Bài tập Giải tích 1

1. Giới hạn hàm số

Chú ý:

+ Các dạng vô định $\frac{0}{0}(vd1), \frac{\infty}{\infty}(vd2), \infty-\infty(vd3), 0.\infty(vd\ 4), 1^{\infty}(vd\ 5), 0^0(vd\ 6)$ ở đây *(vd1)* = vô định 1,… Các dạng vô định đều đưa được về dạng *(vd1)* hoặc *(vd2)* (SV xem lại vở ghi).

+ Dạng vô định $\frac{0}{0}(vd1), \frac{\infty}{\infty}(vd2)$ có thể áp ụng qui tắc L'Hospital (chú ý các điều kiện của định lý khi áp dụng)

+ Sử dụng các kết quả giới hạn đã liệt kê trong tài liệu tham khảo (cuối chương)

+ Các phương pháp thường dùng tính giới hạn dạng $\frac{0}{0}$: L'Hospital; phân tích thành nhân tử ở cả tử và mẫu; liên hợp; đưa về các giới hạn đã biết; tổ hợp các phương pháp trên.

Bài 1. Tính các giới hạn

i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6}$ (*15/11*) ii) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}$ (*3/4*) iii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$ (*3/2*)

iv) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$ (*3/2*) v) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}$ (*0*) vi) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^2-4x+3}$ (*3*)

vii) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x+1}$ (*1/2* viii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{-1+\sqrt[3]{x+1}}$ (*3/2*) ix) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^x-x^2}{x-2}$ (*4ln2 – 4*)

Bài 2. Tính các giới hạn

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ (*1/2*)

ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}$ (*1/2*)

iii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos(\frac{\pi}{2}x)}{1-x^2}$ (*π/2*)

iv) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{arctg(x+2)}$ (*- 4*)

v) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{6})}{\sqrt{3}-2\cos x}$ (*1*)

vi) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}}$ (*∞*)

vii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$ (*1/4*)

viii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$ (*1*)

ix) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$ (*-1/4*)

x) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin \pi x}$ (*2/π*)

xi) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-tg^2x}{\sqrt{2\cos x-1}}$ (*4*)

xii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-tgx}-\sqrt{1+tgx}}{\sin 2x}$ (*-1/2*)

Chú ý:

+ Nhớ lại hình tròn đơn vị và các trục: cos, sin, tan, cot (xem lại bài giảng trên lớp)

+ ôn lại các công thức lượng giác như

+) $cos^2x + sin^2x = 1$; +) sinx + siny = +) tan(x+y) = +) sinxsiny =

+) sin 2x = ... +) sin x – siny = +) cot(x+y) = +) sinxcosy =

+) Cos 2x = +) cos x + cosy = +) tan(x-y) = +) cosxcosy =

+) Sin3x= +) cosx – cosy = +) cot (x-y) =

+) Cos 3x=

Bµi 3. TÝnh c¸c giíi h¹n

i) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{tg2x}{\cot g(\frac{\pi}{4}-x)}$ (*1/2*)

ii) $\lim\limits_{x\to 2}(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4})$ (*1/4*)

iii) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\sqrt{tg^2x+\dfrac{1}{\cos x}}-tgx)$ (*1/2*)

iv) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{2}{\sin 2x}-\cot gx)$ (*0*)

v) $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{1}{x-1})$ (*1*)

vi) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1})$ (*0*)

vii) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+x})$ (*1/2*)

viii) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(tgx-\dfrac{1}{\cos x})$ (*0*)

Bài 4. Tính các giới hạn

i) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\dfrac{\pi x}{2}$

ii) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\dfrac{\pi}{4}-x)\dfrac{1}{\sin(3\dfrac{\pi}{4}+x)}$ (*1*)

iii) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\cot g2x.cotg(\dfrac{\pi}{4}-x)$

iv) $\lim\limits_{x\to+\infty} xarctgx$ (*1*)

2. Liên tục

Định nghĩa**:** hàm f(x) liên tục tại x_0 nếu $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Chú ý:

+ Hàm sơ cấp liên tục tại mọi điểm xác định của nó

+ Chú ý các hàm có bước nhảy

Bài 1. Khảo sát tính liên tục của hàm số

a) $f(x)=\dfrac{|2x-3|}{2x-3}$ b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}sinx, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ c) $f(x)=\begin{cases}4.3^x, & x<0\\ 2a+x, & x\geq 0\end{cases}$

d) $f(x)=x+\dfrac{2+x}{|2+x|}$ e) $f(x)=\dfrac{2|x-1|}{x^2-x^3}$.

