Bài giảng môn học LOGIC MỜ VÀ ỨNG DỤNG

PGS.TS. Nguyễn Văn Định, Khoa CNTT, Học Viện NN Việt Nam

Mở đầu

Trong cuộc sống, con người truyền thông tin cho nhau chủ yếu bằng ngôn ngữ tự nhiên. Mặc dù ngôn ngữ tự nhiên thường đa nghĩa, không chính xác, và không đầy đủ, nhưng nó vẫn là phương tiện truyền thông tin mạnh mẽ và thông dụng nhất giữa con người với nhau. Vượt qua tất cả các hạn chế đó của ngôn ngữ tự nhiên (*thiếu chính xác, không rõ ràng – vaguenees*), con người thường hiểu đúng và ít khi hiểu sai những điều mà người khác muốn nói với mình. Đây là điều mà máy móc nói chung và máy tính nói riêng không thể thực hiện được một cách hoàn hảo. Tham vọng của các nhà toán học, logic học và công nghệ thông tin là muốn xây dựng cho máy móc khả năng suy diễn và xử lý thông tin, tức là có khả năng hoạt động như bộ óc của con người để chúng có thể nhận những mệnh lệnh của con người thông qua ngôn ngữ tự nhiên và thực thi những nhiệm vụ đó. Như vậy, vấn đề đặt ra ở đây là làm thế nào để máy tính có thể hiểu và xử lý được những tri thức diễn đạt bằng ngôn ngữ tự nhiên. Để đạt được điều này, trước hết người ta cần phải xây dựng một lý thuyết logic toán cho phép mô tả chính xác ý nghĩa của các mệnh đề không rõ ràng, đa nghĩa.

Logic toán học cổ điển nghiên cứu các phép suy luận với các mệnh đề có giá trị chân lý (đúng/sai) rõ ràng. Chẳng hạn ta có các mệnh đề trong logic cổ điển:

- p: ‘hôm nay trời mưa’ , giá trị chân lý của p là ‘T’(đúng) hay ‘F’ (sai) là có thể xác định được.
- q: ‘hôm nay Trung nghỉ học’,sẽ có giá trị chân lý duy nhất là T hoặc F
- r: ‘tuổi của Trung là 22’ ...

Với những mệnh đề trên, logic cổ điển có thể áp dụng các quy tắc suy diễn, chẳng hạn quy tắc modus ponens :

‘’nếu p $\rightarrow$ q đúng và p đúng thì q đúng’’

do đó nếu có luật ‘trời mưa thì SV nghỉ học’ thì nếu có p : ‘hôm nay trời mưa’ là đúng thì sẽ suy ra q : ‘hôm nay Trung nghỉ học’ là đúng.

Tuy nhiên trong thực tế, có nhiều mệnh đề chứa những thông tin không rõ ràng, không chính xác, chẳng hạn ta thường gặp những mệnh đề :

- p’ : ‘A là người lập trình giỏi’
- q’ : ‘lương của A là cao’
- r’ : ‘A có cảm tình với B’

Những mệnh đề trên đây chứa những thông tin không chính xác và không đầy đủ (gọi là các thông tin mờ), chẳng hạn: như thế nào là lập trình giỏi, cho nên không thể có giá trị chân lý của p’, hay lương của A cao là bao nhiêu, A cảm tình với B đến mức nào ? Tất cả những mệnh đề trên đều không thể có giá trị chân lý (đúng/sai) rõ ràng (gọi là các mệnh đề ‘mờ’). Chúng ta cũng không thể áp dụng quy tắc modus ponens của logic cổ điển với các mệnh đề 'mờ' trên đây, để suy ra 'A có lương cao' là đúng, dù rằng có luật : 'người lập trình giỏi thì có lương cao'.

Để máy tính có thể hiểu được các tri thức diễn đạt bằng ngôn ngữ tự nhiên chứa đựng những thông tin 'mờ', người ta cần phải xây dựng một lý thuyết logic mới, cho phép mô tả chính xác ý nghĩa của các mệnh đề có chứa các thông tin không rõ ràng, đa nghĩa.

Vào năm 1965, Giáo sư Lotfi Zadeh - trưởng khoa điện tử thuộc trường đại học California, một nhà toán học và logic học người Hà Lan, đã xây dựng thành công lý thuyết tập mờ và hệ thống logic mờ. Phát minh này của Zadeh đã cho phép con người có thể lượng hóa giá trị các mệnh đề mờ, nhờ đó truyền đạt một số thông tin cho máy móc qua ngôn ngữ tự nhiên, và chúng có thể "*hiểu*" khá chính xác nội dung của những thông tin đó. Đây là một bước tiến có tính đột phá trong việc phiên dịch hay lượng hóa những mệnh đề của ngôn ngữ tự nhiên, có chứa những thông tin không chính xác và không đầy đủ, (các thông tin "*mờ*") sang các ngôn ngữ hình thức, ngôn ngữ lập trình.

Chương I

LÝ THUYẾT TẬP MỜ

1.1 BỔ TÚC CÁC KIẾN THỨC VỀ TẬP HỢP

Để nghiên cứu các tập hợp mờ (FUZZY SET) và logic mờ (FUZZY LOGIC) trước hết ta nhắc lại các kiến thức cơ bản về lý thuyết tập hợp cổ điển (CRISP SET), các ánh xạ và các quan hệ trên các tập hợp. Đây là những kiến thức nền tảng của toán học, hầu hết những kiến thức này sinh viên ngành Tin học đã được học tập trong các năm đầu của bậc đại hoc, tuy nhiên, sinh viên cần ôn lại và chắc chắn rằng mình đã nắm rất vững những kiến thức này trước khi bắt đầu môn học Logic mờ và ứng dụng.

1.1.1 Mô tả tập hợp

- Một tập hợp được mô tả là một nhóm các đối tượng không có sự lặp lại. Mỗi đối tượng của tập hợp được gọi là một phần tử của tập hợp đó.

Các chữ cái in hoa (có thể kèm theo chỉ số): A, B, C,..hay A_1, A_2, A_3… thường được dùng để đặt tên cho tập hợp. Các chữ cái in thường (có thể kèm theo chỉ số): a, b, c,..hay a_1, a_2, a_3… thường được dùng để chỉ các phần tử của tập hợp.

- Nếu số phần tử của tập hợp là hữu hạn và không quá lớn ta có thể đặc tả tập hợp bằng cách liệt kê tất cả các phần tử của nó giữa hai dấu ngoặc {…}, các phần tử trong tập hợp được viết cách nhau bởi dấu phảy " , " và không quan tâm đến thứ tự các phần tử trong một tập hợp.

Nếu phần tử *x* là thuộc tập hợp A, ta viết *x* Č *A* (đọc: x thuộc A), nếu trái lại, ta viết *x* č *A*. (đọc *x* không thuộc A).

- Hai tập hợp bằng nhau là hai tập hợp có chứa các phần tử như nhau.

Chẳng hạn: Tập hợp A = {1, 2, 3, 4, 5} là bằng tập hợp B, với B = {2, 1, 4, 3, 5}, ta viết A = B.

Thí dụ 1.1 Gọi D là tập hợp các ngày trong tuần, khi đó ta có thể cho D bằng cách liệt kê các phần tử của nó:

D = {*Mon, Tues, Wed, Thurs, Fri, Sat, Sun*}

Ta có Mon $\in$ D, Fri $\in$ D, nhưng September $\notin$ D.

Ngoài ra, tập hợp: {*Sat, Tues, Wed, Mon,Thurs, Fri, Sun*} cũng bằng tập hợp D.

Nếu một tập hợp chứa một số khá lớn các phần tử, hoặc là vô hạn các phần tử, người ta có thể không liệt kê tất cả các phần tử của tập hợp, mà dùng cách đặc tả tập hợp theo một số tính chất đặc trưng của các phần tử của nó.

Thí dụ 1.2 Có thể cho một số tập hợp như sau :

a/. D = {x | x là một ngày trong tuần }, D là tập các ngày của một tuần lễ,

b/. C = {z | z = a + ib, với a, b $\in$ R, i^2 = -1}, C là tập hợp số phức,

c/. X = {x | x > 5}, X là tập các số thực có giá trị lớn hơn 5.

- Ta nói tập hợp A là tập hợp con của tập hợp B và ký hiệu là A $\subseteq$ B, nếu mọi phần tử của A cũng là phần tử của B.

Ta nói tập hợp A là tập hợp con thực sự của tập hợp B và ký hiệu là A $\subset$ B, nếu A là tập hợp con của B, và B có ít nhất một phần tử không thuộc A. Nếu A có dù chỉ một phần tử mà không phải là phần tử của B thì A không phải là tập hợp con của tập hợp B.

