Bài 1. Cho các ma trận: $A=\begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ 3 & -5 & 7\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}7 & 1 & -2\\ 0 & 4 & 3\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}-1 & 34\\ 2 & -6\end{bmatrix}$

Hãy thực hiện các phép tính sau: $A+B$, $A-3B$, A^t+2B^t, A^tB, $A.B^t$, $A.B^tC$.

<u>ĐS:</u> $A^tB=\begin{bmatrix}14 & 14 & 5\\ 28 & -16 & 23\\ 42 & 34 & 9\end{bmatrix}$, $A.B^t=\begin{bmatrix}6 & 34\\ 2 & 1\end{bmatrix}$, $A.B^tC=\begin{bmatrix}62 & 0\\ 0 & 62\end{bmatrix}$

Bài 2. Cho hai ma trận: $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 0 & 2\end{bmatrix}$ và $B=\begin{bmatrix}-2 & -6 & 5\\ -1 & -4 & 3\\ 3 & 9 & -7\end{bmatrix}$.

1) Hãy tính các tích AB và BA. Từ đó hãy cho biết ma trận A có khả nghịch không? chỉ ra ma trận nghịch đảo (nếu có) của ma trận A.
   <u>ĐS:</u> $AB=I$, $BA=I$, trong đó I là ma trận đơn vị cấp 3.
2) Tìm ma trận X (nếu có) thỏa mãn: $XA=B$.
   <u>ĐS:</u> $X=B^2=...$

Bài 3. Thực hiện các phép tính :

1) $\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ 3\\ 1\end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}^3$ *<u>ĐS:</u>* $\begin{bmatrix}14\\ 10\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix}-1 & 27 & -9\\ 18 & -28 & 0\\ 0 & 9 & -1\end{bmatrix}$.

Bài 4. Cho ma trận : $A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}$. Tính $\det(A)$, $\det(5A^t)$, $\det(A^4)$.

<u>ĐS:</u> $\det A=2$; $\det(5A^t)=5^3.2=250$; $\det(A^4)=2^4=16$.

Bài 5. Tính định thức của các ma trận sau:

1) $\begin{bmatrix}x & 1 & 1\\ 1 & x & 1\\ 1 & 1 & x\end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & x\\ 1 & x & 0\end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix}1 & a & 1\\ 2 & 1 & a\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & 1\\ 2 & 2 & 6 & 0\\ -1 & 0 & -3 & 1\\ 4 & 1 & 12 & 0\end{bmatrix}$; 5) $\begin{bmatrix}4 & 0 & 0 & -1\\ 3 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & -1 & 0\end{bmatrix}$.

<u>ĐS:</u> 1) $(x+2)(x-1)^2$; 2) 0 ; 3) $3a^2-4a+2$; 4) 0 ; 5) -45

Bài 6. Tìm hạng của các ma trận sau:

$$A=\begin{bmatrix}2&7&3&1&6\\3&5&2&2&4\\9&4&1&7&2\end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix}3&4&1&2\\1&4&7&2\\1&10&17&4\\4&1&3&3\end{bmatrix};\quad C=\begin{bmatrix}0&1&0&1&0\\1&3&1&3&1\\3&5&3&5&3\\7&9&7&9&7\end{bmatrix}.$$

<u>ĐS:</u> $r(A)=2$; $r(B)=3$; $r(C)=2$

Bài 7. Cho ma trận: $A=\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&m&-1\\1&-1&3\end{bmatrix}$

1) Tìm m để ma trận A khả nghịch.
2) Với $m=-1$, hãy tìm ma trận nghịch đảo của A bằng ba cách (cách 1: sử dụng ma trận phụ hợp; cách 2: sử dụng hệ phương trình tuyến tính, cách 3: sử dụng biến đổi sơ cấp).

<u>ĐS:</u> 1) $m\neq-\frac{1}{2}$; 2) $A^{-1}=\begin{bmatrix}4&-5&-3\\1&-2&-1\\-1&1&1\end{bmatrix}$

Bài 8. Cho ma trận: $A=\begin{bmatrix}-1&2&1\\m&1&0\\1&-1&2\end{bmatrix}$

1) Với giá trị nào của m thì hạng của ma trận A bằng 3? Với các giá trị m vừa tìm được thì ma trận A có khả nghịch không?
2) Với $m=-1$, hãy tìm ma trận nghịch đảo của A bằng hai cách (cách 1: sử dụng ma trận phụ hợp; cách 2: sử dụng hệ phương trình tuyến tính).