Bài 2. Tính các giới hạn sau

i) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x^3)^{\frac{1}{x^3}}$ $(*e^{-2}*)$ ii) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x-1}{x+1})^x$ $(*e^{-2}*)$

iii) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ $(*e^{\frac{-1}{2}}*)$ iv) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{tg2x}$ $(*1*)$

v) $\lim\limits_{x\to\infty}(e^{\frac{1}{x}}+\dfrac{1}{x})^x$ $(*e^2*)$ vi) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1+tgx}{1+\sin x})^{\frac{1}{\sin x}}$

vii) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 3x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$ (*-9/2*) viii) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2x)^{tg^2 2x}$ $(*e^{\frac{-1}{2}}*)$

Gợi ý: Sử dụng tính liên tục của hàm e^x hoặc dùng ln. (xem lại bài giảng trên lớp)

3. Đạo hàm

Bài 1. Tính đạo hàm của các hàm sau

a) $y=\ln(arctgx)$ $(*y'=e^{\arcsin x}.\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}*)$

b) $3^{tg^4(x^2+5x)}$ $(*y'=4.\ln 3.(2x+5).3^{tg^4(x^2+5x)}.tg^3(x^2+5x).\dfrac{1}{\cos^2(x^2+5x)}*)$

c) $f(x)=\cos(2^x-x^3)$ $(*y'=-\sin(2^x-x^3)(2^x\ln 2-3x^2)*)$

Bài 2. Tính các đạo hàm cấp cao:

a) $y=x^3e^x$ $(*y^{(n)}=(x^3+3nx^2+3n(n-1)x+6n)e^x*)$

b) $y=\frac{1}{x+2}$ (* $y^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}$ *)

c) $y=\frac{1}{x^2-4}$ (* $y^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{4}(\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x+2)^{n+1}})$ *)

d) $y=\ln(x^2+x-2)$ (* $y^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{}(\frac{1}{(x-1)^n}+\frac{1}{(x+2)^n})$ *)

e) $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ f) $y = x^2\cos 2x$

Nhớ lại:

+ Tính bằng phương pháp qui nạp.

+ Dùng công thức Leibnitz.

Bài 3. Tính gần đúng các biểu thức sau

a) A= sin 29^0; B = arctg 0,98; C= $\sqrt{\frac{(2,037)^2-3}{(2,037)^2+5}}$

b) D = $\sqrt{3.99}$; $E = ln1.01$

Nhớ lại: CT tính gần đúng (Bài giảng trên lớp)

Bài tập khử các dạng vô định

Bài 4. Tính các giới hạn sau ($\frac{0}{0}$)

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{-2ax}}{\ln(1+x)}$ (*3a*) b) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{2x+1}+1}{\sqrt{2+x}+x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x^2}{\ln(cos(2x^2-x))}$

Bài 5. Tính các giới hạn sau ($0.\infty$)

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(x-\frac{\pi}{2})tgx$ (*-1*) b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\pi-2arctgx)$ c) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln x$

Bài 6. Tính các giới hạn sau ($\infty-\infty$)

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}-\cot g^2 x\right]$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{1-x}\right]$

Bài 7. Tính các giới hạn sau (0^0, hoặc ∞^0)

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{6}{1+2\ln x}}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x^2+1})^{\frac{1}{x^2}}$ c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(tgx)^{cotgx}$

Bài 8. Tính các giới hạn sau (* Các giới hạn không áp dụng được quy tắc L'Hospital *)

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin(\frac{1}{x})}{\sin x}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$

Chú ý: $\lim_{x\to\infty}\sin x$, $\lim_{x\to\infty} cosx$ $\lim_{x\to\infty}\tan x$, $\lim_{x\to\infty} cotx$, $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ không tồn tại

Bài 9. Khai triển Taylor, Maclaurin

a) $y=e^x$ b) y = sin x c) y = cos x d) $y=(1+x)^m$

e) $y=\dfrac{1}{1\pm x}$ f) $y=\ln(1\pm x)$ g) $y=\dfrac{x^2+5}{x^2+x-12}$ h) $y=\dfrac{1}{x^4-3x^2-4}$

i) $y=\ln\dfrac{3+x}{2-x}$ k) $y=\cos^3 x$ l) $y=x^3-2x^2+3x+5$ theo (x – 2)