Nếu A $\subseteq$ B thì ta nói A bị chứa trong B, hay B chứa A.

Nếu A $\subset$ B thì ta nói A bị chứa thực sự trong B, hay B thực sự chứa A.

- Hai tập hợp A và B gọi là bằng nhau khi và chỉ khi A $\subseteq$ B và B $\subseteq$ A, và viết A = B.

Phương pháp chứng minh hai tập hợp bằng nhau

Để chứng minh 2 tập bằng nhau, A = B, ta sẽ chứng minh hai bao hàm thức A $\subseteq$ B và B $\subseteq$ A. Để chứng minh A $\subseteq$ B ta cần chỉ ra rằng: với phần tử bất kỳ x $\in$ A thì cũng có x $\in$ B, với bao hàm thức ngược lại B $\subseteq$ A cũng chứng minh tương tự. (xem thí dụ 1.5)

- Một trường hợp đặc biệt của tập hợp là "tập hợp rỗng", tập hợp này không chứa bất kỳ phần tử nào, và được ký hiệu là Ø, hay { }. Tập hợp rỗng được xem như tập con của mọi tập hợp.
- Tập hợp tất cả các tập hợp con của tập hợp A (kể cả chính tập A và tập rỗng) gọi là tập hợp lũy thừa của A, ký hiệu 2^A, tập hợp này cũng được ký hiệu là P(A).
- Lực lượng của tập hợp A là số phần tử của A. Ký hiệu lượng của tập hợp A là | A |.

Rõ ràng ta có $|2^A| = 2^{|A|}$.

Thí dụ 1.3. Một số kết quả so sánh các tập hợp :

a/. {1, 2, 3, 4} $\subseteq$ {2, 1, 4, 5, 3}

b/. {1, 2, 3, 4, 5}={5, 1, 2, 3, 4}

c/. Cho A = {1, 2, 3}thì tập hợp lũy thừa của A là

2^A = {Ø , {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}}

Ta có $|2^A| = 2^{|A|} = 2^3 = 8$ phần tử

Trong chuyên đề này, từ nay về sau, để cho ngắn gọn, ta dùng từ "tập" để thay cho "tập hợp".

1.1.2 Các phép toán trên tập hợp

Các tập hợp được xét ở đây được xem như là các tập con của một tập vũ trụ X nào đó. Các phép toán xác định trên tập hợp là:

a. Phần bù của tập hợp A trong X, ký hiệu $\overline{A}$, là tập các phần tử của X mà không thuộc A.

$$\overline{A} = \{x \in X \mid x \notin A\}$$

b. Hợp của A và B, ký hiệu $A \cup B$, là tập các phần tử thuộc ít nhất một trong hai tập A , B.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$$

c. Giao của A và B, ký hiệu $A \cap B$, là tập hợp các phần tử đồng thời thuộc cả A và B.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}$$

d. Hiệu của A và B, ký hiệu $A \setminus B$ (hoặc $A - B$), là tập các phần tử thuộc A mà không thuộc B

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}$$

Một số tính chất của các phép toán trên tập hợp:

Cho A, B, C là các tập con của tập vũ trụ X, có thể chứng minh được các tính chất sau:

- Một số tính chất về phần bù (phủ định):

$$\overline{\overline{A}} = A \; ; \; \overline{X} = \varnothing \; ; \; \overline{\varnothing} = X$$

- Giao hoán:

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

- Kết hợp:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

- Phân bố:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- Đối ngẫu (công thức Demorgan):

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad (1)$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad (2)$$

- Lực lượng của hai tập hợp:

$$|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|$$

1.1.3 Tich Decac của các tập hợp

Tích Decac *(Descartes Product)* của hai tập A và B là một phép ghép hai tập để được tập hợp mới, ký hiệu $A \times B$:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Dễ thấy rằng lực lượng của tích Decac $A \times B$ là: $|A \times B| = |A| . |B|$

Có thể mở rộng tích Decac cho nhiều tập hợp:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots n\}.$$

Có thể dùng ký hiệu lũy thừa để chỉ tích Decac của cùng một tập hợp:

$$A^k = A \times A \times ... \times A \text{ (k lần)}$$

Thí dụ 1.4: Cho R là tập số thực, biểu diễn các điểm trên đường thẳng, khi đó:

$R^2 = \{(x, y) \mid x \in R, y \in R\}$biểu diễn các điểm trên mặt phẳng,

$R^3 = \{(x, y, z) \mid x \in R, y \in R, z \in R\}$biểu diễn các điểm trong không gian,

Thí dụ 1.5: Chứng minh công thức Demorgan thứ nhất: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Ta cần chứng minh hai bao hàm thức : $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ và $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.

- Chứng minh $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ (a) :

Giả sử x là phần tử bất kỳ mà $x \in \overline{A \cup B}$, khi đó $x \notin A \cup B$, suy ra $x \notin A$ và $x \notin B$, vậy $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Bao hàm thức (a) được chứng minh.

- Với bao hàm thức $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$ (b) ta cũng chứng minh tương tự.

Từ (a) và (b) suy ra $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Các bạn sinh viên tự chứng minh công thức Demorgan thứ hai như là một bài tập.

1.1.4 Quan hệ trên các tập hợp

Trong nhiều vấn đề, ta cần xem xét đến một mối quan hệ nào đó giữa các phần tử của các tập hợp. Trường hợp đơn giản nhất là xem xét quan hệ giữa hai phần tử của một tập hợp. Những cặp phần tử như vậy tạo nên một tập con của tích Decac $X \times X$, và được gọi là một quan hệ hai ngôi trên tập hợp X.

Ta có định nghĩa hình thức cho một quan hệ R trên tập X như sau:

Định nghĩa 1.1.

Một quan hệ hai ngôi R (hay đơn giản là quan hệ R) trên một tập hữu hạn các phần tử X, là một tập con của tích Decac X ò X, ký hiệu là R(X).

Nếu hai phần tử a, b Č X có quan hệ với nhau theo quan hệ R thì ta viết aRb hay (a, b) Č R(X).

Chúng ta quan tâm đến các tính chất sau của một quan hệ hai ngôi R trên tập X:

- *Phản xạ*: Quan hệ R có *tính phản xạ* nếu: *aRa*, ? *a* Č *X*
- *Đối xứng*: Quan hệ R có *tính đối xứng* nếu: *aRb* Ĝ *bRa*
- *Bắc cầu:* Quan hệ R có *tính bắc cầu* nếu: *(aRb và bRc)* Ĝ *aRc*

Mỗi một quan hệ có thể có một số hoặc tất cả ba tính chất trên. Một quan hệ sẽ được gọi là quan hệ phản xạ, quan hệ đối xứng hoặc quan hệ bắc cầu khi nó có tính chất tương ứng.

Thí dụ 1.6. Xét tập X = {1, 2, 3, 4}.

Ta xác định các quan hệ :

a/. Ta xác định mối quan hệ L giữa các phần tử của X như sau: với $a, b \in X$, ta nói a có quan hệ L với b, nếu a nhỏ hơn b. Vậy quan hệ L trên X được xác định bởi tập hợp:

L(X) = {(1,2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4) }

b/. Ta xác định mối quan hệ D giữa các phần tử của X như sau: với a, b $\in$ X, ta nói a có quan hệ D với b, nếu a chia hết cho b. Vậy quan hệ D trên X được xác định bởi tập:

D(X) = {(2, 1), (3, 1), (4, 1), (4, 2), (1, 1), (2, 2), (3, 3) (4, 4)}

Dễ thấy rằng L là quan hệ bắc cầu trên X, nhưng không phải là đối xứng và phản xạ, còn D là quan hệ phản xạ và bắc cầu trên X, nhưng D không phải là quan hệ đối xứng.

Người ta quan tâm đến một loại quan hệ đặc biệt, đó là quan hệ tương đương.

Định nghĩa 1.2.

Một quan hệ hai ngôi R trên X được gọi là quan hệ tương đương nếu R là quan hệ phản xạ, đối xứng và bắc cầu; tức là: với mọi phần tử a, b, c Č *X thì R thỏa các tính chất:*

- *aRa,* ? *a* Č *X* (*Tính phản xạ*)
- *aRb* Ĝ *bRa (Tính đối xứng)*
- *(aRb và bRc)* Ĝ *aRc (Tính bắc cầu)*

Nếu R là quan hệ tương đương trên X thì mọi cặp phần tử thuộc R(X) được gọi là tương đương với nhau (theo quan hệ R).

Thí dụ 1.7. Xét tập m số tự nhiên: M = {1, 2, … m}, với mọi cặp số a và b thuộc M, ta nói a đồng dư với b modulo k, nếu a mod k = b mod k, (0 < k < m), và ký hiệu là:

a~b (mod k).