<u>ĐS:</u> 1) Hạng của mt vuông A bằng cấp của mt khi và chỉ khi $\det(A)\neq 0$. ĐS: $m\neq-\frac{3}{5}$

2) $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&-5&-1\\2&-3&-1\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2.5&-0.5\\1&-1.5&-0.5\\0&0.5&0.5\end{bmatrix}$

Bài 9. Hãy tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của các ma trận sau bằng hai cách (cách 1: Sử dụng phương pháp biến đổi sơ cấp; cách 2: sử dụng ma trận phụ hợp):

1) $A=\begin{bmatrix}1&2\\2&5\end{bmatrix}$; 2) $B=\begin{bmatrix}0&2&-1\\3&-4&-2\\-1&1&1\end{bmatrix}$; 3) $C=\begin{bmatrix}2&3\\4&6\end{bmatrix}$; *<u>ĐS:</u>* $A^{-1}=\begin{bmatrix}5&-2\\-2&1\end{bmatrix}$; $B^{-1}=\begin{bmatrix}2&3&8\\1&1&3\\1&2&6\end{bmatrix}$.

Bài 10. Giải các hệ phương trình tuyến tính sau

1) $\begin{cases} x-y-2z+t=-2 \\ 2x-y+z+3t=-3 \\ -x+2y+3z-2t=-1 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x_1-2x_2-3x_3+x_4=5 \\ 2x_1-4x_2-3x_3+4x_4=2 \\ 5x_1-10x_2-13x_3+6x_4=20 \end{cases}$;

ĐS: 1) $\begin{cases} x=z-5 \\ y=-1-3z \\ t=2-2z \\ z\in\mathbb{R} \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x_1=2x_2+12 \\ x_3=2 \\ x_4=-1 \\ x_2\in\mathbb{R} \end{cases}$.

Bài 11.

1) Với giá trị nào của m thì các hệ phương trình sau có nghiệm:

a) $\begin{cases} x-2y+z-t=-1 \\ 3x+y-2z+t=2 \\ x+5y-4z+mt=5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+y+10z-6t=3 \\ x+2y+mz-t=1 \\ 2x+5y-z+mt=2 \end{cases}$.

HD: Biến đổi ma trận bổ sung của hệ pttt về dạng bậc thang.

Hệ pttt có nghiệm khi và chỉ khi $r(A)=r(A^{bs})$

ĐS: a) $m\neq 4$; b) $m\neq 3$

2) Với giá trị nào của m thì hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất? Có vô số nghiệm?

$$\begin{cases} x+3y-2t=0 \\ -y+2z-t=0 \\ 2x-z+t=0 \\ 4x+y+mz=0 \end{cases}$$

HD: $\det(A)=11m+5$ với A là ma trận hệ số của hệ pttt.

Hệ vuông thuần nhất có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\det(A)\neq 0$.

Hệ vuông thuần nhất có vô số nghiệm khi và chỉ khi $\det(A)=0$

Bài 12. Tìm tất cả các ma trận X (nếu có) thỏa mãn:

1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} X = X \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$; 2) $X\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

ĐS: 1) Các ma trận X thỏa mãn pt có dạng: $X=\begin{bmatrix} x & y \\ y & x+y \end{bmatrix}, x,y\in\mathbb{R}$;

2) $X=\begin{bmatrix} -3 & 7 & 2 \\ 1 & -1.5 & 0.5 \end{bmatrix}$

Bài 13. Trong không gian véctơ $\mathbb{R}^3$ cho tập hợp: $W=\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-3y+z=0\}$

a) Véctơ $u=(1;2;3)$ có thuộc W không? Chỉ ra một véctơ (khác véc tơ không) thuộc W.

b) Chứng minh rằng W là một không gian véctơ con của $\mathbb{R}^3$.

c) Tìm một cơ sở, số chiều của không gian W.

d) Chứng minh véctơ $u=(1;2;5)$ thuộc W và tìm tọa độ của u trong cơ sở của W tìm được ở câu hỏi trên.

<u>*ĐS:*</u> a) không; VD: $u=(1;1;2)\in W$

c) Một cơ sở $S=\{u_1=(3;1;0);u_2=(-1;0;1)\}$; $\dim W=2$

d) $u_S=(2;5)$.

