

Bài 1. Áp dụng định nghĩa để tính đạo hàm của các hàm số sau:

1. $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$

2. $f(t) = 5t^2$ tại $t = 1$

Đ/S. 1. $f'(x) = \frac{1}{2}$

2. $f'(1) = 10$

Bài 2.

1. Tìm hệ số góc của tiếp tuyến với đường parabol $y = 4x - x^2$ tại điểm $(1; 3)$.

2. Tìm phương trình đường tiếp tuyến trong câu 1.

3. Vẽ đồ thị đường parabol và đường tiếp tuyến trong câu 2.

Đ/S 1. 2; 2. $y = 2x + 1$

Bài 3. Tính đạo hàm của các hàm số một biến số sau:

1. $y = \frac{2}{x^3} - \sqrt{x+1} + \frac{1}{3}x\sqrt{x}$

4. $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

2. $y = -4(t-2)\sqrt{6-t}$

5. $y = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$ tại $x = 1$

3. $y = \frac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x}}$ tại $x = 1$

6. $y = e^{-x+\sqrt{x}}$

Đ/S. 1. $y' = \frac{-6}{x^4} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2}\sqrt{x}$ 2. $y' = \frac{-2(14-3t)}{\sqrt{6-t}}$ 3. 2

4. $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

5. $\frac{2}{3}$

6. $y' = \left(-1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)e^{-x+\sqrt{x}}$

Bài 4. Giả sử rằng $f(5) = 1; f'(5) = 6; g(5) = 3; g'(5) = 2$. Hãy tính các giá trị:

1. $(fg)'(5)$

2. $\left(\frac{f}{g}\right)'(5)$

3. $\left(\frac{g}{f}\right)'(5)$

Đ/S. 1. 20

2. $\frac{16}{9}$

3. -16

Bài 5. Giả sử rằng $f(2) = -3; g(2) = 4; f'(2) = -2; g'(2) = 7$. Hãy tính $h'(2)$

1. $h(x) = 5f(x) - 4g(x)$

2. $h(x) = f(x)g(x)$

3. $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

4. $h(x) = \frac{g(x)}{1+f(x)}$

Đ/S. 1. -38 2. -29 3. $\frac{13}{16}$ 4. $\frac{-3}{2}$

Bài 6. Nếu g là một hàm khả vi, hãy tìm biểu thức cho đạo hàm của mỗi hàm số sau:

1. $y = x^2 g(x)$ 2. $y = \frac{x}{g(x)}$ 3. $y = \frac{1+xg(x)}{\sqrt{x}}$

Đ/S. 1. $y' = 2xg(x) + x^2 g'(x)$ 2. $y' = \frac{g(x) - xg'(x)}{g^2(x)}$ 3. $y' = \frac{-1+xg(x)+2x^2 g'(x)}{2x\sqrt{x}}$

Bài 7. Tính vi phân của các hàm số một biến số sau:

1. $y = 2x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2\sqrt{x} - 5$ 4. $y = \frac{e^x}{1+x^2}$
 2. $y = e^{-x} + \ln(2+x^3)$ tại $x = -1$ 5. $y = (1+\sqrt{1-2x})^3$ tại $x = 0$
 3. $y = (3x+5)3^{3x}$ tại $x = -\frac{1}{3}$ 6. $y = \ln \frac{s+1}{\sqrt{s-2}}$

Đ/S. 1. $dy = \left(8x^3 - x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$ 2. $dy(-1) = (3-e)dx$ 3. $dy\left(\frac{-1}{3}\right) = (1+4\ln 3)dx$
 4. $dy = \frac{e^x(1-2x+x^2)}{(1+x^2)^2}dx$ 5. $dy(0) = -6dx$ 6. $dy = \frac{-3}{(s+1)(s-2)}ds$

Bài 8. Tìm đa thức Taylor bậc 3 của các hàm số sau:

1. $f(x) = \ln(1-2x)$ tại $x = 0$ 3. $f(x) = \frac{1}{x^2+2x}$ tại $x = -1$
 2. $f(x) = e^{3x+1}$ tại $x = -\frac{1}{3}$

Đ/S. 1. $f(x) = -2x - 2x^2 - \frac{8}{3}x^3$ 2. $f(x) = 1 + 3\left(x + \frac{1}{3}\right) + \frac{9}{2!}\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{27}{3!}\left(x + \frac{1}{3}\right)^3$
 3. $f(x) = -1 - (x+1)^2$

Bài 9. Tính các tích phân sau:

1. $\int \frac{x+2}{\sqrt{x}} dx$ 3. $\int_{-1}^0 \frac{2x+3}{x^2+2x+2} dx$ 5. $\int_0^1 \frac{dx}{2e^x+1}$
 2. $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{2x-1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ 4. $\int \frac{x^2+2}{x^2-4x+3} dx$ 6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{9+4x+x^2}}$

8. $\int (2x+1)e^{-x} dx$

9. $\int \ln(x+1) dx$

10. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$

11. $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx$

Đ/S.