Dễ thấy rằng nếu a~b (mod k) thì a – b là một bội số của k.

Có thể thấy rằng quan hệ a~b (mod k) thỏa mãn cả ba tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu, vậy đây là một quan hệ tương đương.

Chẳng hạn, với m = 5, k = 2. Ta có M = {1, 2, 3, 4, 5}, Xét quan hệ R trên M là quan hệ a~b(mod 2). Khi đó các số a, b thỏa quan hệ R là những cặp số khi chia cho 2 thì có cùng số dư.

R(M) = {(1, 3), (1, 5), (2, 4), (3, 5), (3, 1), (5, 1), (4, 2), (5, 3), (1, 1) (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)}

Rõ ràng R thỏa cả 3 tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu, vậy R là quan hệ tương đương.

- *Phân hoạch của tập hợp:* Một quan hệ tương đương có thể xác định một cách chia tập X thành các tập con rời nhau gọi là một phân hoạch của tập X. Cụ thể, ta có định nghĩa sau:

Định nghĩa 1.3.

Phân hoạch của tập hợp X là tập P các tập con của X: $P = \{X_1 , X_2 , \ldots X_k \}$, *trong đó* X_i ċ *X , i = 1, 2, …, k;* X_1ĆX_2Ć…Ć$X_k = X$, X_iąX_j = Ą *với i ÷ j.*

Một quan hệ tương đương *R* trên tập hợp X sẽ chia tập X thành các *lớp tương đương*, sao cho hai phần tử thuộc cùng một lớp là tương đương với nhau (theo quan hệ R). Một phần tử *a* của tập X phải thuộc về đúng một lớp tương đương nào đó, chứa tất cả những phần tử tương đương với *a*, ký hiệu lớp này là *C(a,R)*. Như vậy các lớp tương đương là các tập con rời nhau của X, và phủ kín tập X.

Do đó, một quan hệ tương đương R trên một tập hợp sẽ xác định một phân hoạch trên tập hợp đó, và ngược lại, một phân hoạch bất kỳ trên một tập hợp sẽ tương ứng với một quan hệ tương đương trên tập hợp đó.

Trở lại thí dụ 1.6, chẳng hạn, với m = 5, k = 2, ta có M = {1, 2, 3, 4, 5}, ta gọi R là quan hệ tương đương a~b (mod 2) trên M, thì R sẽ chia tập M thành hai lớp tương đương là tập các phần tử khi chia cho 2 sẽ có cùng số dư :

C(1, R) = {1, 3, 5}

C(2, R) = {2, 4}

Rõ ràng là C(1, R) $\cup$ C(2, R) = M, và C(1, R) $\cap$ C(2, R) = $\varnothing$ nên các lớp tương đương trên làm thành một phân hoạch của tập M, chia M thành tập con các số lẻ và tập con các số chẵn trong M..

- *Quan hệ thứ tự:* Đôi khi, ta còn chú ý đến một tính chất khác của các quan hệ, đó là tính *phản đối xứng*. Quan hệ R có tính *phản đối xứng* nếu: *(aRb và bRa)*Ĝ *(a = b)*. Ta có định nghĩa:

Định nghĩa 1.4.

Quan hệ R trên tập X được gọi là quan hệ thứ tự nếu nó có ba tính chất: phản xạ, phản đối xứng và bắc cầu.

Thí dụ 1.8. Trên tập X = {1, 2, 3, 4}xét quan hệ R: với mọi cặp số a và b thuộc X, ta nói aRb nếu $a \le b$.

Ta có R(X) = {(1,2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (1, 1) (2, 2), (3, 3), (4, 4)}

Dễ thấy rằng R là một quan hệ thứ tự trên tập X.

- *Bao đóng của một quan hệ*. Cho quan hệ R trên tập hợp X, giả sử P là một tập các tính chất nào đó của các quan hệ (chẳng hạn tính chất phản xạ, đối xứng hay bắc cầu…).

Định nghĩa 1.5.

Bao đóng P (P-closure) của quan hệ R trên tập X, là một quan hệ nhỏ nhất chứa tất cả các cặp của R, và những cặp được suy dẫn ra từ các tính chất trong P.

Ta xét hai loại bao đóng sau của quan hệ R.

- *Bao đóng bắc cầu (bao đóng truyền ứng)* của *R*, ký hiệu R^+ được xác định như sau:
- Nếu (a, b) $\in$ R thì (a, b) cũng thuộc R^+.
- Nếu (a, b) $\in$ R^+ và (b, c) $\in$ R thì (a, c) $\in$ R^+.
- *Bao đóng phản xạ và bắc cầu* của *R*, ký hiệu R^* được xác định như sau:

$$R^* = R^+ \cup \{(a, a) \mid \forall\ a \in X\}$$

Thí dụ 1.9. Cho quan hệ R = {(1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 4)} trên tập X = {1, 2, 3, 4},

Ta có: R^+ = {(1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 4), (1, 3), (2, 4), (1, 4)}

Ta có: R^* = {(1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 4), (1, 3), (2, 4), (1, 4), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)}

1.1.5 Ánh xạ trên các tập hợp

Giũa các tập hợp có thể có sự tương ứng giữa một (nhiều) phần tử của một (nhiều) tập hợp này với các phần tử của (các) tập hợp khác, khi đó ta có một ánh xạ giữa các tập hợp đó. Trường hợp đơn giản nhất, ta có định nghĩa sau :

Định nghĩa 1.6

*Cho hai tập hợp A và B, nếu có một quy tắc f cho tương ứng mỗi phần tử x*Č *A với một phần tử duy nhất y* Č *B thì ta nói có một ánh xạ f từ A vào B, và ký hiệu là :*

f : A ì *B*

- Phần tử *y* ∈ B mà tương ứng với phần tử x ∈ A được gọi là ảnh của *x* qua ánh xạ *f*, thường được ký hiệu là *y = f(x).*
- Tập tất cả những giá trị *y* ∈ B là ảnh của *x* nào đó trong A, gọi là ảnh của A qua ánh xạ *f*, được ký hiệu và xác định như sau:

f(A) = {y Č *B | có x* Č *A để y = f(x)}*

Từ định nghĩa ánh xạ trên đây, chú ý rằng ánh xạ *f* phải thỏa mãn hai tính chất:

(i) Mọi phần tử x ∈ A đều có tương ứng với một phần tử y ∈ B. Tập A còn được gọi là miền xác định của ánh xạ *f*. (không thể có phần tử nào của A không có tương ứng vào B)

(ii) Có thể có hai phần tử khác nhau của A cùng tương ứng với một phần tử của B, nhưng một phần tử của A thì không thể tương ứng với hai phần tử khác nhau của B.

Nếu vi phạm một trong 2 tính chất trên thì phép tương ứng *f* không phải là một ánh xạ.

Định nghĩa 1.7

Cho ánh xạ *f* từ A vào B, khi đó:

a/. Ánh xạ *f : A* ì *B được gọi là đơn ánh nếu ảnh của các phần tử khác nhau là khác nhau.*

Nói cách khác: ánh xạ f gọi là đơn ánh nếu với mọi x_1, x_2Č *A, mà* $x_1 \neq x_2$*, thì* $f(x_1) \neq f(x_2)$

b/. Ánh xạ *f : A* ì *B được gọi là toàn ánh nếu f(A) = B.*

*Nói cách khác: ánh xạ f gọi là toàn ánh nếu với bất kỳ y*Č *B, có ít nhất một phần tử x*Č *A tương ứng với y, tức là có x* Č *A sao cho y = f(x).*

c/. Ánh xạ *f : A* ì *B gọi là song ánh nếu f vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh.*

Chú ý:

1. Nếu *f : A* ì *B* là một ánh xạ song ánh, thì tồn tại ánh xạ ngược từ B vào A, ký hiệu f^{-1}*: B* ì *A*, ứng mỗi phần tử *y*Č *B* với một phần tử *x*Č *A* mà *y = f(x).*

Ánh xạ ngược f^{-1}*: B* ì *A* cũng là một song ánh và chỉ ánh xạ song ánh mới có ánh xạ ngược

2. Ánh xạ đơn ánh còn được gọi là 'ánh xạ 1 – 1'; ánh xạ toàn ánh còn gọi là 'ánh xạ lên' và ánh xạ song ánh còn gọi là ánh xạ '1 – 1' và 'lên'.

3. Ánh xạ *f : A* ì *B* cũng được gọi là một hàm từ A vào B. Khi các tập A, B là các tập con của tập số thực R, thì các ánh xạ được gọi là các hàm số.