Bài 14. Trong không gian véctơ $\mathbb{R}^4$ cho tập hợp: $V=\left\{(x;y;z;t)\in\mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x \quad +2t=0 \\ y-z-t=0 \end{cases}\right\}$.

a) Véctơ $u=(1;2;5;4)$ có thuộc V không?

b) Chứng minh rằng V là một không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^4$.

c) Tìm một cơ sở và tính số chiều của không gian V.

<u>*ĐS:*</u> a) Không; c) Một cơ sở $S=\{u_1=(-2;1;1;0);u_2=(0;1;0;1)\}$; $\dim V=2$.

Bài 15. Trong không gian véctơ $\mathbb{R}^4$ cho tập hợp: $V=\{(x;y;z;t)\in\mathbb{R}^4 \mid y+2t=0\}$.

a) Chứng minh V là một không gian véctơ con của $\mathbb{R}^4$.

b) Tìm một cơ sở, số chiều của không gian V.

c) Chứng minh véctơ $u=(-4;2;-1;1)$ thuộc V và tìm tọa độ của u u trong cơ sở tìm được ở trên.

<u>*ĐS:*</u> b) Một cơ sở $S=\{u_1=(1;0;0;0);u_2=(0;-2;1;0);u_3=(0;0;0;1)\}$; $\dim V=3$.

c) $u_S=(-4;-2;1)$

Bài 16. Các tập hợp sau có là không gian véctơ con của các không gian tương ứng không?

a) $V=\{(x;y;z;t) \mid 2x+3z=1\}$ trong $\mathbb{R}^4$.

b) $V=\{(x;y;z) \mid xy-2z=0\}$ trong $\mathbb{R}^3$.

c) $V=\left\{(x;y;z;t) \mid \begin{cases} x+2t-3=0 \\ y-t-z=0 \end{cases}\right\}$ trong $\mathbb{R}^4$.

<u>*ĐS:*</u> a) không; b) không; c) không.

Bài 17. Trong không gian véctơ $\mathbb{R}^3$ cho tập hợp: $V=\left\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x-2z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}\right\}$.

a) Chứng minh rằng V là không gian véctơ con của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm một cơ sở và tính số chiều của không gian V.

c) Chứng minh rằng véctơ $u=\left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ thuộc V và tìm tọa độ của u trong cơ sở tìm được ở trên.

<u>*ĐS:*</u> b) Một cơ sở $S=\{v=(2;1;1)\}$; $\dim V=1$; c) $u_S=(2)$

Bài 18. Họ các véc tơ sau độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính:

a) $S=\{u_1=(1;-2;0;4);u_2=(3;-2;1,1);u_3=(2;2;1;3)\}$ trong $\mathbb{R}^4$.

b) $S=\{u_1=(1;-2;0;4);u_2=(3;-2;1,1);u_3=(2;0;1;-3)\}$ trong $\mathbb{R}^4$.

c) $U=\{u_1=(-1;2;4);u_2=(3;-2;2);u_3=(1;0;3);u_4=(1;1;1)\}$ trong $\mathbb{R}^3$.

<u>*ĐS:*</u> a) ĐLTT b) PTTT c) PTTT.

Bài 19.

1) Chứng minh họ vectơ sau là một cơ sở của không gian vectơ $\mathbb{R}^3$:

$$V=\{v_1=(-1;2;4);v_2=(3;-2;1);v_3=(2;-1;5)\}$$

2) Họ vectơ sau đây có phải là một cơ sở của không gian vectơ $\mathbb{R}^3$ không?

$$U=\{u_1=(-2;3;4);u_2=(3;-2;5);u_3=(5;0;23)\}$$

<u>*ĐS:*</u> 2) không

Bài 20. Với giá trị nào của m thì họ vectơ sau đây độc lập tuyến tính? Phụ thuộc tuyến tính?

a) $V=\{v_1=(2;1;1;m);v_2=(2;1;-1,m);v_3=(10;5;-1;5m)\}$ trong $\mathbb{R}^4$.

b) $U=\{u_1=(2;1;2m);u_2=(2;1;-1);u_3=(1+m;2;-3)\}$ trong $\mathbb{R}^3$.

c) $V=\{u_1=(m;2;1);u_2=(1;-2,m);u_3=(2;2;3)\}$ trong $\mathbb{R}^3$.

