Giải bài tập XSTK
Phan Quang Sáng

1 Chương 2

Bài 1. Tung đồng thời 3 đồng tiền . Tính xác suât để ba đồng tiền cùng xuât hiện mặt sấp.

a) Nếu ba đồng tiền khác nhau thì $n = 2^3 = 8$, $n_A = 1$ vậy xác suất bằng $\frac{1}{8}$.

b) Nếu ba đồng tiền giống hệt nhau thì $n = 4$, $n_A = 1$ vậy xác suất bằng $\frac{1}{4}$.

Bài 2. Một tổ học sinh có 4nam và 4 nữ. Chọn ngẫu nhiên 3 học sinh, $n = C_8^3 = 56$.

a) Tính xác suất để có 2 nam và 1 nữ? Số khả năng là $C_4^2 C_4^1 = 24$. Vậy xác suất bằng $24/56 = 3/7$.

b) Tính xác suất để toàn là nữ? Số khả năng là $C_4^3 = 4$. Vậy xác suất bằng $4/56 = 1/14$.

Bài 3. Tự làm (dễ dàng).

Bài 4. $N = n!$.

a) Hai người đứng cạnh nhau $n_A = (n-1).2!(n-2)! = 2.(n-1)!$.

b) Hai người đứng cách đúng 3 người? $n_B = (n-5+1).2!(n-2)!$.

c) Xếp k người liền nhau có $(n-k+1).k!$ cách, sau đó sắp xếp $(n-k)$ những người còn lại. Do đó số cách sắp xếp là $(n-k+1).k!(n-k)!$.

Bài 5. $N = 10!$, $n = 10$.

a) Xếp 5 quyển toán đứng cạnh nhau $k = 5$.

b) B =Không có hai quyển toán nào đứng cạnh nhau.

(a) Cách 1.

Bước 1: Chọn ra 5 vị trí không liền nhau từ 10 vị trí liên tiếp cho 5 quyển toán có 6 cách là $(1, 3, 5, 7, 9)$, $(1, 3, 6, 8, 9)$, $(1, 3, 5, 7, 10)$, $(1, 3, 5, 8, 9)$, $(1, 4, 6, 8, 10)$, $(2, 4, 6, 8, 10)$.

Bước 2: xếp 5 quyển sách toán vào 5 vị trí đã chọn ở bước 1 có 5! cách.

Bước 3: xếp 5 quyển sách còn lại vào 5 còn lại có 5! cách.

Vậy số cách sắp xếp của B là .5!5! và xác suất $P(B) = 6.5!5!/10! = 1/126$.

(b) Cách 2.

Xếp 5 quyển không phải toán trước có 5! cách xếp những quyển đó. Khi đó sẽ tạo ra 4 khoảng trống giữa các quyển đó và 2 khoảng trống ở hai đầu là 6 khoảng trống. Tiếp theo xếp 5 quyển toán đó vào 5 vị trí trong 6 khoảng trống, mỗi vị trí có đúng 1 quyển toán có A_6^5 cách. Từ đó có $5!A_6^5$ cách xếp theo yêu cầu.

Nhận xét: cách này sẽ giải quyết được bài toán tương tự khi số quyển sách là lớn mà các cách khác sẽ khó thực hiện được.

(c) Cách 3: xếp 5 quyển toán trước...

Bài 6. Chọn ngẫu nhiên 10 học sinh. Tính xác suất để không có hai học sinh nào cùng ngày sinh.

Chúng ta giả thiết là một năm có 366 ngày. Có 366 cách chọn một ngày sinh nhật. $n = 366^{10}$.

Chọn học sinh thứ nhất tùy ý. Gọi A_1 là biến cố học sinh thứ hai có ngày sinh khác học sinh thứ nhất. Gọi A_2 là biến cố học sinh thứ hai có ngày sinh khác hai học sinh trước... A_9 là biến cố học sinh thứ mười có ngày sinh khác 9 học sinh trước. Biến cố cần tính xác suất là giao của các biến cố trên $A = A_1A_2...A_9$.