Thí dụ 1.10.

a/. Gọi A là tập các sinh viên trong 1 lớp, B = {0, 1, 2, …, 100}, phép tương ứng *f* ứng mỗi sinh viên với 1 giá trị trong B là điểm thi môn tiếng Anh của sinh viên đó (thang điểm 100, không có điểm lẻ). Rõ ràng *f* là một ánh xạ từ A vào B, vì với mỗi sinh viên đều có điểm (thỏa mãn tính chất (i), và một sinh viên chỉ có một điểm duy nhất (thỏa mãn tính chất (ii) của ánh xạ).

b/. Phép tương ứng ngược lại từ B vào A không phải là ánh xạ, vì có thể với một giá trị trong B ứng với nhiều sinh viên cùng nhận giá trị đó là điểm (phá vỡ tính chất (ii) của ánh xạ. Ngoài ra, có thể có những giá trị của B không có sinh viên nào có điểm như vậy (phá vỡ tính chất (i) của ánh xạ). Phép tương ứng phá vỡ ít nhất một trong hai tính chất trên thì không phải là ánh xạ.

c/. Nếu gọi C là tập các mã sinh viên của lớp, thì tương ứng g mỗi sinhh viên với mã SV của mình sẽ là một ánh xạ vừa có tính đơn ánh, vừa có tính toàn ánh, vậy g là một ánh xạ song ánh từ A vào C. Ta có ánh xạ ngược từ tập mã sinh viên C vào tập sinh viên A: $g^{-1}: C \rightarrow A$. Rõ ràng ánh xạ g^{-1} cũng là một song ánh.

Các bạn sinh viên có thể tìm thêm các thí dụ về các loại ánh xạ.

1.2 CÁC KHÁI NIỆM CƠ SỞ CỦA TẬP MỜ

1.2.1. Khái niệm tập hợp mờ

Khái niệm '*Tập hợp mờ*' *(Fuzzy Set)* là mở rộng của khái niệm tập hợp cổ điển, nhằm đáp ứng nhu cầu biểu diễn những tri thức không chính xác. Trong lý thuyết tập hợp cổ điển (*Crisp set*), quan hệ thành viên của các phần tử đối với một tập hợp được đánh giá theo kiểu nhị phân một cách rõ ràng : mỗi phần tử u của vũ trụ tham chiếu U là chắc chắn thuộc tập A hoặc chắc chắn không thuộc tập A. Như vậy, để xem một phần tử có là là thành viên của tập A hay không, ta gán cho phần tử đó giá trị 1 nếu phần tử đó chắc chắn thuộc A, và giá trị 0 nếu nó không thuộc về tập hợp A, tức là ta có thể xây dựng một hàm thành viên (hay hàm thuộc) để đánh giá một phần tử có thuộc tập A hay không :

$$\forall u \in U, \mu_A(u) = \begin{cases} 1 \;\; if \;\; u \in A \\ 0 \;\; if \;\; u \notin A \end{cases}$$

Rõ ràng, hàm thuộc μ_A sẽ xác định tập con cổ điển A trên tập vũ trụ U. với μ_A chỉ nhận giá trị trong tập hợp{0,1}.

Ngược lại, lý thuyết tập mờ cho phép đánh giá nhiều mức độ khác nhau về khả năng một phần tử có thể thuộc về một tập hợp. Ta cũng dùng một hàm thành viên (hàm thuộc) để xác định các mức độ mà một phần tử *u* thuộc về tập A : $\forall u \in U, 0 \le \mu_A(u) \le 1$.

Chẳng hạn, xét vũ trụ tham chiếu là các nhân viên trong 1 công ty, gọi A là tập 'những người có mức lương từ 6 triệu đến 8 triệu đồng, thì A là 1 'tập rõ', gồm tất cả những người có mức lương S, mà 6000000 ≤ S ≤ 8000000. Rõ ràng ai có lương 5.990.000đ hay 8.010.000đ là không thuộc tập A.

Nếu ta coi mức lương từ 6.000.000 trở lên là mức 'thu nhập cao', thì cả những người có mức lương thấp hơn 6.000.000 vài chục ngàn đến vài trăm ngàn đồng vẫn có thể được xem là thuộc tập hợp 'những người có thu nhập cao'. Tập A ở trên là tập hợp theo nghĩa cổ điển (tập rõ), còn tập B : 'những người có thu nhập cao' là tập mờ, mỗi phần tử của vũ trụ tham chiếu đều được gán một giá trị chỉ mức độ thuộc tập mờ này, chẳng hạn một nhân viên có mức lương 6.800.000

có độ thuộc vào tập B này là bằng 1 (chắc chắn là người có thu nhập cao), nhưng một người có mức lương 2.000.000 thì có thể coi là thành viên của tập này với độ thuộc rất thấp, độ thuộc sẽ tăng dần với những người có mức lương càng cao. Những người có thu nhập dưới 1.000.000 đ thì chắc chắn không thể thuộc tập B (mức độ là thành viên đối với tập B là bằng 0).

Ta có định nghĩa hình thức cho một tập con mờ trên một vũ trụ tham chiếu như sau :

Định nghĩa 1.8.

Cho U là một vũ trụ tham chiếu, tập con mờ A trên U được xác định bởi hàm thuộc μ_A, gán cho mỗi phần tử u của U, một giá trị $\mu_A(u)$, với $0 \le \mu_A(u) \le 1$, để chỉ mức độ mà phần tử u thuộc về tập mờ A. Nói cách khác, tập con mờ A trên U được xác định bởi ánh xạ :

$$\mu_A : U \text{ ì } [0, 1]$$

Tập con mờ A trên U xác định bởi hàm thuộc $\mu_A : U \to [0, 1]$ có thể được biểu diễn như sau :

- Với U là tập rời rạc các giá trị, U = $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ tập mờ A trên U được biểu diễn:

  A = $\{ \mu_A(u_1)/u_1, \mu_A(u_2)/u_2, \ldots, \mu_A(u_n)/u_n \mid u_i \in U, i = 1, 2, \ldots, n \}$

- Với U là miền không đếm được, tập mờ A trên U được biểu diễn bằng ký pháp:

  A = $\int_U «_A(u)/u$

Ký pháp trong cách biểu diễn thứ hai này không liên quan gì đến tích phân, chỉ có nghĩa rằng với mọi phần tử *u* của miền vũ trụ U (U là miền liên tục hoặc không đếm được) đều được gán với một độ thuộc của *u* vào tập mờ A.

Nếu hàm $\mu_A(u)$ cho kết quả 0 đối với phần tử $u \in$ U thì phần tử đó không có trong tập đã cho, kết quả 1 thì phần tử đó hoàn toàn thuộc tập đã cho. Các giá trị trong khoảng mở từ 0 đến 1 đặc trưng cho các phần tử mờ, tức là mức độ là thành viên của phần tử đó đối với tập hợp dã cho.

Trường hợp đặc biệt, nếu hàm $\mu_A(u)$ chỉ lấy giá trị bằng 0 hay 1, tức là $\mu_A : U \to \{0, 1\}$, thì tập con mờ A là một tập con cổ điển của U. Như vậy, tập con cổ điển (tập rõ) là một trường hợp riêng của tập con mờ.

Thí dụ 1.11. Xét tập U gồm 8 căn hộ được ký hiệu là $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7$ *và* u_8, mỗi căn hộ có số phòng tương ứng là 1, 2,…,8 phòng. Gọi A là tập hợp gồm các căn hộ “*rộng*”, B là tập hợp gồm các căn hộ “*thích hợp cho 4 người*”. Ta xây dựng hàm thuộc cho các tập mờ A và B như sau:

μ_A : $\mu_A(u_3) = 0.4$; $\mu_A(u_4) = 0.5$; $\mu_A(u_5) = 0.6$; $\mu_A(u_6) = 0.8$; $\mu_A(u_7) = 0.9$; $\mu_A(u_8) = 1.0$

μ_B : $\mu_B(u_3) = 0.4$; $\mu_B(u_4) = 1.0$; $\mu_B(u_5) = 0.7$; $\mu_B(u_6) = 0.5$,

đối với các phần tử khác, các giá trị của hàm thuộc là bằng 0.

Như vậy có thể biểu diễn các tập mờ trên như sau:

A = $\{0.4/u_3; 0.5/u_4; 0.6/u_5; 0.8/u_6; 0.9/u_7; 1.0/u_8\}$

B = $\{0.4/u_3; 1.0/u_4; 0.7/u_5; 0.5/u_6\}$.