4. Tích Phân

Bảng nguyên hàm của các hàm cơ bản

1. $\int x^n dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C,\ n\neq -1$ 2. $\int\dfrac{dx}{x}=\ln|x|+C$

3. $\int a^x dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$ $\int e^x dx=e^x+C$

4. $\int cosxdx = sinx + C;\ \int sinx = -cosx + C$

5. $\int\frac{dx}{cos^2 x} = tanx + C\ ;\ \int\frac{dx}{sin^2 x} = -cotx + C$

6. $\int\dfrac{dx}{x^2+a^2}=\dfrac{1}{a}arctg\dfrac{x}{a}+C=-\dfrac{1}{a}arccotg\dfrac{x}{a}+C'$

7. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\dfrac{x}{a}+C=-arccos\dfrac{x}{a}+C'$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$

9. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$

Bài 1. Tính (*Dùng bảng nguyên hàm cơ bản*)

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2 - 4x}}$ b) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$ c) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}$

d) $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$ e) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 1}}$ f) $\int \frac{(\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x^2})dx}{\sqrt{1-x^4}}$

Bài 2. Tính tích phân (*bằng phương pháp đổi biến*).

+ Các dạng đổi biến cơ bản (xem lại bài giảng trên lớp)

a) $\int x\sqrt{x-5} dx$ b) $\int \frac{dx}{1+e^x}$ c) $\int \frac{dx}{x \ln x . \ln(\ln x)}$

d) $\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$ e) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}$ f) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

g) $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}$ h) $\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx$ k) $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 + x^2}}$

Bài 3. Tính tích phân (*bằng phương pháp tích phân từng phần*).

+ Công thức $\int udv = uv - \int vdu$

+ Cách chọn các hàm u, dv của một số trường hợp thường gặp xem lại bài giảng trên lớp

a) $\int x^2 \ln x dx$ b) $\int arctgx dx$ c) $\int x^2 e^{-x} dx$

d) $\int (3x^2 + 5) arctgx dx$ e) $\int e^{5x} \cos 4x dx$ f) $\int \cos(\ln x) dx$

Bài 4. Tính tích phân (biểu thức hữu tỉ)

+ Các phương pháp hay dùng (xem bài giảng trên lớp)

a) $\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 25}$ b) $\int \frac{(3x-1)dx}{x^2 - 4x + 8}$ c) $\int \frac{(2x^3 + 3x)dx}{x^4 + x^2 + 1}$

d) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$ e) $\int \frac{2xdx}{(x^2+x+1)^2}$ f) $\int \frac{(x^2+2x+6)dx}{x^3-7x^2+14x-8}$

g) $\int \frac{(x^2+1)dx}{(x-1)^3(x+3)}$ h) $\int \frac{(x^3+3x^2+5x+7)dx}{x^2+2}$

Bài 5. Tính tích phân (các hàm vô tỉ)

+ Các phương pháp hay dùng (xem bài giảng trên lớp)

a) $\int \frac{(x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x})dx}{x(1+\sqrt[3]{x})}$ b) $\int \frac{(2x-3)^{\frac{1}{2}}dx}{(2x-3)^{\frac{1}{3}}+1}$ c) $\int \frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx$

d) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}$ e) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$ f) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}}$

g) $\int \frac{(5x-3)dx}{\sqrt{2x^2+8x+1}}$ h) $\int \frac{(x^3-x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ k) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x}+1)^{10}}$

l) $\int \sqrt[3]{x}(2+\sqrt{x})^2 dx$ m) $\int \frac{(\sqrt{1+\sqrt[3]{x}})dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

Bài 6. Tính tích phân (các hàm lượng giác)

+ Các phương pháp hay dùng (xem bài giảng trên lớp)

a) $\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$ b) $\int \frac{(\sin x+\sin^3 x)dx}{\cos 2x}$ c) $\int \frac{(\cos^3 x+\cos^3 x)dx}{\sin^2 x+\sin^4 x}$

d) $\int \frac{\sin^3 xdx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$ e) $\int \frac{dx}{\sin x(2\cos^2 x-1)}$ f) $\int \frac{dx}{\sin x \sin 2x}$

g) $\int \sin^4 x\cos^5 xdx$ h) $\int \frac{\sin^3 xdx}{\cos x\sqrt[3]{\cos x}}$ k) $\int \sin 2x\cos 5xdx$

l) $\int \sin 2x\sin 5xdx$ m) $\int \cos 3x\cos 5xdx$

Bài 4. Tính tích phân (các hàm số khác)

a) $\int \sin^2 x\sin 3xdx$ b) $\int \frac{\ln xdx}{x^3}$ c) $\int \frac{(x^2-2)arctgxdx}{(x^2+1)}$

d) $\int \frac{\ln x dx}{\sqrt{1-x}}$ e) $\int \frac{e^x dx}{(1+e^{2x})^2}$ f) $\int \frac{e^{\alpha arctgx} dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

