

ÔN TẬP GIẢI TÍCH 1

(Tài liệu này tại địa chỉ: <http://www.hua.edu.vn/khoa/fita/ntkuong>)

07/2013

Mục lục

1	Hàm sơ cấp	2
1.1	Bài tập	2
2	Giới hạn và liên tục	3
2.1	Bài tập giới hạn và liên tục	3
3	Đạo hàm và vi phân	4
3.1	Bài tập đạo hàm và vi phân	4
4	Tích phân	6
4.1	Bài tập tính tích phân	6
4.2	Bài tập tích phân suy rộng	6
5	Chuỗi số và chuỗi hàm	8

Chương 1

Hàm sơ cấp

1.1 Bài tập

1. Tìm tập xác định của các hàm số sau

(a) $y = \ln(x^2 - 1)$

(b) $y = \arcsin(2^x - 1)$

(c) $y = \arccos\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

(d) $y = \sqrt{\frac{x}{3^x - 3}}$

(e) $y = \ln(2 \sin x - 1)$

(f) $y = \frac{1}{\cos 2^x}$

2. Tìm tập giá trị của các hàm số sau

(a) $y = 2^{\sin x}$

(b) $y = \ln(\arcsin x)$

(c) $y = \arccos\left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)$

(d) $y = \arctan(3^x - 1)$

Chương 2

Giới hạn và liên tục

2.1 Bài tập giới hạn và liên tục

1. Tính các giới hạn sau

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sin x}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cos(\pi x) + 1}{\sqrt{x+1} - 2}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x+1}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^x$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{x+1}\right)^{-x}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^x$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{2^x + x}$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x\sqrt{x+1}}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{\sin(\pi x)}$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(e^x + 1)}$$

$$(k) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos 2x} - 1}{e^{\sin x} - x}$$

$$(l) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \sqrt[3]{x} - 1}{\ln(x+1)}$$

$$(m) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\tan x + 1} - 1}{\ln(x+1)}$$

$$(n) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x}, \quad (n \geq 1)$$

$$(o) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x \sin(\pi x) + 1} - 1}{\cos(\pi x) - 1}$$

$$(p) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(e^x + 1)}$$

$$(q) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos 2x} - 1}{e^{\sin x} - x}$$

$$(r) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x^3 - 1}{\ln(x^2 + 1)}$$

2. Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x} & \text{nếu } x > 0 \\ ax + 1 & \text{nếu } x \leq 0 \end{cases}$$

Tìm a để hàm số liên tục tại điểm $x = 0$.

Chương 3

Đạo hàm và vi phân

3.1 Bài tập đạo hàm và vi phân

1. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số sau

(a) $f(x) = \sin x \cdot \cos 2x$

(b) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 1}$

(c) $f(x) = \frac{x^2}{x + 1}$

(d) $f(x) = \frac{x}{x - 1}$

(e) $f(x) = \ln(x + 2)$

(f) $f(x) = xe^{2x}$

(g) $f(x) = x \sin(2x + 1)$

(h) $f(x) = x^2 \cos(3x)$

2. Tính đạo hàm y'_x của các hàm cho ở dạng tham số sau

(a) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = \cos t \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x = t^3 - t \\ y = \sin t \end{cases}$

3. Cho hàm số $f(x) = \sqrt[4]{x + 2}$

(a) Tìm vi phân tổng quát của hàm số trên.

(b) Tính gần đúng $f(13,88)$

4. Tính đạo hàm cấp 100 của các hàm số sau tại các điểm đã cho

(a) $f(x) = x \sin(x - 1)$ tại điểm $x = 1$.

(b) $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$ tại điểm $x = 0$.