<u>*ĐS:*</u> a) PTTT khi $m=\frac{-1}{2}$; ĐLTT khi $m\neq\frac{-1}{2}$

b) PTTT khi $m=\frac{-1}{2}$ hoặc *m=3*; ĐLTT khi $m\neq\frac{-1}{2}$ và $m\neq 3$

c) PTTT khi $m=-1$ hoặc *m=0*; ĐLTT khi $m\neq -1$ và $m\neq 0$

Bài 21. Trong $\mathbb{R}^3$, véctơ u sau đây có phải là tổ hợp tuyến tính của các véctơ còn lại không? Tại sao? Với $u_1=(1;1;1);u_2=(0;-1;1);u_3=(-2;-1;3);u=(2;-1;5)$.

<u>*ĐS:*</u> Có vì $u=2u_1+3u_2$.

Bài 22. Tìm điều kiện của m để véctơ u trong $\mathbb{R}^3$ sau đây là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ còn lại với $u_1=(0;1;-1);u_2=(-2;1;3);u_3=(m;2;-1);u=(1;m;2)$.

_ĐS:_ Là THTT khi và chỉ khi $m \neq \frac{-1}{2}$

Bài 23. Trong không gian véctơ $\mathbb{R}^2$ cho hai tập hợp:

$$U = \{u_1 = (1;-1); u_2 = (2;1)\} \text{ và } V = \{v_1 = (3;1); v_2 = (1;-1)\}.$$

a) Chứng minh rằng U và V là hai cơ sở của $\mathbb{R}^2$.

b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ U sang V.

c) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ V sang U.

d) Tìm tọa độ của vectơ $x = (3;-1)$ trong cơ sở U.

e) Tìm vectơ y trong $\mathbb{R}^2$ có tọa độ trong cơ sở U là $y_U = (4;-5)$.

f) Biết tọa độ của vectơ z trong cơ sở U là $z_U = (7;2)$, hãy tìm tọa độ của vectơ z trong cơ sở V.

_ĐS:_ b) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{4}{3} & 0 \end{bmatrix}$; c) $B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{4} \\ 1 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$; d) $x_U = \left(\frac{5}{3};\frac{2}{3}\right)$; e) $y = (-6;-9)$; f) $z_V = \left(\frac{3}{2};\frac{13}{2}\right)$

Bài 24. Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^3$ cho hai tập hợp: $U = \{u_1 = (1;1;-1); u_2 = (1;1;0); u_3 = (2;1;-1)\}$ và $V = \{v_1 = (1;1;0); v_2 = (1;0;-1); v_3 = (1;1;1)\}$.

a) Chứng minh U và V là hai cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ U sang V.

c) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ V sang U.

d) Tìm tọa độ của vectơ $x = (2;3;-1)$ trong cơ sở U.

e) Tìm vectơ y trong $\mathbb{R}^3$ có tọa độ trong cơ sở U là $y_U = (1;1;-1)$.

f) Biết tọa độ của vectơ z trong cơ sở V là $z_V = (1;0;2)$, hãy tìm tọa độ của vectơ z trong cơ sở U.

_ĐS:_ b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; c) $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

d) $x_U = (2;2;-1)$; e) $y = (0;1;0)$; f) $z_U = (0;2;-1)$

Bài 25. Tìm hạng của họ các véc tơ sau:

a) $U = \{u_1 = (-2;1;1); u_2 = (2;-3;1); u_3 = (-1;0;1); u_4 = (1;-3;2)\}$ trong không gian vectơ $\mathbb{R}^3$.

b) $V = \{v_1 = (-2;1;1); v_2 = (2;-3;1); v_3 = (4;0;1)\}$ trong không gian vectơ $\mathbb{R}^3$.

c) $W=\{w_1=(2;2;0;0;-1);w_2=(3;-3;1;5;2);w_3=(1;-1;-1;0;0)\}$ trong không gian vectơ $\mathbb{R}^4$.

ĐS: a) 2; b) 3; c) 3.

Bài 26. Trong không gian véc tơ $\mathbb{R}^4$ hãy tìm hạng của họ các véc tơ sau tùy theo m :

$$U=\{u_1=(2;1;1;m);u_2=(1;3;-1;2);u_3=(-3;1;-3m;0)\}$$

ĐS: $m=1$ thì hạng của họ vectơ là 2; với $m\neq 1$ thì hạng của họ vectơ là 3.