1. Tích phân xác định

Bài 1. Tính các tích phân sau

a) $\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} dx$ b) $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4} dx$ c) $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$

d) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx$ e) $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{5x+1}} dx$ f) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$

Bài 2. Tính các tích phân sau bằng phương pháp đổi biến

a) $\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx$ b) $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2-x^2} dx$ c) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2+\cos x} dx$

d) $\int_0^{2a} \sqrt{2ax-x^2} dx$ e) $\int_0^a x^2 \frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}} dx (a>0)$

Bài 3. Tính các tích phân sau bằng phương pháp tích phân từng phần

a) $\int_0^1 xarctgx \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$ b) $\int_0^{\pi/b} e^{ax} \sin bx dx$ c) $\int_1^e \ln^3 x dx$

d) $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x dx$ e) $\int_0^1 xarctgx dx$ f) $\int_0^1 arctg\sqrt{x} dx$

g) $\int_0^1 e^{-x} \ln(e^x+1) dx$ h) $\int_0^1 xarctgx \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$

2. Tích phân suy rộng

Tích phân suy rộng loại 1

Bài1. Tính các tích phân suy rộng sau (nếu nó hội tụ)

1. $\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}$ 2. $\int_0^{+\infty} x \sin x dx$ 3. $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ 4. $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx$

5. $\int_2^{+\infty} \frac{xdx}{(x^2-3)^3}$ 6 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ 7. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$ 8. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^a}$

9. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{x^4+2x^2+5}$ 10. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{arctgx\,dx}{x^2+1}$ 11. $\int_{-\infty}^{+\infty} tg\,\frac{1}{x^2+1}dx$

12. $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin\frac{1}{x^2+1}dx$ 13. $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3+2}\,dx}{2x^2+x-1}$ 14. $\int_0^{+\infty} \frac{2xdx}{\sqrt{x^5+x+1}}$

15. $\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{\cos\frac{1}{t}dt}{t}$ 16. $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ 17. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$

Bài 2. Khảo sát sự hội tụ của các tích phân sau

a) $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx$ b) $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx$ c) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{10}+1}dx$

d) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ e) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x}dx$ f) $\int_0^{+\infty} \frac{xarctgx}{\sqrt{1+x^3}}dx$

Tích phân suy rộng loại 2

Bài 1. Tính các tích phân suy rộng sau (nếu nó hội tụ)

a) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ b) $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^3}$ c) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$

d) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ e) $\int_0^1 \cos\frac{\pi}{1-x}.\frac{dx}{(1-x)^2}$ f) $\int_1^2 \frac{dx}{x\ln^p x}$

Bài 2. Khảo sát sự hội tụ của các tích phân sau

a) $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ $(a<b)$ b) $\int_0^1 \frac{(\sin x+\cos x)dx}{\sqrt[5]{1-x^3}}$ c) $\int_0^1 \frac{\cos xdx}{\sqrt[4]{x+\sin x}}$

3. Áp dụng của tích phân xác định

Bài 1. Tính diện tích các hình học phẳng sau

a) $y=2^x, y=2x-x^2, x=0, x=2$ b) $y=x^2+2x-3, y=3-2x-x^2$

c) $xy=20, x^2+y^2=41$ (trong góc phần tư thứ nhất)

d) $x = a\cos t, y = a\sin t;\ 0 \le t \le 2\pi$

e) $\rho = a(1+\cos\theta)$

f) $x^3 + y^3 = 3axy$

Bài 2. Tính độ dài đường cong phẳng

a) Đường cong $y = \ln\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ từ x = a đến x = b (b > a).

b) Cung đường cong $x = \cos^5 t, y = \sin^5 t;\ 0 \le t \le \pi/2$

c) $y = \dfrac{1}{3}t^3 - t, y = t^2 + 2;\ t_1 = 0, t_2 = 3$

d) $\rho = a(1+\cos\theta)$

Bài 3. Tính thể tíchvật thể

a) Thể tích vật thể cho bởi mặt Elipxoit: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

b) Thể tích vật thể tạo ra khi cho hình giới hạn bởi đường cong $y^2 = (x-1)^3, x = 2$ quay quanh trục Ox.