5. Áp dụng qui tắc Lôpital tính các giới hạn sau:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - \cos x - x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(e^x + x)}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x)^{1/x}$$

6. Viết khai triển Taylor của các hàm số sau tại các điểm đã cho

$$(a) f(x) = \frac{1}{x-2} \text{ tại điểm } x = 1 \text{ đến đạo hàm cấp 5.}$$

$$(b) f(x) = \frac{x}{e^x} \text{ tại điểm } x = 0 \text{ đến đạo hàm cấp 10.}$$

$$(c) f(x) = x^2 \sin(x-2) \text{ tại điểm } x = 2 \text{ đến đạo hàm cấp 5.}$$

Chương 4

Tích phân

4.1 Bài tập tính tích phân

$$1. \int_0^{\ln 3} \frac{e^{2x} dx}{e^x + 1}$$

$$2. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x} dx$$

$$3. \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$$

$$4. \int_2^{\frac{5}{2}} \frac{1 + \ln(2x - 3)}{2x - 3} dx$$

$$5. \int_0^1 (1 - x^2)^5 x^3 dx$$

$$6. \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{x^3}{1 + x^2} dx$$

$$7. \int_0^1 x^5 \sqrt{1 - x^3} dx$$

$$8. \int_1^e \frac{\ln x}{x^3} dx$$

$$9. \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{4x - 2x^2 - 1} dx$$

$$10. \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$11. \int_0^{(\frac{\pi}{2})^2} \sin \sqrt{x} dx$$

$$12. \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{2e^x - 1}}{e^x + 4} dx$$

$$13. \int_{\ln 3}^{\ln 8} \sqrt{e^x + 1} dx$$

$$14. \int_2^7 \frac{x + 1}{x + \sqrt{x + 2}} dx$$

$$15. \int_{\ln 3}^{\ln 7} \sqrt{e^x + 1} dx$$

$$16. \int_0^8 \frac{x + \sqrt{x + 1}}{x + 2} dx$$

$$17. \int_0^{(\frac{\pi}{2})^2} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos x + 1}} dx$$

4.2 Bài tập tích phân suy rộng

1. Tính các tích phân suy rộng sau

(a)
$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x}}$$

(b)
$$\int_{\ln 5}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 4}}$$

(c)
$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx$$

(d)
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$$

(e)
$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x^2} dx$$

(f)
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{e^x + 1} dx}{e^x - 3}$$

(g)
$$\int_0^{+\infty} \frac{(x+1)dx}{e^{2x}}$$

2. Xét sự hội tụ của các tích phân suy rộng sau

(a)
$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x + 2}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx$$

(b)
$$\int_{\ln 5}^{+\infty} \frac{\sin x + 3}{x\sqrt{x+1}} dx$$

(c)
$$\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1}\right) dx$$

(d)
$$\int_1^{+\infty} \left[\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\right] dx$$

(e)
$$\int_1^{+\infty} \sqrt{x} \sin \frac{1}{x^2} dx$$

(f)
$$\int_1^{+\infty} [\ln(x^2 + 1) - 2\ln x] dx$$

(g)
$$\int_2^{+\infty} \sqrt{x} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx$$

(h)
$$\int_{\ln 5}^{+\infty} \tan \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1} dx$$

Chương 5

Chuỗi số và chuỗi hàm

1. Tính tổng các chuỗi số sau

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n}\right)$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2 + n}\right) \cos\left(\frac{2n + 1}{n^2 + n}\right)$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - 1}{2^{n+1}}$$

$$(f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$$

$$(g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 2}{2^{n+1}(n^2 + n)}$$

$$(h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n + 1)!}$$

2. Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^5 + n + 1} + 1}{2n^3 + 1}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} [\ln(n^2 + 1) - 2\ln n]$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n + 2}{n^3 + 1}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n + 1}{2n + 3}\right)^n$$

$$(f) \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - \cos \frac{1}{n}\right]$$

$$(g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

$$(h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{n}$$

3. Tìm miền hội tụ và tính tổng của các chuỗi hàm sau

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x - 1}{2x - 1}\right)^n$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - 1)^n}{2^n n}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(x + 1)^n}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} (n + 1) \left(\frac{x + 1}{x - 2}\right)^n$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - 2)^n}{n + 1}$$

$$(f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{(2x + 1)^n}$$