Nếu gọi C là tập các căn hộ có số phòng không quá 4 thì rõ ràng C = $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$là một tập con cổ điển (tập rõ) của U, Tuy nhiên có thể coi C là tập con mờ trên U với hàm thuộc μ_C như sau:

$\mu_C(u_1) = 1.0$; $\mu_C(u_2) = 1.0$; $\mu_C(u_3) = 1.0$; $\mu_C(u_4) = 1.0$, $\mu_C(u_5) = \mu_C(u_6) = \mu_C(u_7) = \mu_C(u_8) = 0$.

Biểu diễn C dưới dạng tập con mờ trên U:

$$C = \{1.0/u_1 \; ; \; 1.0/u_2 \; ; \; 1.0/u_3 \; ; \; 1.0/u_4\}$$

Thuật ngữ "Tập mờ" là được dịch từ "Fuzzy set", với mục đích phân biệt với "Tập rõ" (Crisp Set). Thực ra phải dùng thuật ngữ "Tập con mờ" của một tập vũ trụ nào đó. Tuy nhiên, để cho gọn ta có thể dùng "Tập mờ" thay cho "Tập con mờ" mà không gây ra sai sót và hiểu lầm nào.

1.2.2 Các đặc trưng của tập mờ

Các đặc trưng của một tập mờ A trên U, là những thông tin để mô tả về các phần tử liên quan đến tập mờ A, những đặc trưng này còn chỉ rõ sự khác biệt của tập mờ A, so với những tập con cổ điển khác của U.

Định nghĩa 1.9.

Giá đỡ của tập mờ A (Support) là tập các phần tử có giá trị hàm thuộc lớn hơn 0 trong tập mờ A, được ký hiệu và xác định như sau:

$$supp(A) = \{u \mid u \in U \mid \mu_A(u) > 0\}$$

Định nghĩa 1.10.

Chiều cao của tập mờ A (Hight) là giá trị lớn nhất mà hàm thuộc có thể lấy trong tập mờ A, được ký hiệu và xác định như sau:

$$h(A) = \sup\{\mu_A(u), u \in U\}$$

Chú ý rằng nếu U là tập rời rạc thì $h(A) = \max\{\mu_A(u), u \in U\}$

Định nghĩa 1.11.

Tập mờ A gọi là chuẩn hóa nếu chiều cao của nó h(A) = 1

Như vậy tập mờ A trên U được gọi là chuẩn hóa, nếu chắc chắn có ít nhất 1 phần tử của U là thật sự thuộc A.

Định nghĩa 1.12

Hạt nhân của tập mờ A (Kernel) là tập các phần tử có giá trị hàm thuộc bằng 1, được ký hiệu và xác định như sau:

$$ker(A) = \{u \mid u \in U \mid \mu_A(u) = 1\}$$

Như vậy, tập mờ A có nhân khác rỗng khi và chỉ khi A là tập mờ chuẩn hóa.

Định nghĩa 1.13.

Lực lượng của tập mờ A được ký hiệu và xác định như sau:

$$|A| = \sum_{u \in U} \mu_A(u)$$

Chú ý rằng nếu A là tập rõ thì $\mu_A(u) = 1$ với mọi *u* thuộc A, tổng trên bằng số phần tử của A, trùng với định nghĩa lực lượng của tập hợp cổ điển.

Định nghĩa 1.14

α - nhát cắt của tập mờ A (hay tập mức α của A) là tập các phần tử có giá trị hàm thuộc lớn hơn hoặc bằng α, với α ∈ [0, 1], được ký hiệu và định nghĩa như sau:

A_α = {u | uČU | «$_A$(u) ñ ~}

Chú ý rằng α- nhát cắt của tập mờ A là 1 tập "rõ", các phần tử của A_α hoàn toàn được xác định.

Thí dụ 1.12. Xét tập mờ A trong thí dụ 1.11:

A = **{**$0.4/u_3$; $0.5/u_4$; $0.6/u_5$; $0.8/u_6$; $0.9/u_7$; $1.0/u_8$**}**

Giá đỡ, hạt nhân, chiều cao, tập mức α của tập mờ A được xác định như sau:

supp(A) = $\{u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8\}$

ker(A) = u_8

h(A) = 1.0

A là tập mờ chuẩn hóa, do có h(A) = 1.

Nhát cắt mức α = 0.5 của tập mờ A: $A_{0.5} = \{u_4, u_5, u_6, u_7, u_8\}$; $A_{0.9} = \{u_7, u_8\}$

1.2.3. Số mờ và các tập con mờ lồi

Khi U là một tập số thực R (hoặc là tập con của tập R), biểu diễn các giá trị bằng số như chiều cao, khoảng cách, trọng lượng, tuổi tác, mức lương, nhiệt độ..thì các tập con mờ trên U biểu diễn các giá trị 'mờ' như gần, xa, cao, thấp, nặng, nhẹ, trẻ, già...Các tập con mờ trên R có hàm thuộc là hàm lồi được gọi là các tập mờ lồi, đặc trưng cho các 'đại lương mờ' trên tập số thực.

1.2.3.1 Tập mờ lồi và số mờ

Định nghĩa 1.15.

- *Một tập con mờ A trên tập số thực R là tập mờ lồi nếu với mọi cặp phần tử a, bČ R và với mọi số thực ª Č [0, 1], hàm thuộc của A thỏa mãn:*

  μ_A(ªa + (1 - ª)b) ñ min {μ_A(a), μ_A(b)}

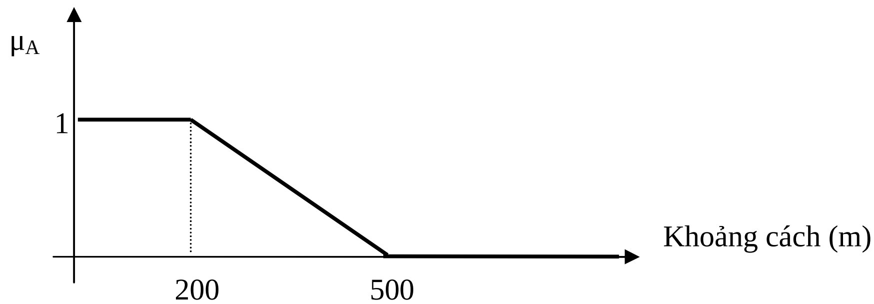
- *Tập con mờ A trên tập số thực được gọi là một số mờ, nếu A là tập mờ lồi và chuẩn hóa.*

Trong chuyên đề này, chúng ta chủ yếu nghiên cứu các tập con mờ trên vũ trụ tham chiếu là tập số thực R. Trong hầu hết các trường hợp, khi vũ trụ tham chiếu là tập số thực R, ta có thể đồng nhất khái niệm 'tập con mờ' và 'số mờ'.

Thí dụ 1.13. Xét tập H các ngôi nhà 'gần bãi biển'tại một địa phương, thông thường ta có thể hiểu cách bãi biển 50m là gần, hay có thể cách bãi biển đến 200m vẫn là gần, trên 200m thì tính chất 'gần bãi biển' sẽ ít dần đi, và từ 500m trở lên thì không còn coi là gần bãi biển nữa. Có thể biểu diễn những tri thức trên bằng một tập mờ, nếu gọi A là tập khoảng cách đến bãi biển của các ngôi nhà 'gần bãi biển' thì A sẽ là tập con mờ trên R, với hàm thuộc là:

$$\forall u \in R, \mu_A(u) = \begin{cases} 1 & if\ 0 < u \le 200 \\ \dfrac{500-u}{300}, & if\ 200 < u < 500 \\ 0 & if\ u \ge 500 \end{cases}$$

Đồ thị của số mờ A trong thí dụ 1.13 như sau:



Hình 1.1

Hàm thuộc μ_A trên đây là một hàm lồi, tập mờ A xác định bởi μ_A là tập mờ lồi, A là tập mờ chuẩn hóa, vậy A được gọi là một số mờ.

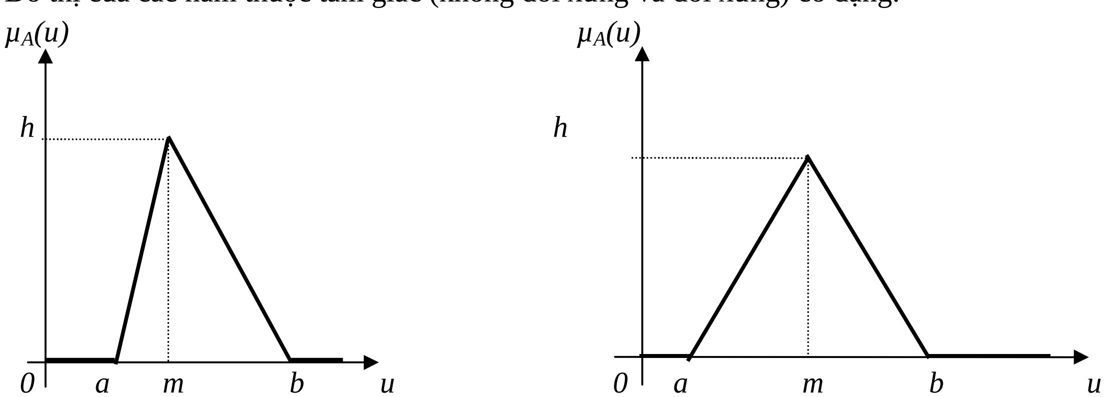
1.2.3.2 Các kiểu hàm thuộc của tập mờ

Kiểu của tập mờ phụ thuộc vào các kiểu hàm thuộc khác nhau. Đã có nhiều kiểu hàm thuộc khác nhau được đề xuất. Dưới đây là một số hàm thuộc tiêu biểu.

