n} & b_1 \\ a_{21}\ a_{22}\ldots a_{2j}\ldots a_{2n} & b_2 \\ \ldots\ldots & \ldots \\ a_{m1}\ a_{m2}\ldots a_{mj}\ldots a_{mn} & b_m \end{array}\right]$
- Ma trận $\overline{A}$ gọi là ma trận mở rộng (hay ma trận bổ xung) của hệ (1)
- *Định lý (Cronecker-Capelli):* Hệ phương trình tuyến tính (1) là tương thích khi và chỉ khi hạng ma trận hệ số bằng hạng ma trận mở rộng.
- Tức là: $\boxed{\text{Hệ (1) có nghiệm} \Leftrightarrow r(A) = r(\overline{A})}$

1.6.2 Giải hệ phương trình tuyến tính tổng quát

- Phương pháp Gauss giải hệ phương trình tuyến tính tổng quát
  - *Bước 1*: lập ma trận mở rộng: $\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12}\ldots & a_{1j}\ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22}\ldots & a_{2j}\ldots & a_{2n} & b_2 \\ . & \ldots\ldots\ldots & & & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2}\ldots & a_{mj}\ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$
  - *Bước 2*: Biến đổi sơ cấp để đưa $\overline{A}$ về dạng ma trận hình thang

$$\overline{A} \Rightarrow \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \ldots\ldots & a'_{1r} & \ldots\ldots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \ldots\ldots & a'_{2r} & \ldots\ldots & a'_{2n} & b'_2 \\ & & & \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & a'_{rr} & \ldots\ldots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & \ldots\ldots & 0 & b'_{r+1} \\ & & & \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & \ldots\ldots & 0 & b'_m \end{bmatrix}$$

1.6.2 Giải hệ phương trình tuyến tính tổng quát (tt)

- Phương pháp Gauss giải hệ phương trình tuyến tính tổng quát (tt)

- *Bước 3*: Từ ma trận $\overline{A}$, kiểm tra điều kiện tương thích: r(A) = r($\overline{A}$) ?

$$\overline{A} \Rightarrow \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \ldots & a'_{1r} & \ldots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \ldots & a'_{2r} & \ldots & a'_{2n} & b'_2 \\ & & & \ldots\ldots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & a'_{rr} & \ldots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & b'_{r+1} \\ & & & \ldots\ldots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & b'_m \end{bmatrix}$$

- Từ hàng r + 1, nếu có ít nhất một hệ số tự do ≠ 0 thì kết luận hệ VN.
- Từ hàng r + 1 nếu các giá trị $b'_{r+1} = b'_{r+2} = \ldots = b'_m = 0$ thì r(A) = r($\overline{A}$)

  => Hệ có nghiệm. Ta giải tiếp theo bước 4.

1.6.2 Giải hệ phương trình tuyến tính tổng quát (tt)

- Phương pháp Gauss giải hệ phương trình tuyến tính tổng quát (tt)

- *Bước 4*: Khi các $b_{r+1} = b_{r+2} \ldots = 0$, bỏ đi các hàng bằng không, ma trận mở rộng mới có dạng:

$$\overline{A}' = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \ldots\ldots & a'_{1r} & \ldots\ldots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \ldots\ldots & a'_{2r} & \ldots\ldots & a'_{2n} & b'_2 \\ & & & \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & a'_{rr} & \ldots\ldots & a'_{rn} & b'_r \end{bmatrix}$$

- Từ ma trận mở rộng mới, ta nhận được hệ phương trình mới tương đương hệ (1):

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1r}x_r + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2r}x_r + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad a'_{rr}x_r + \ldots + a'_{rn}x_n = b'_r \end{cases}$$

1.6.2 Giải hệ phương trình tuyến tính tổng quát (tt)

- Phương pháp Gauss giải hệ phương trình tuyến tính tổng quát (tt)

- *Bước 4* (tt):

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1r}x_r + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2r}x_r + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a'_{rr}x_r + \ldots + a'_{rn}x_n = b'_r \end{cases} \quad (1')$$

- Từ phương trình cuối cùng của hệ (1'), giải được ẩn x_r qua các ẩn tự do $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$.
- Thay giá trị ẩn x_r vừa giải được vào phương trình thứ r-1, ta giải được ẩn x_{r-1} qua x_r và các ẩn tự do.
- Tiếp tục như vậy cho đến phương trình thứ 2, thứ 1: ta giải được các ẩn $x_1, x_2, \ldots, x_r$ qua các ẩn tự do. Cho các ẩn tự do nhận các bộ giá trị tùy ý, ta được vô số bộ nghiệm của hệ (1).