Bài 27. Cho ánh xạ $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ xác định bởi: $\forall u=(x;y;z)\in\mathbb{R}^3,\ f(u)=(x+y;y-z)$

1. Chứng minh rằng f là ánh xạ tuyến tính.
2. Tìm $\ker f$, $\operatorname{Im} f$ và tính hạng của f.
3. Tìm ma trận của f trong cơ sở $U=\{u_1=(1;1;0);\ u_2=(1;0;1);\ u_3=(1;1;1)\}$ của $\mathbb{R}^3$ và cơ sở $V=\{v_1=(1;1);\ v_2=(1;2)\}$ của $\mathbb{R}^2$.

ĐS: $\ker f=\{u=(-t;t;t)\,|\,t\in\mathbb{R}\}$; $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}^2$; $r(f)=\dim(\operatorname{Im} f)=2$; $A=\begin{bmatrix}3&3&4\\-1&-2&-2\end{bmatrix}$

Bài 28. Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$\forall u=(x;y;z)\in\mathbb{R}^3,\ f(u)=(x+2y;3y+z;3x-2z)$$

1. Tìm $\ker f$, $\operatorname{Im} f$ và chỉ ra cho mỗi không gian này một cơ sở.
2. Tìm hạng của ánh xạ f.
3. Tìm ma trận A của ánh xạ f trong cơ sở $U=\{u_1=(0;1;1);\ u_2=(1;0;1);\ u_3=(1;1;1)\}$ của $\mathbb{R}^3$.

ĐS: $\ker f=\{u=(2t;-t;3t)\,|\,t\in\mathbb{R}\}=\langle(2;-1;3)\rangle$;

$\operatorname{Im} f=span\{(1;0;3),(2;3;0),(0;1;-2)\}=\langle(1;0;3),(0;1;-2)\rangle$; $r(f)=2$;

$$A=\begin{bmatrix}-4&0&-2\\-6&0&-3\\8&1&6\end{bmatrix}$$

Bài 29. Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ có ma trận là $A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$ trong cơ sở chính tắc $E=\{e_1=(1;0;0);\ e_2=(0;1;0);\ e_3=(0;0;1)\}$ của $\mathbb{R}^3$.

1. Tìm công thức xác định ánh xạ tuyến tính f.
2. Tìm ma trận của ánh xạ f trong cơ sở $U=\{u_1=(1;0;0);\ u_2=(1;0;1);\ u_3=(1;1;1)\}$ của $\mathbb{R}^3$.
3. Tìm các giá trị riêng và các vectơ riêng của ma trận A. Ma trận A có chéo hóa được không ? nếu có hãy viết ma trận P làm chéo hóa A.

HD&ĐS: 1. Giả sử $u=(x;y;z)\in\mathbb{R}^3$, có $u=xe_1+ye_2+ze_3$ suy ra $f(u)=xf(e_1)+yf(e_2)+zf(e_3)$ do f là axtt. *ĐS:* $f(u)=(y+z;x+z;x+y)$

2. $B=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\1&2&2\end{bmatrix}$

3. Mt A có hai giá trị riêng là $\lambda_1=2$ (bội 1) và $\lambda_2=-1$ (bội 2).

Vectơ riêng ứng với gt riêng $\lambda_1=2$ có dạng $v=\begin{bmatrix}x&x&x\end{bmatrix}^t$, $x\in\mathbb{R}$.

Vectơ riêng ứng với gt riêng $\lambda_2=-1$ có dạng $v=\begin{bmatrix}x&y&-x-y\end{bmatrix}^t$, $x,y\in\mathbb{R}$.

Ma trận $P=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&-1&-1\end{bmatrix}$ làm chéo hóa A và $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$.

Bài 30. Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ có ma trận là $A=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&1\end{bmatrix}$ trong hai cơ sở $U=\{u_1=(1;1;0);\ u_2=(1;0;1);\ u_3=(1;1;1)\}$ của $\mathbb{R}^3$ và cơ sở $V=\{v_1=(1;1);\ v_2=(1;2)\}$ của $\mathbb{R}^2$.

1. Tính $f(4;2;1)$.
2. Tìm công thức xác định ánh xạ tuyến tính f.
3. Tìm hạt nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính f và chỉ ra cho mỗi không gian con này một cơ sở.

ĐS: 1. $u=(4;2;1)=3u_1+2u_2-u_3 \Rightarrow f(u)=3f(u_1)+2f(u_2)-f(u_3)$. *ĐS:* $f(4;2;1)=(10;17)$

2.Với $u=(x;y;z)\in\mathbb{R}^3$, có $u=(x-z)u_1+(x-y)u_2+(-x+y+z)u_3$

CT xác định f là: $f(u)=(2x+y;4x+y-z)$.