Ta có công thức $P(A) = P(A_1)P(A_2/A_1)...P(A_9/A_1A_2...A_8)$. Ở đó $P(A_1) = 365/366$, $P(A_2/A_1) = 364/366...$, $P(A_9/A_1A_2...A_8) = (366 - 9)/366$.

Cách khác $n_A = 366.365.(366 - 9)$. Từ đó $P(A) = 366.365.(366 - 9)/366^{10}$.

Bài 7. $N = C_n^k$, $n_A = C_m^1.C_{(n-m)}^{(k-1)}$.

Bài 8. Có 8 người định lên một trong 4 toa tàu nên $N = 4^8 = 65536$.

a) Mỗi toa có đúng 2 người. Xếp lần lượt mỗi lần hai người vào các toa tàu có $n_A = C_8^2 C_6^2 C_4^2 C_2^2 = 2520/65536 = 0,03845$.

b) Có hai toa có đúng 4 hành khác.

Chọn ra hai toa mà mỗi toa đó sẽ có đúng 4 người có $C_4^2 = 6$ cách. Sau đó xếp vào hai toa đó mỗi toa 4 người từ 8 người có $C_8^4 C_4^4 = 70$ cách. Vậy số cách là $N_B = 6.70 = 420$ cách.

$$N_B = 420/65536 = 0,0064...$$

c) $n_C = 4.C_8^5.3! = 4.56.6 = 1344$ và $n_C = 1344/65536 = 0,021$

Bài 9. 4 lợn cái đã đứng sẵn trong chuồng. Xếp 4 lợn đực vào sẽ có $N = 4! = 24$ cách.

a) $n_A = 1$, do đó xác suất bằng $1/24$.

b) Gọi B là sự kiện không có cặp nào cùng loài phối giống với nhau. Tìm sẽ phần bù $\overline{B}$ có ít nhất 1 cặp cùng loài. Gọi A_i là sự kiện con lợn đực thứ i phối giống cùng loài với con cái thứ i, $i = 1, ..., 4$. Ta có $\overline{B} = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ và do đó

$$P(\overline{B}) = \sum_{i=1}^{4} P(A_i) - \sum_{i<j}^{4} P(A_i A_j) + \sum_{i<j<k}^{4} P(A_i A_j A_k) - P(A_1 A_2 A_3 A_4).$$

Ta có $P(A_i) = 1/4$;

$P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j/A_i) = 1/4.1/3 = 1/12$;

$P(A_i A_j A_k) = P(A_i)P(A_j/A_i)P(A_k/A_i A_j) = 1/4.1/3.1/2 = 1/24$;

$P(A_1 A_2 A_3 A_4) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 A_2)P(A_4/A_1 A_2 A_3) = 1/4.1/3.1/2.1/1 = 1/24$;

Từ đó $P(\overline{B}) = C_4^1 1/4 - C_4^2 1/12 + C_4^3 1/24 - 1/24 = 5/8$ và do đó $P(B) = 3/8$.

Bài 10. Có 10 hạt đậu giống gồm 4 hạt đậu hoa vàng thuần chủng, 3 hạt đậu hoa vàng thuần chủng và 3 hạt đậu hoa trắng. Chọn ngẫu nhiên 3 hạt, $n = C_{10}^3 = 120$.

a) Chọn 3 hạt đậu gồm 3 loại khác nhau $n_A = 4.3.3 = 36$, do đó xác suất $P(A) = 36/120 = 3/10 = 0,3$.

b) Để 3 hạt được chọn là đậu cho hoa vàng $n_B = C_7^3 = 35$, do đó xác suất $P(B) = 35/120 = 0,25$.

c) Để 3 hạt được chọn có ít nhất 1 hạt cho hoa trắng. Ta có $\overline{C} = B = C_7^3 = 35$ với xs bằng $35/120 = 7/24$. Từ đó $P(C) = 1 - 7/24 = 17/24$.