1. $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 4\sqrt{x} + C$

2. $\frac{\pi}{3} - 1$

3. $\ln 2 + \frac{\pi}{4}$

4. $x - \frac{3}{2}\ln|x-1| + \frac{11}{2}\ln|x-3| + C$

5. $\ln \frac{2e+1}{3e}$

6. $2\arcsin \sqrt{x} + C$

7. $\ln(x+2+\sqrt{9+4x+x^2}) + C$

8. $e^{-x}(-2x-3) + C$

9. $(x+1)\ln(x+1) - x + C$

10. $2 - \frac{\pi}{2}$

11. $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$

Bài 10. Tính các tích phân suy rộng sau:

1. $\int_1^{+\infty} \frac{3\sqrt{x}+2}{x^3} dx$

2. $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{4x^2+1}$

3. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{9x^2+6x+4}$

4. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+8}$

5. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

6. $\int_{-\infty}^0 (2x+1)e^x dx$

Đ/S. 1. 3 2. $\frac{\pi}{4}$ 3. $\frac{\pi}{9\sqrt{3}}$ 4. $-\frac{1}{2}\ln 2$ 5. $\frac{1}{2}\ln \frac{3}{2}$ 6. -1

Bài 11. Tính độ dài đường cong:

1. $y = \frac{1}{2\sqrt{2}}(x^2 - \ln x) \quad (1 \leq x \leq e)$

2. $y = 1 + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} \quad (2 \leq x \leq 6)$

3. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{5})$

4. $y = \ln(1 - x^2) \quad (0 \leq x \leq \frac{1}{2})$

5. $y = \ln x \quad (\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8})$

6. $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad (0 \leq x \leq 1)$

Đ/S. 1. $\frac{e^2 - 2}{2\sqrt{2}}$ 2. $\frac{49}{3}$ 3. 1 4. $\ln 3 - \frac{1}{2}$ 5. $1 + \frac{1}{2}\ln \frac{3}{2}$ 6. $\frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)$

Bài 12. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau:

1. $y = x^2, y = \frac{x^2}{2}, y = 2x$

2. $y = x^2 + 1; y = \frac{1}{2}x^2; y = 2$

3. $y^2 = x; y = 2 - x; y \geq 0$, trục hoành.

Đ/S. 1. 4 2. 4 3. $\frac{7}{6}$

Bài 13. Tính vi phân toàn phần của hàm số:

1. $z = \ln \frac{x}{x+y} + \frac{1}{y}$ tại $(1;2)$

3. $f(x, y) = (x+y)e^{xy+1}$ tại $(1;-1)$

2. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 2y^2} + \frac{1}{\sqrt{xy}}$

4. $z = \frac{x+y}{y} - e^{-2x} \ln y$ tại $(0;1)$

Đ/S. 1. $dz(1;2) = \frac{2}{3}dx - \frac{1}{3}dy$ 3. $df(1;-1) = dx + dy$ 4. $dz(1,1) = dx - dy$

2. $df = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 2y^2}} - \frac{1}{2x\sqrt{xy}} \right) dx + \left(\frac{2y}{\sqrt{x^2 + 2y^2}} - \frac{1}{2y\sqrt{xy}} \right) dy$

Bài 14. Tính các đạo hàm riêng cấp 2 của các hàm số sau:

1. $z = xy \ln x + \frac{x}{y}$

2. $z = \ln(x^2 + y^2)$

3. $z = (2x^2 + y^2)e^{x-y}$

Đ/S

1. $z'_x = y(1 + \ln x); z'_y = x \ln x; z''_{xx} = \frac{y}{x}; z''_{yy} = 0; z''_{xy} = 1 + \ln x$

2. $z'_x = \frac{2x}{x^2 + y^2}; z'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2}; z''_{xx} = \frac{2y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2}; z''_{xy} = \frac{-4xy}{(x^2 + y^2)^2}$

3. $z'_x = (2x^2 + y^2 + 4x)e^{x-y}; z'_y = (2y - 2x^2 - y^2)e^{x-y};$
 $z''_{xx} = (4 + 8x + 2x^2 + y^2)e^{x-y}; z''_{yy} = (4x + 2y - 2x^2 - y^2)e^{x-y}; z''_{xy} = (2 - 4y + 2x^2 + y^2)e^{x-y};$

Bài 15. Tìm các điểm cực trị và giá trị cực trị (nếu có) của các hàm số sau:

1. $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$

4. $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$

2. $z = x + y - xe^y$

5. $z = 9x^3 + \frac{1}{3}y^3 - 3xy + 30$

3. $z = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 - 2y + 12$

6. $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$

Đ/S.