3. $\ker f=\{u=(x;-2x;2x),x\in\mathbb{R}\}=\langle(1;-2;2)\rangle \Rightarrow$ một cơ sở: $S_1=\{(1;-2;2)\}$

Dùng định lý: $\dim(\ker f)+\dim(\operatorname{Im} f)=\dim(\mathbb{R}^3)$ suy ra $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}^2$, có 1 cơ sở là V.

Bài 31. Cho $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ là ánh xạ xác định bởi: $\forall u=(x;y)\in\mathbb{R}^2$, $f(u)=(-8x+15y;-6x+11y)$.

1. Chứng minh rằng f là ánh xạ tuyến tính.
2. Tìm $\ker f$, $\operatorname{Im} f$ và tính hạng của f.
3. Tìm ma trận A của ánh xạ tuyến tính f trong trong cơ sở $U=\{u_1=(1;1);\ u_2=(2;1)\}$ của $\mathbb{R}^2$.
4. Tìm các giá trị riêng và các vectơ riêng của ma trận A. Ma trận A có chéo hóa được không ? nếu có hãy viết ma trận P làm chéo hóa A.

<u>*HD&ĐS:*</u> 2. $\ker f = \{(0;0)\} \Rightarrow \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$; 3. $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$;

4. A có 2 giá trị riêng là $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = 2$.

Vectơ riêng ứng với gt riêng $\lambda_1 = 1$ có dạng $u = \begin{bmatrix} x \\ 2x \end{bmatrix}, x \in \mathbb{R}$

Vectơ riêng ứng với gt riêng $\lambda_2 = 2$ có dạng $u = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}, x \in \mathbb{R}$

Ma trận $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ làm chéo hóa A và $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Bài 32. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi: $\forall u = (x; y; z) \in \mathbb{R}^3,\ f(u) = (x+z; y; x+z)$.

1. Chứng minh rằng f là ánh xạ tuyến tính.
2. Tìm $\ker f$, $\operatorname{Im} f$ và tính hạng của f. Chỉ ra cho mỗi không gian con $\ker f$, $\operatorname{Im} f$ một cơ sở.
3. Tìm ma trận A của ánh xạ tuyến tính f trong trong cơ sở chính tắc $E = \{e_1 = (1;0;0);\ e_2 = (0;1;0);\ e_3 = (0;0;1)\}$ của $\mathbb{R}^3$.
4. Tìm các giá trị riêng và các vectơ riêng của ma trận A. Ma trận A có chéo hóa được không ? nếu có hãy viết ma trận P làm chéo hóa A.

<u>*HD&ĐS:*</u> 2. $\ker f = \{(x;0;-x), x \in \mathbb{R}\} = \langle (1;0;-1) \rangle$; $\operatorname{Im} f = \langle (1;0;1), (0;1;0) \rangle$; $r(f) = 2$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. A có 3 giá trị riêng là $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ và $\lambda_3 = 2$.

Vectơ riêng ứng với gt riêng $\lambda_1 = 0$ có dạng $u = [x \quad 0 \quad -x]^t, x \in \mathbb{R}$

Vectơ riêng ứng với gt riêng $\lambda_2 = 1$ có dạng $u = [0 \quad y \quad 0]^t, y \in \mathbb{R}$

Vectơ riêng ứng với gt riêng $\lambda_3 = 2$ có dạng $u = [x \quad 0 \quad x]^t, x \in \mathbb{R}$

Ma trận $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ làm chéo hóa A và $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Bài 33. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ và $u = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix},\ v = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$. Hỏi u, v có phải là những vectơ riêng của ma trận A không ? vì sao ?

<u>*HD:*</u> $Au = -4u$; $Av = \begin{bmatrix} -9 \\ 11 \end{bmatrix} \neq \lambda v,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Bài 34. Ma trận sau có chéo hóa được không ? nếu được hãy đưa ma trận đó về dạng chéo :

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

HD: Ma trận A có hai giá trị riêng là $\lambda_1 = 1$ (bội 1) và $\lambda_2 = -2$ (bội 2).

K/g riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 1$ (bội 1) là không gian 1 chiều sinh bởi $v = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^t$

K/g riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = -2$ (bội 2) là không gian 1 chiều sinh bởi $v = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^t$ nên mt A vuông cấp 3 không có đủ 3 vectơ riêng độc lập tuyến tính, do đó ma trận A không thể chéo hóa được.

-- HẾT --