1. Tập mờ tam giác. Các tập mờ này xác định bởi hàm thuộc với 3 tham số là cận dưới a, cận trên b và giá trị m (ứng với đỉnh tam giác), với a < m < b. Hàm thuộc này được gọi là hàm thuộc tam giác, được gọi là đối xứng nếu nếu giá trị b – m bằng giá trị m – a, hay m = $\dfrac{a+b}{2}$

$$\mu_A(u) = \begin{cases} 0 & if\ u \le a, or\ u \ge b \\ \dfrac{u-a}{m-a}, & if\ a < u < m \\ \dfrac{b-u}{b-m}, & if\ m < u < b \\ h & if\ u = m, với\ h \le 1 \end{cases}$$

Đồ thị của các hàm thuộc tam giác (không đối xứng và đối xứng) có dạng:

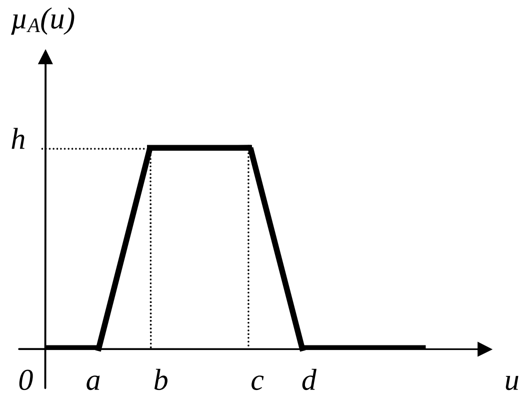


Hình 1.2 Các tập mờ tam giác.

2. Tập mờ hình thang. Hàm thuộc của tập mờ này gọi là hàm thuộc hình thang, xác định bởi bộ 4 giá trị a, b, c, d theo công thức sau:

$$\mu_A(u) = \begin{cases} 0 & if\ u \le a, or\ u \ge d \\ \dfrac{u-a}{b-a}, & if\ a < u < b \\ \dfrac{d-u}{d-c}, & if\ c < u < d \\ h & if\ b \le u \le c, với\ h \le 1 \end{cases}$$

Đồ thị của hàm thuộc hình thang có dạng sau:

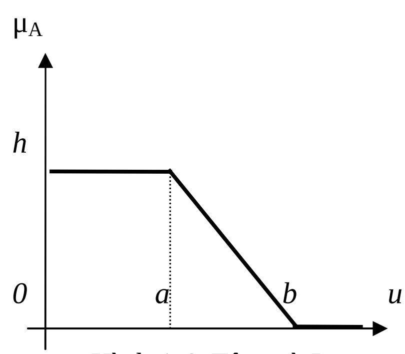


Hình 1.3. Tập mờ hình thang

3. Tập mờ L. Hàm thuộc của tập mờ này gọi là hàm thuộc L, được xác định như sau:

$$\mu_A(u) = \begin{cases} h & if\ u \le a,\ với\ h \le 1 \\ \dfrac{b-u}{b-a}, & if\ a < u < b \\ 0 & if\ u \ge b \end{cases}$$

Đồ thị của hàm thuộc L có dạng sau:



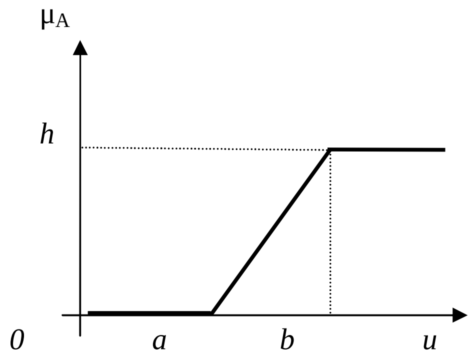
Hình 1.4 Tập mờ L

Hàm thuộc trong thí dụ 1.13 trên đây có dạng hàm thuộc L, với a = 100, b = 500.

4. Tập mờ Gamma tuyến tính (hay L trái). Hàm thuộc của tập mờ này gọi là hàm thuộc Gamma tuyến tinh (hay hàm thuộc 'L- trái', có dạng ngược với hàm thuộc L), được xác định bởi hai tham số a và b theo công thức sau:

$$\mu_A(u) = \begin{cases} 0 & if\ u \le a, \\ \dfrac{u-b}{b-a}, & if\ a < u < b \\ h & if\ u \ge b, với\ h \le 1 \end{cases}$$

Đồ thị của hàm thuộc gama tuyến tính có dạng sau:

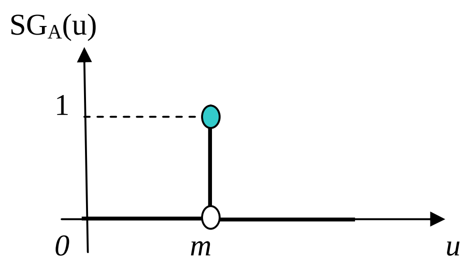


Hình 1.5   Tập mờ Gamma tuyến tính.

5. Hàm thuộc Singleton. Đây là hàm thuộc cho tập A có đúng một phần tử u = m, có giá trị 0 tại tất cả các điểm trong tập vũ trụ, ngoại trừ tại điểm m hàm có giá trị 1. Hàm thuộc Singleton của A ký hiệu và xác định như sau:

$$SG_A(u) = \begin{cases} 1\ \ if\ \ u = m \\ 0\ \ if\ \ u \ne m \end{cases}$$

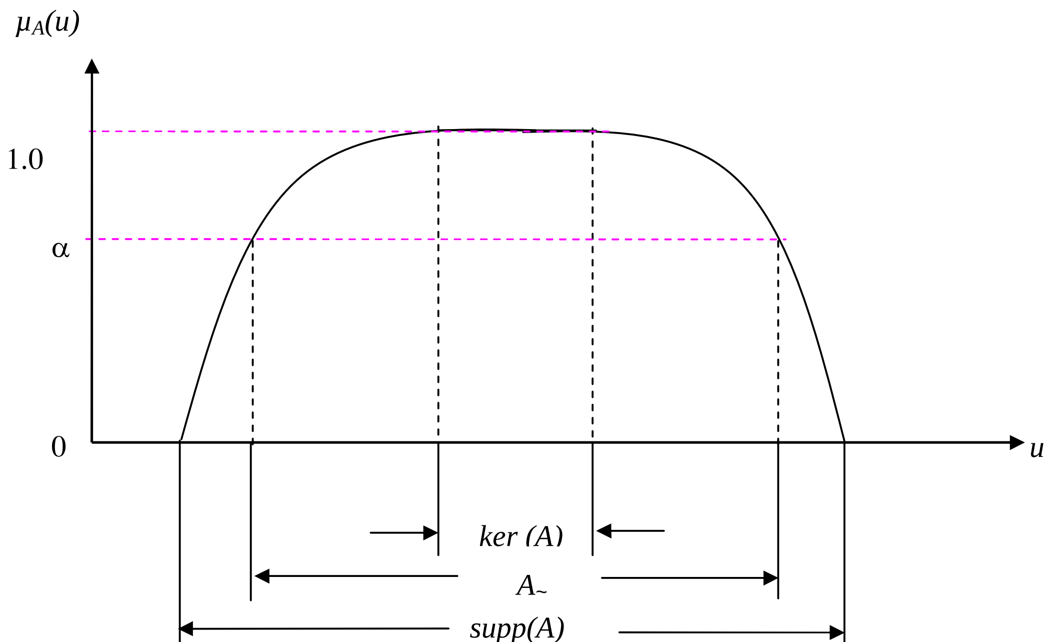
Đồ thị của hàm Singleton:



Hình 1.6   Tập mờ Singleton.

Trong hầu hết các trường hợp ứng dụng lý thuyết tập mờ thì vũ trụ tham chiếu là tập số thực R và các kiểu của hàm thuộc thường gặp các dạng trên, là những hàm lồi tuyến tính. Trong trường hợp tổng quát, ta có hàm thuộc là các hàm lồi tổng quát, có thể tuyến tính hoặc phi tuyến, các vấn đề lý thuyết tập mờ dưới đây đều được trình bày với những hàm lồi tổng quát.