1. Đạt cực tiểu tại $M\left(\frac{1}{2}; -1\right)$

3. Đạt cực trị tại $M\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right)$

6. Đạt cực tiểu tại $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$

2. Không có cực trị

4. Đạt cực đại tại $M(5; 2)$

7. Đạt cực đại tại $(4; 4)$

Bài 16. Điểm $M(1;1)$ và $N(-1;1)$ có là điểm cực trị của hàm số $z = x^4 + y^4 - 4xy + 2$ không? Nếu có thì nó là điểm cực đại hay cực tiểu của hàm số?

Đ/S. N không là điểm cực trị, M là điểm cực tiểu.

Bài 17. Giải các phương trình vi phân với biến số phân ly sau:

1. $(1+x^2)y' - 3xy = 0$

3. $\sqrt{1-x^2}y' = (1+y^2)$

2. $xyy' = \sqrt{1+y^2}$

4. $y' = \frac{1-y^2}{x^2}$

Đ/S

1. $\ln\left|\frac{y}{C}\right| = \frac{3}{2}\ln(1+x^2)$

2. $x \neq 0, \sqrt{1+y^2} - \ln x^2 = C$; $x=0$ không là nghiệm

3. $\arctan y - \arcsin x + C = 0, x \neq \pm 1$

4. $y \neq \pm 1, \ln\sqrt{\frac{1+y}{1-y}} + \frac{1}{x} = C$; $y = \pm 1$ cũng là nghiệm

Bài 18. Giải các phương trình vi phân đẳng cấp sau:

1. $y' = \frac{x-y}{x+y}; y(1) = 1$

3. $xy' = y(1 + \ln y - \ln x)$ với $y(1) = e$

2. $y' = \frac{y}{x-2\sqrt{xy}}, x \geq 0$

4. $y' = \frac{xy}{x^2 + y^2}$

Đ/S 1. $|x^2 - 2xy - y^2| = \sqrt{2}$ 2. $\sqrt{\frac{x}{y}} + \ln|y| = C$ 3. $y = xe^x$ 4. $\ln|Cy| + \frac{2x^2}{y^2} = 0, C \neq 0$

Bài 19. Giải các phương trình vi phân tuyến tính sau:

1. $y' - \frac{2}{x}y = \frac{3}{x^2}$ với $y(1) = 1$.

3. $xy' - y = \frac{x^3}{x^2 + 4}$

2. $y' + 2xy = (x + x^2).e^{-x^2}$

4. $y' - \frac{y}{x \ln x} = \frac{\ln x}{x^2 - 4}$

Đ/S 1. $y = \left(\frac{-1}{x^3} + 2\right)x^2$

2. $y = \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + C\right).e^{-x^2}$

3. $y = \left(\frac{1}{2}\ln(x^2 + 4) + C\right)x, x \neq 0$

4. $y = \left(\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C\right)\ln x$

Bài 20. Giải các phương trình vi phân Bernoulli sau:

1. $xy^2 \frac{dy}{dx} + y^3 = \frac{1}{x^2}$

2. $y' - \frac{3}{x}y = -x^3y^2$

3. $x^2y' + 2xy = 5y^3$

4. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 5x^2y^2$

Đ/S 1. $y^3 - \frac{1}{x^3}(3x + C) = 0, x \neq 0.$ 2. $\frac{1}{y} - \frac{x^4}{7} - \frac{C}{x^3} = 0$ 4. $\frac{1}{y} + \frac{5}{4}x^3 - \frac{C}{x} = 0$

3. $\frac{1}{y^2} - x^4 \left(\frac{10}{3x^3} + C \right) = 0, x \neq 0; x = 0$ không là nghiệm của pt

Bài 21. Tính tổng của các chuỗi số sau:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

3. $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n}$

5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2}$

Đ/S. 1. 1 2. $\frac{1}{3}$ 3. $-\ln 2$ 4. $\frac{7}{2}$ 5. 1

Bài 22. Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n^2+3n-4}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{\sqrt{5n}}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(2n+1)}{5^n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n^2+2n+1}{2n^2-2n+4} \right)^n$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctan \frac{1}{n} \right)^n$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{2^n}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos na}{\sqrt{n^4+1}}$

Đ/S

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------|
| 1. Phân kì (tiêu chuẩn so sánh) | 5. Phân kì (tiêu chuẩn Côsi) |
| 2. Hội tụ (tiêu chuẩn so sánh) | 6. Hội tụ (tiêu chuẩn Côsi) |
| 3. Hội tụ (tiêu chuẩn Đalămbe) | 7. Hội tụ (tiêu chuẩn Leibnitz) |
| 4. Hội tụ (tiêu chuẩn Đalămbe) | 8. Hội tụ (tiêu chuẩn Leibnitz) |

9. Hội tụ tuyệt đối

10. Hội tụ tuyệt đối

Bài 23. Tìm miền hội tụ của các chuỗi lũy thừa sau:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5x)^n}{n!}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n5^n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (2n+5)x^n$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n+1}\right)^n (x-4)^n$

6. $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$

Đ/S. 1. \mathbb{R} 2. $(-1;1)$ 3. $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right]$ 4. $(1;7)$ 5. $[0;10)$ 6. 0