Bài 13. Tỉ lệ nâu: xám: trắng = 1 : 2 : 1.
Lược đồ Bernoulli $n = 5$.

a) $k = 3$, $p = 1/4$, xs là $P_5(3) = 0,088....$

b) Có 2 nâu, 3 xám, xác suất là $C_5^2 p_1^2 . C_3^3 p_2^3 = 5/64$ với $p_1 = 1/4$, $p_2 = 2/4 = 1/2$.

c) $C_5^1 p_1^1 . C_4^2 p_2^2 C_2^2 p_3^2 = 15/128$, ở đây thêm $p_3 = 1/4$.

Bài 14. Gọi T là sự kiện việc truyền máu được thực hiện. Ký hiệu $(A-O)$ là sự kiện người nhận có nhóm máu A, người cho có nhóm máu O...có 9 sự kiện, thì $T = (O - O) + (A - O) + ...$

Ta có $P(T) = 0,34.0,34 + 0,37.0,34 + 0,37.0,37 + 0,21.0,34 + 0,21.0,21 + 0,08.0,34 + 0,08.0,37 + 0,08.0,21 + 0,08.0,21 + 0,08.0,08 = 0,5738$;

a) Gọi A là biến cố người nhận máu có nhóm máu A. Ta có $AT = (A - O) + (A - A)$ và từ đó $P(AT) = 0,37.0,34 + 0,37.0,37 = 0,2627$; Ta cần tính $P(A/T)$ theo công thức

$$P(A/T) = \frac{P(AT)}{P(T)} = 0,2627/0,5738 = 0,46.$$

b) Tính xs để người nhận máu có nhóm máu B: làm tương tự.

Bài 15. Ta chú ý các sự kiện đối với phòng A và các sự kiện đối với phòng B là độc lập nhau.

a) Có $C_5^2 C_6^2$ cách chọn từ mỗi phòng ra 2 nhân viên. Số cách chọn ra từ mỗi phòng 2 nam là $C_3^2 C_3^2$. Từ đó xác suất bằng $C_3^2 C_3^2 / C_5^2 C_6^2 = 3/50$.

b) Gọi A là sự kiện 2 nhân viên được chọn của phòng A qua kỳ kiểm tra.

   Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là các sự kiện 2 nhân viên được chọn của phòng A là hai nam, hai nữ, một nam một nữ.

   Theo công thức xác suất toàn phần ta có

$$P(A) = P(A_1)P(A/A_1) + P(A_2)P(A/A_2) + P(A_3)P(A/A_3).$$

$$P(A) = \frac{C_3^2}{C_5^2} 0,8^2 + \frac{C_2^2}{C_5^2} 0,7^2 + \frac{C_3^1 C_2^1}{C_5^2} C_3^1 C_2^1 / C_5^2 0,8.0,7 = 0,577.$$

   Tương tự đối với phòng B, gọi B là sự kiện 2 nhân viên được chọn của phòng B qua kỳ kiểm tra. Tính tương tự $P(B) = 0,562$.

   Sự kiện cần tính xác suất cả 4 nhân viên đều qua là $A \cap B$ và vì chúng độc lập nên $P(AB) = P(A).P(B) = 0,577.0,562 = 0,324274$.

c) Do $P(A) > P(B)$ nên khả năng qua kỳ kiểm tra của phòng A cao hơn phòng B.

Bài 16. Nhóm 6 bệnh nhân trong đó có 4 người mắc bệnh A và 5 người mắc bệnh B.

a) Tính số người mắc cả hai bệnh: $n_{AB} = n_A + n_B - n_{A \cup B} = 4 + 5 - 6 = 3$ người.

b) $C_3^2 / C_6^2 = 1/5$.

c) Gọi C là sự kiện cả hai bệnh nhân đều khỏi bệnh.

   Gọi C_1 là sự kiện mỗi người chỉ mắc 1 loại bệnh.

   Gọi C_2 là sự kiện 1 người chỉ mắc 1 loại bệnh và 1 người mắc 2 bệnh.

   Gọi C_2 là sự kiện mỗi người mắc 2 loại bệnh.

   Chú ý rằng số người chỉ mắc bệnh A là $4 - 3 = 1$ và số người chỉ mắc bệnh B là $5 - 3 = 2$ và do đó có $1 + 2 = 3$ người chỉ mắc 1 loại bệnh.