Chẳng hạn, khi *u* là các số thực, ta có thể vẽ đồ thị hàm thuộc μ_A cùng với các đặc trưng của tập mờ A: giá đỡ, hạt nhân, α-nhát cắt như hình sau:



Hình 1.7 Giá đỡ, hạt nhân và α - nhát cắt của tập mờ A

1.3 CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP MỜ

Tương tự như lý thuyết tập hợp, trên các tập mờ cũng định nghĩa các khái niệm bằng nhau, bao hàm nhau và một số phép toán như: phép hợp, phép giao, tích Descartes, của 2 tập mờ, là sự mở rộng các phép toán tương ứng trong lý thuyết tập hợp cổ điển.

1.3.1 So sánh các tập mờ

Để so sánh các tập con mờ A, B trên cùng vũ trụ tham chiếu U, ta xem xét các hàm thuộc của nó.

Định nghĩa 1.16.

Cho A và B là hai tập con mờ trên vũ trụ tham chiếu U với hai hàm thuộc tương ứng là μ_A và μ_B, khi đó ta có:

- *Hai tập mờ A và B gọi là bằng nhau: ký hiệu A = B, nếu $\forall u \in U$ thì $\mu_A(u) = \mu_B(u)$.*
- *Tập mờ A chứa trong tập mờ B: ký hiệu $A \subseteq B$, nếu $\forall u \in U$ thì $\mu_A(u) \le \mu_B(u)$.*

Từ định nghĩa 1.3, ta thấy hai tập mờ là bằng nhau, khi mọi phần tử của tập này cũng thuộc tập kia (với cùng độ thuộc) và ngược lại. Điều này hoàn toàn tương tự khái niệm bằng nhau của hai tập hợp cổ điển. Ngoài ra, tập mờ A là tập con của tập mờ B nếu một phần tử bất kỳ thuộc A thì cũng thuộc B (với độ thuộc không thấp hơn độ thuộc của phần tử đó đối với A), điều này cũng tương tự như đối với các tập hợp cổ điển.

1.3.2 Các phép toán trên các tập mờ

Cũng như với các tập hợp cổ điển, ta có các phép toán hợp, giao, lấy phần bù và tích Decac của các tập con mờ. Các phép toán này được định nghĩa thông qua các hàm thuộc của các tập con mờ.

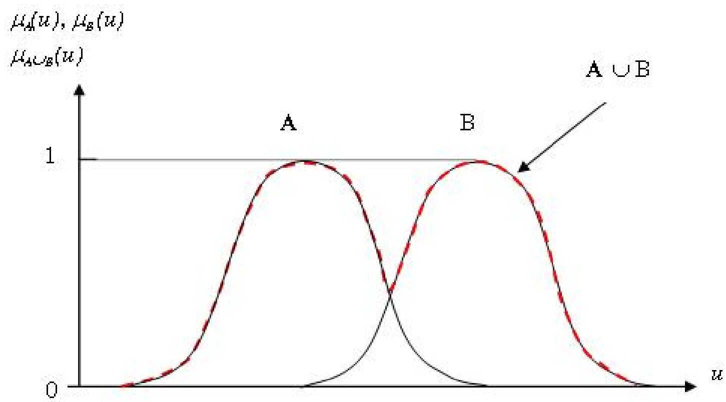
1.3.2.1 Phép hợp và phép giao của các tập con mờ

Định nghĩa 1.17.

Hợp của hai tập mờ A và B trên U, ký hiệu A Ć *B, là một tập mờ trên U với hàm thuộc được ký hiệu «$_{AĆB}$(u) và xác định như sau:*

? *u* Č*U, «$_{AĆB}$(u) = max{«$_A$(u), «$_B$ (u)}*

Đồ thị hàm thuộc của hợp mờ A, B và tập mờ *A* Ć *B* được cho trong hình sau:



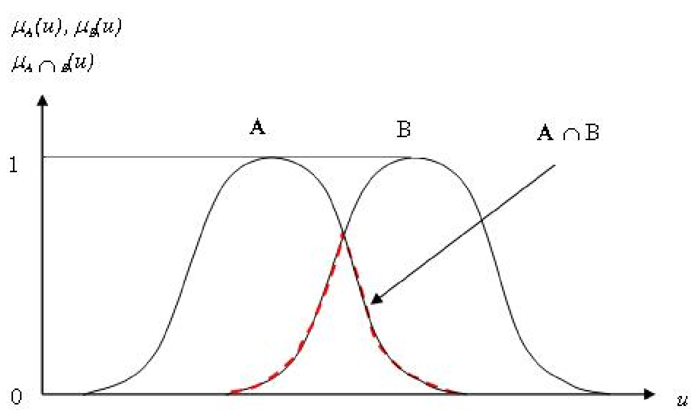
Hình 1.8 Hợp của hai tập mờ A và B

Định nghĩa 1.18.

Giao của hai tập mờ A và B trên U, ký hiệu A ą *B, là một tập mờ trên U với hàm thuộc được ký hiệu «$_{A\cap B}$(u) và được xác định như sau:*

? *u* Č*U, «$_{AąB}$(u) = min{«$_A$(u), «$_B$ (u)}*

Đồ thị hàm thuộc của hợp mờ A, B và tập mờ *A* ą *B* được cho trong hình sau:



Hình 1.9 Giao của hai tập mờ A và B

Một số tính chất của phép hợp và phép giao các tập mờ:

1. Giao của hai tập mờ lồi cũng là một tập mờ lồi, nhưng hợp của hai tập mờ lồi thì chưa chắc đã là tập một mờ lồi.

2. Các tính chất giao hoán, kết hợp và phân bố của phép hợp và phép giao trong lý thuyết tập hợp cổ điển vẫn đúng đối với phép hợp, phép giao của các tập con mờ. Tức là nếu A, B, C là các tập con mờ trên vũ trụ tham chiếu U, ta có các công thức sau:

- Giao hoán:

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

- Kết hợp:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

- Phân bố:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Nói chung, những công thức của tập hợp cổ điển chỉ liên quan đến phép hợp và phép giao, thì cũng đúng đối với các tập con mờ, chẳng hạn: $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$, $A \cap U = A$, $A \cup U = U$, …

1.3.2.2 Phần bù của một tập con mờ

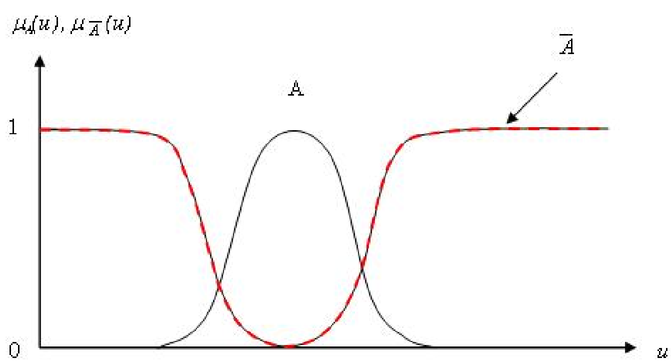
Trong tập hợp cổ điển, phần bù của một tập hợp chứa những phần tử không thuộc tập đó (trên cùng tập vũ trụ tham chiếu). Đối với tập con mờ A trên U, phần bù của A, ký hiệu là $\overline{A}$, chứa những phần tử với độ thuộc càng cao nếu độ thuộc của phần tử này vào A càng nhỏ. Nói cách khác, một phần tử càng ít có khả năng thuộc vào tập mờ A thì càng có nhiều khả năng thuộc vào phần bù $\overline{A}$, như vậy $\overline{A}$ cũng là một tập con mờ trên U, và được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 1.19.

Phần bù của tập mờ A, ký hiệu $\overline{A}$ là một tập con mờ trên U với hàm thuộc được ký hiệu $\mu_{\overline{A}}(u)$ và xác định như sau:

$$\forall u \in U, \mu_{\overline{A}}(u) = 1 - \mu_A(u)$$

Đồ thị hàm thuộc của tập mờ A và tập mờ $\overline{A}$ như sau:



Hình 1.10 Phần bù của tập mờ A

Một số tính chất của phép lấy phần bù các tập mờ:

1. Đối với các tập con cổ điển trên tập vũ trụ *U*, ta luôn có A $\cap \overline{A} = \varnothing$ và A $\cup \overline{A}$ = U , nhưng đối với các tập mờ thì hai tính chất này nói chung không đúng, tức là nếu $\overline{A}$ *l*à phần bù của tập mờ A trên U thì:

- A $\cap \overline{A} \neq \varnothing$, và
- A $\cup \overline{A} \neq$ U.