1.6.2 Giải hệ phương trình tuyến tính tổng quát (tt)

- *Thí dụ* 1: Giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp Gauss:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 3 \\ -3x_1 - 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

- *Thí dụ 2*: Giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp Gauss:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 3 \\ -3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

- *Thí dụ 3*: Với giá trị nào của *m* thì hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x - 2y + z + t = -1 \\ 2x + 3y + 3z - 3t = 3 \\ x + 5y + mz - 4t = 5 \end{cases}$$

1.6 Hệ phương trình tuyến tính (next KTCKA tuần 12)

1.6.3 Hệ Cramer

- *Định nghĩa* : *Hệ phương trình tuyến tính*:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (3)$$

với m = n và định thức của ma trận hệ số khác 0 được gọi là hệ Cramer

- *Định lý Cramer*: *Hệ Cr amer luôn có nghiệm duy nhất xác đinh bởi:*

$$\boxed{x_j = \frac{D_j}{D}\ ,\ \text{với } j = 1, 2, \ldots, n} \qquad (4)$$

- *Trong đó*: *D là định thức của ma trận hệ số, D_j là định thức nhận được từ D bằng cách thay cột thứ j bởi cột hệ số tự do B.*

1.6.3 Hệ Cramer (tt)

- *Thí dụ* : *Giải hệ phương trình tuyến tính*: (*) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$

Hệ có m = n =3 và |A| = $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix}$ = -12 ≠ 0. Vậy (*) là hệ Cramer.

- Nghiệm của hệ tính theo công thức (4): $\boxed{x_j = \frac{D_j}{D}\ ,\ \text{với } j = 1, 2, 3}$
- Trong đó D = |A| = -12, các D_j tính được như sau (*j = 1, 2, 3*):

$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -24$; $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -12$; $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 5 \end{vmatrix} = -24$

- *Vậy*: $x_1 = \frac{D_1}{D} = 2$; $x_2 = \frac{D_2}{D} = 1$; $x_3 = \frac{D_3}{D} = 2$
- Nghiệm của hệ : $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

1.6.3 Hệ Cramer (tt)

- *Giải hệ Cramer bằng Phương pháp ma trận nghịch đảo:*
- *Xây dựng công thức*:
  - Viết lại hệ Cramer (3) dưới dạng ma trận: $A.X = B$ $^{(*)}$
  - Nhân A^{-1} vào bên trái hai vế của (*): $A^{-1}.A.X = A^{-1}.B$
  - Từ đó ta có công thức tìm ma trận nghiệm: $\boxed{X = A^{-1}.B}$
- *Các bước giải hệ Cramer bằng phương pháp ma trận nghịch đảo*:
  - *Bước 1:* Lập ma trận hệ số A, ma trận ẩn X, ma trận vế phải B.
  - *Bước 2*: Tính ma trận nghịch đảo A^{-1} (do $|A| \neq 0$ nên tồn tại A^{-1}).
  - *Bước 3*: Tính tích ma trận $A^{-1}.B$ để nhận được nghiệm: $X = A^{-1}.B$

1.6.3 Hệ Cramer (tt)

- *Thí dụ: Giải hệ phương trình tuyến tính:* (*) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$

bằng phương pháp ma trận nghịch đảo (*nếu được*).

- *Bước 1*: Lập các ma trận: A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; X = $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ B = $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
- *Bước 2*: Tính được ma trận A^{-1} = $\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \end{bmatrix}$ (đã tính ở phần trước)
- *Bước 3*: Tính A^{-1}.B = $\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -8/3 \end{bmatrix}$ Nghiệm: X= $\begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -8/3 \end{bmatrix}$

1.6.4 Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

- *Định nghĩa* : *Cho hệ phương trình tuyến tính có số phương trình bằng số ẩn và các vế phải bằng 0*:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots \ + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots \ + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ \dots \ + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

Hệ (5) được goi là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.

- *Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất:*

- Hệ thuần nhất luôn có nghiệm: Rõ ràng $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ là một nghiệm. Nghiệm này gọi là nghiệm bằng không (*nghiệm tầm thường*)
- Nếu $|A| \neq 0$ thì hệ (5) chỉ có nghiệm tầm thường.
- Nếu $|A| = 0$ thì hệ có nghiệm không tầm thường (*nghiệm khác không*)
- Khi $|A| = 0$. Giải bằng phương pháp Gauss, hệ có vô số nghiệm.

CHƯƠNG 1
Ma trận – Định thức – Hệ PT truyến tính

1.6.4 Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (tt)

- *Thí dụ:* Giải hệ thuần nhất: $(*)\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

Giải hệ:

- Do |A| = 0 nên hệ có nghiệm không tầm thường. Giải bằng PP Gauss
- Biến đổi ma trận mở rộng:
- $\overline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ biến đổi sơ cấp theo các hàng: $\overline{A}$ => $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- Từ ma trận cuối, ta có hệ phương trình tương đương hệ (*):

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

- Từ phương trình cuối, giải được: $x_2 = -x_3$
- Thay x_2 vào phương trình đầu, giải được: $x_1 = x_3$
- Cho ẩn tự do giá trị tùy ý : $x_3 = k \in R$, nghiệm của hệ là:

$$X = \begin{bmatrix} k \\ -k \\ k \end{bmatrix}$$

- Bài tập chương 1:

Làm vào vở bài tập từ bài 1 đến bài 44 trong tài liệu: “Bài tập ĐSTT năm học 2017-2018”.

Download tại:

http://fita.vnua.edu.vn/nvdinh