Từ đó $P(C_1) = C_3^2/C_6^2 = 1/5$; $P(C_2) = C_3^1C_3^1/C_6^2 = 3/5$; $P(C_3) = C_3^2/C_6^2 = 1/5$. Các xs đk $P(C/C_1) = 0,8^2 = 0,64$; $P(C/C_2) = 0,8.0,6 = 0,48$; $P(C/C_3) = 0,6^2 = 0,36$. Theo công thức toàn phần ta có $P(C) = 1/5.0,64 + 3/5.0,48 + 1/5.0,36 = 0,488$.

Bài 17. Gọi A, B, C lần lượt là sự kiện ba phòng A, B, C thành công. Theo giả thiết thì $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,3$; $P(A) = 0,2$;

a) Sự kiện có đúng một phòng thành công là $D = A.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.B.\overline{C} + \overline{A}.\overline{B}.C$. Chú ý rằng A, B, C độc lập nên ta có $P(D) = 0,4.(1-0,3).(1-0,2) + (1-0,4).0,3.(1-0,2) + (1-0,4).(1-0,3).0,2 = 0,452$.

b) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C = P(A) + P(B) + P(C) - P(A)P(B) - P(B)P(C) - P(A)P(C) + P(A)P(B)P(C) = 0,4 + 0,3 + 0,2 - 0,4.0,3 - 0,3.0,2 - 0,2.0,4 + 0,4.0,3.0,2 = 0,664$.

c) Gọi A_1 là sự kiện phòng A hoàn thành nhiệm vụ. Ta có $P(A_1) = P(A).1 + P(\overline{A})P(A) = 0,4 + 0,6.0,4 = 0,64$. Tương tự xác suất để phòng B hoàn thành nhiệm vụ là $0,3 + 0,7.0,3 = 0,51$ và phòng C hoàn thành nhiệm vụ là $0,2 + 0,8.0,2 = 0,36$. Ba phòng độc lập nên xác suất cả 3 phòng hoàn thành nhiệm vụ là $0,64.0,51.0,36 = 0,117504$.

Bài 22. (Tương tự ví dụ 7.2 trong giáo trình)

Gọi A là sự kiện một chứng khoán được đánh giá là mua tốt.

Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là sự kiện chứng khoán thuộc loại tốt, trung bình, xấu.

Ta cần tính xác suất hậu nghiệm $P(A_1/A)$ trong câu a) và $P(A_3/A)$ trong câu b) bằng cách sử dụng CT Bayes.

Ta có $P(A_1) = 0,25$; $P(A_2) = 0,5$; $P(A_3) = 0,25$.

Các xs đk $P(A/A_1) = 0,4$; $P(A/A_2) = 0,2$; $P(A/A_3) = 0,1$; Từ đó theo CT xs toàn phần thì $P(A) = 0,25.0,4 + 0,5.0,2 + 0,25.0,1 = 0,225$. Từ đó $P(A_1/A) = P(A_1)P(A/A_1)/P(A) = 0,25.0,4/0,225 = 4/9$ và $P(A_3/A) = P(A_3)P(A/A_3)/P(A) = 0,25.0,1/0,225 = 1/9$.

Bài 18.

a) $F = A \cap B \cap C \cup D \cap G$ và từ đó $P(F) = P(A \cap B \cap C) + P(D \cap G) - P(A \cap B \cap C \cap E \cap G) = P(A)P(B)P(C) + P(D)P(G) - P(A)P(B)P(C)P(D)P(G) = 0,1^3 + 0,05^2 - 0,1^3.0,05^2 = 0,001 + 0,0025 - 0,001.0,0025 = 0,0035.$

b) $P(D \cap G/F) = P(D \cap G \cap F)/P(F) = P(D \cap G)/P(F) = 0,05^2/0,0035 = 0,71428.$

2 Chương 3

Một hộp đựng 15 quả bóng bàn trong đó có 9 quả mới. Lần đầu người ta lấy ra 3 quả để thi đấu, sau đó lại trả vào hộp. Lần thứ hai lại lấy ngẫu nhiên ra 3 quả. Tính xác suất để cả 3 quả lấy ra lần sau đều là mới.