Đây là điểm khác nhau quan trọng giữa các tập con cổ điển và các tập con mờ.

2. Các tính chất khác đối với phần bù của tập con cổ điển vẫn đúng cho các tập con mờ, tức là nếu A, B là các tập con mờ trên U thì ta có :

- Một số tính chất về phần bù (phủ định):

$$\overline{\overline{A}} = A\,;\ \overline{U} = \varnothing\,;\ \overline{\varnothing} = U$$

- Các công thức đối ngẫu (công thức De Morgan):

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad (1)$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad (2)$$

Thí dụ 1.14. Trở lại các tập mờ A, B trong thí dụ 1.11:

A là tập hợp các căn hộ "*rộng*". A **= {**0.4/u_3; 0.5/u_4; 0.6/u_5; 0.8/u_6; 0.9/u_7; 1.0/u_8**}**

B là tập hợp các căn hộ "*thích hợp cho 4 người*". B = {0.4/u_3; 1.0/u_4; 0.7/u_5; 0.5/u_6}

Khi đó ta có:

A $\cup$ B = {Các căn hộ thích hợp cho 4 người ***"hoặc"*** rộng}

= {0.4/u_3; 1.0/u_4; 0.7/u_5; 0.8/u_6; 0.9/u_7; 1.0/u_8}

A $\cap$ B = {Các căn hộ thích hợp cho 4 người ***"và"*** rộng}

= {0.4/u_3; 0.5/u_4; 0.6/u_5; 0.5/u_6}

$\overline{A}$ = {Các căn hộ không rộng}
= {0.6/u_3; 0.5/u_4; 0.4/u_5;0.2/u_6; 0.1/u_7}

A $\cap \overline{A}$ = {0.4/u_3 ; 0.5/u_4 ; 0.4/u_5 ; 0.2/u_6 ; 0.1/u_7} $\neq \varnothing$

1.3.2.3 Tích Descartes của các tập con mờ

Trước hết ta định nghĩa tích Decac của 2 tập con mờ A và B trên các vũ trụ tham chiếu tương ứng U và V, giả sử U và V là độc lập với nhau.

Định nghĩa 1.20.

*Cho A và B là hai tập con mờ có các hàm thuộc μ_A và μ_B trên các vũ trụ tham chiếu tương ứng U và V, khi đó tích Descartes của A và B là một tập con mờ ký hiệu là A*ò *B trên vũ trụ tham chiếu U*ò *V, với hàm thuộc là $\mu_{A\text{ò} B}$ được xác định như sau:*

$$?(u,v) \in U\times V,\ \mu_{A\times B}(u,v) = \min\{\mu_A(u),\ \mu_B(v)\}$$

Tương tự như trong lý thuyết tập hợp cổ điển, ta có thể mở rộng định nghĩa tích Decac cho k tập mờ trên các vũ trụ tham chiếu độc lập:

Định nghĩa 1.21.

Tích Descartes của k tập mờ A_1, A_2,...A_k trên các vũ trụ tham chiếu U_1,U_2,..,U_k là một tập con mờ ký hiệu là A_1ò A_2ò ...ò A_k trên vũ trụ tham chiếu U_1ò U_2ò ...ò U_k , với hàm thuộc là μ_{A1}ò $_{A2..}$ò $_{Ak}$ được xác định như sau:

? $u=(u_1, u_2,..u_k,)$ Č U_1ò U_2ò ...ò U_k , μ_{A1}ò $_{A2..}$ò $_{Ak}$ $(u) = min\{\mu_{A1}(u_1), \mu_{A2}(u_2),..., \mu_{Ak}(u_k)\}$

Dựa trên các định nghĩa về tích Descartes của các tập con mờ, chúng ta sẽ nghiên cứu các quan hệ mờ trong các phần sau.

Bài tập chương 1

1. Cho A, B, C là các tập con cổ điển của tập vũ trụ X, hãy chứng minh các tính chất sau:

a/. $\overline{\overline{A}} = A$; $\overline{X}$ = Ø ; $\overline{Ø}$ = X

b/. A ∪ B = B ∪ A ; A ∩ B = B ∩ A

c/. (A∪B) ∪ C = A ∪ (B∪C) ; (A∩B) ∩ C = A ∩ (B∩C)

d/. A ∪ (B∩C) = (A∪B) ∩ (A∪C) ; A ∩ (B∪C) = (A∩B) ∪ (A∩C)

e/. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

f/. | A | + | B | = |A ∪ B| + |A ∩ B|

2. Cho A, B là các tập con cổ điển của tập vũ trụ X. Có thể dùng hàm thuộc để biểu diễn các tập con A, B như sau:

$\forall x \in X, «_A(x) = \begin{cases} 1 \ if \ \ u \in A \\ 0 \ if \ \ u \notin A \end{cases}$ và $\forall x \in X, «_B(x) = \begin{cases} 1 \ if \ \ u \in B \\ 0 \ if \ \ u \notin B \end{cases}$

Hãy xây dựng các hàm thuộc để biểu diễn các tập A∪B ; A∩B và $\overline{A}$.

3. Cho A, B, C là các tập con cổ điển của tập vũ trụ X. Hãy dùng hàm thuộc để chứng minh các công thức sau, bằng cách chỉ ra rằng với mỗi công thức thì hàm thuộc của tập hợp ở vế trái bằng hàm thuộc của tập hợp ở vế phải.

a/. A∪(B∩C) = (A∪B) ∩ (A∪C) ; A ∩ (B∪C) = (A∩B) ∪ (A∩C)

b/. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

4. Với những tri thức cho trong thí dụ 1.13:

a/. Hãy xây dựng và vẽ đồ thị hàm thuộc của tập mờ B là khoảng cách đến bãi biển của những ngôi nhà 'không gần bãi biển'. Hàm thuộc này có phải là hàm lồi không?

b/. Hãy xây dựng và vẽ đồ thị hàm thuộc của tập mờ C là khoảng cách đến bãi biển của những ngôi nhà cách biển khoảng 300 đến 400 m, chấp nhận sai số đến 50 m.

c/. Xác định tập mờ chỉ khoảng cách của những ngôi nhà không gần bãi biển, nhưng cách bãi biển khoảng 300-400m.

5. Cho A là tập con mờ trên tập vũ trụ U, chứng minh rằng với mọi α, α' ∈ [0, 1], nếu α' ≥ α thì $A_\alpha \subseteq A_{\alpha'}$, với A_α và $A_{\alpha'}$ là các nhát cắt mức α và α' của tập mờ A.

6. Cho A, B là các tập con mờ trên tập vũ trụ U, chứng minh rằng với mọi mức $\alpha \in [0, 1]$, những nhát cắt mức α của các tập mờ A, B, $A \cup B$, $A \cap B$ thỏa mãn các tính chất sau:

a/. $(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$

b/. $(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$

c/. nếu $A \supseteq B$ thì $A_\alpha \supseteq B_\alpha$

7. Xét tập U gồm 5 ứng cử viên vào chức vụ quản đốc phân xưởng, $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$, họ được lựa chọn theo hai tiêu chuẩn: A – trình độ nghiệp vụ (mức độ lành nghề), và B - kinh nghiệm nghề nghiệp. Tập thể có ý kiến đánh giá về mức độ phù hợp của các ứng viên với các tiêu chuẩn A và B như sau:

U	Tiêu chuẩn A	Tiêu chuẩn B
u_1	khá phù hợp	tương đối phù hợp
u_2	hoàn toàn phù hợp	khá phù hợp
u_3	rất phù hợp	hoàn toàn phù hợp
u_4	ít phù hợp	không phù hợp
u_5	tương đối phù hợp	rất phù hợp

Các mức độ phù hợp được xếp loại như sau:

- hoàn toàn phù hợp: mức độ phù hợp 1;

- rất phù hợp: mức độ phù hợp0.8;

- khá phù hợp: mức độ phù hợp 0.6;

- tương đối phù hợp: mức độ phù hợp 0.4;

- ít phù hợp: mức độ phù hợp 0.2

- không phù hợp: mức độ phù hợp: 0;

Gọi A và B là các tập con mờ những người thỏa tiêu chuẩn A và B tương ứng. Viết biểu diễn của các tập con này.

a/. Tìm tập con mờ của U những ứng viên thỏa ít nhất một trong hai tiêu chuẩn

b/. Thỏa cả hai tiêu chuẩn.

c/. Không thỏa tiêu chuẩn A.

d/. Tìm nhát cắt mức α của tập mờ những ứng viên thỏa cả 2 tiêu chuẩn, với $\alpha = 0.6$ và $\alpha = 0.8$.