5. Chuỗi số, chuỗi hàm

Bài 1. Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi

1. $\sum_{n\ge 1}\dfrac{1}{n(n+1)}$ 2. $\sum_{n\ge 1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 3. $\sum_{n\ge 1}\dfrac{n+1}{n}$ 4. $\sum_{n\ge 1}\cos\dfrac{1}{n}$

5. $\sum_{n\ge 1}\dfrac{n^2+1}{n^3}$ 6. $\sum_{n\ge 1} n\,arctg\dfrac{1}{n}$

Bài 2. Tính tổng của các chuỗi sau:

1. $\sum_{n\ge 1}\dfrac{1}{n(n+2)}$ 2. $\sum_{n\ge 1}\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ 3) 1 - $\sum_{n\ge 1}\dfrac{1}{2^n}$ 4. $\sum_{n\ge 1}\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

Bài 3. Dùng các dấu hiệu dể khảo sát sự hội tụ của các chuỗi sau:

1. $\sum_{n\ge 1}\dfrac{1}{n(n+5)}$ 2. $\sum_{n\ge 1}\dfrac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$ 3. $\sum_{n\ge 1}\dfrac{1}{3^n}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ 4. $\sum_{n\ge 1}5^n$

5. $\sum_{n\ge 1}\dfrac{5+(-1)^n}{4^{n+1}}$ 6. $\sum_{n\ge 2}\dfrac{1}{(\ln n)^n}$ 7. $\sum_{n\ge 1}\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$ 8. $\sum_{n\ge 1}\dfrac{3^n n!}{n^n}$

9. $\sum_{n\ge 1}\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3^{n+1}}\right)$ 10. $\sum_{n\ge 1}\dfrac{5^n}{n!}$ 11. $\sum_{n\ge 2}\dfrac{5^{3n}}{(2n-3)!}$ 12. $\sum_{n\ge 1}\dfrac{5^n n!}{n^n}$

13. $\sum_{n\ge 1}\frac{n(n+1)}{3^n}$ 14. $\sum_{n\ge 1}\frac{n^n}{n!}$ 15. $\sum_{n\ge 1}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ 16. $\sum_{n\ge 1}\frac{1}{n^p}$

17. $\sum_{n\ge 1}\frac{1}{n\ln(n+1)}$ 18. $\sum_{n\ge 1}(-1)^n\frac{1}{n}$ 19. $\sum_{n\ge 1}(-1)^n\frac{2n+1}{n(n+1)}$ 20. $\sum_{n\ge 1}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$

21. $\sum_{n\ge 1}(-1)^{n-1}\frac{n-2}{n^2+1}$ 22. $\sum_{n\ge 1}(-1)^{n-1}\sin\frac{4}{n}$ 23. $\sum_{n\ge 1}\frac{\cos n\alpha}{2^n}$ 24. $\sum_{n\ge 1}\frac{\sin n\pi}{3}$

Bài 4. Tìm miền hội tụ và tính tổng của các chuỗi lũy thừa sau trong khoảng hội tụ:

1. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$ 2. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-3)^n}{2^n n}$ 3. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}$ 4. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n}$

5. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n x^{n+1}}{n}$ 6) $1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(n-1)x^n}{n!}$ 7. $\sum_{n\ge 1}nx^n$

8. $\sum_{n\ge 1}(-1)^{n-1}n^2x^{n-1}$ 9. $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n(n-1)}$ 10. $\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{x^n}{n(n-1)(n-2)}$

11. $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n-1)}$

Bài 5. Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm sau:

1. $\sum_{n\ge 1}e^{-nx}$ 2. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{x^n}$ 3. $\sum_{n\ge 1}\ln^n x$ 4. $\sum_{n\ge 1}(2-x^2)^n$

5. $\sum_{n\ge 1}\frac{n!}{n^n}(2-x\ )^n$ 6. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n5^n}$

Bài 6. Khai triển hàm sau thành chuỗi lũy thừa (Taylor) tâm tại x_0

1) y = cos x; $x_0=\frac{\pi}{4}$ 2) y = $\sin^2$ x ; $x_0=0$

3) $y=\frac{e^x-1}{x}$; $x_0=0$ 4) $y=x\ln(1+x^2)$; $x_0=0$