



## **CHƯƠNG 3: CƠ HỌC HỆ CHẤT ĐIỂM VÀ VR**

**§1. Khối tâm**

**§2. Chuyển động của vật rắn**

**§3. Mômen quán tính**

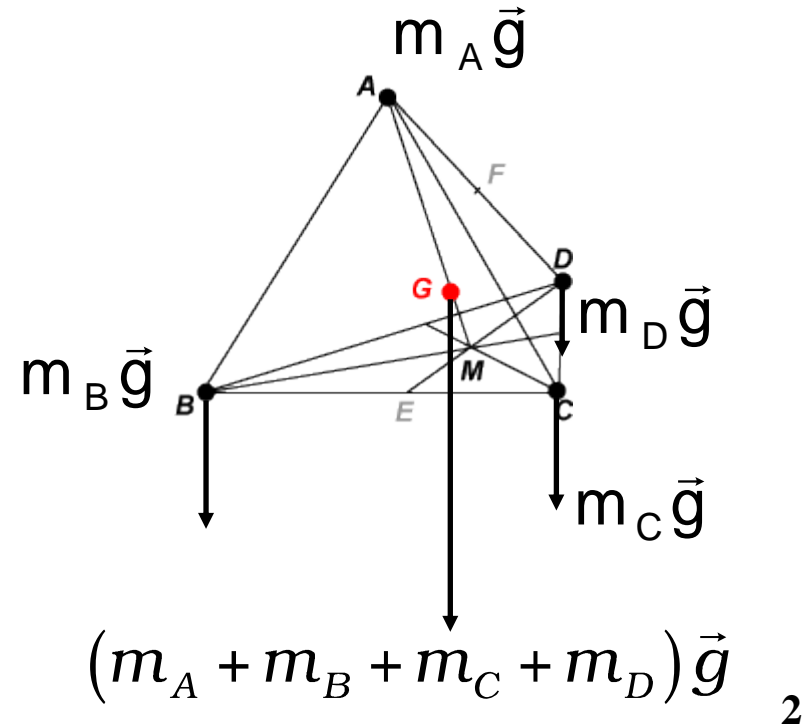
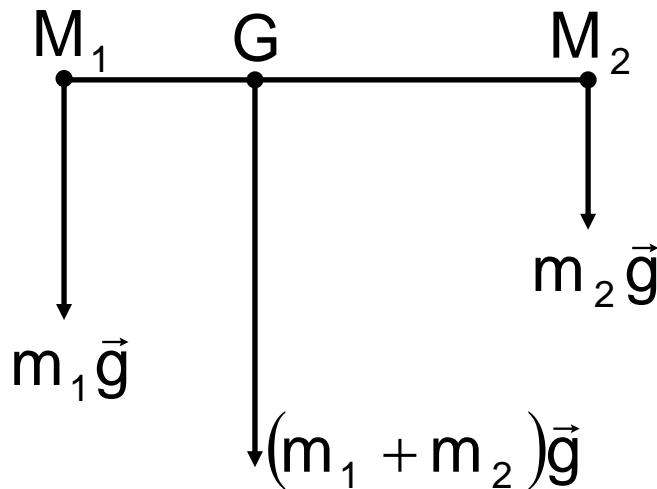
**§4. Mômen động lượng**



# §1. Khối tâm

**Định nghĩa:** Cho một hệ chất điểm  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , “Khối tâm” được định nghĩa là một điểm  $G$  và thỏa mãn điều kiện sau:

$$\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{M_i G} = 0$$





# §1. Khối tâm

## Tọa độ của khối tâm

- Đối với khối tâm của một hệ, ta có:

$$\vec{r}_G = \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OM_i} + \overrightarrow{M_iG}$$

- Nhân hai vế với  $m_i$  lấy tổng cho tất cả các chất điểm của hệ từ  $i = 1$  tới  $n$

$$\left( \sum_{i=1}^n m_i \right) \overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OM_i} + \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{M_iG}$$

= 0

$$\vec{r}_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OM_i}}{\sum_{i=1}^n m_i}$$



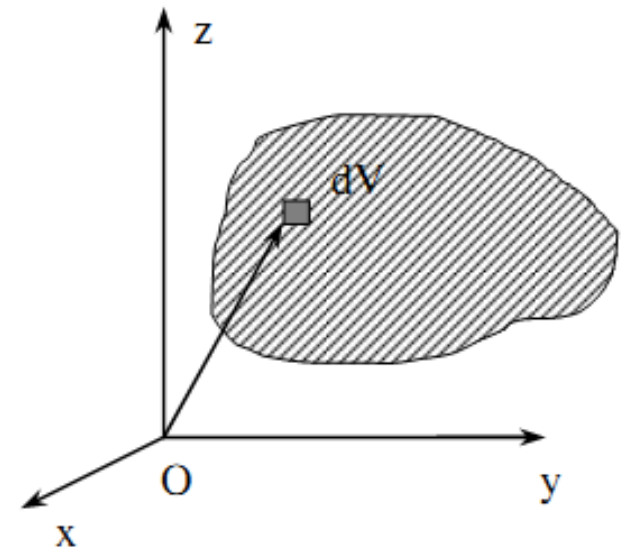
# §1. Khối tâm

**Đối với vật rắn (Hệ chất điểm phân bố liên tục)**

Gọi  $dm$  là khối lượng của yếu tố thể tích  $dV$  nằm tại vị trí xác định bởi  $\vec{r}$

Ta có:  $dm = \rho(\vec{r})dV$

$\rho(\vec{r})$  : Mật độ khối lượng phụ thuộc vào tọa độ  $r$



Vị trí của khối tâm được xác định như sau:

$$\vec{r}_G = \frac{1}{m} \int_V \vec{r} dm = \frac{1}{m} \int_V \vec{r} \rho(\vec{r}) dV$$



# §1. Khối tâm

## Chuyển động của khối tâm

$$\vec{v}_G = \frac{d\vec{r}_G}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\overrightarrow{OM}_i}{dt}}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{p}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\vec{p}}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

$$\rightarrow \vec{v}_G \sum_{i=1}^n m_i = \vec{p}$$

Như vậy: “Tổng động lượng của hệ chất điểm bằng động lượng của một chất điểm đặt tại khối tâm của hệ, có khối lượng bằng tổng khối lượng của hệ và có vận tốc bằng vận tốc khối tâm của hệ”.



# §1. Khối tâm

## Phương trình chuyển động của khối tâm

Giả thiết mỗi chất điểm  $M_1, M_2, \dots, M_n$  chịu tác dụng của một ngoại lực  $F_1, F_2, \dots, F_n$  và chuyển động với gia tốc tương ứng  $a_1, a_2, \dots, a_n$  thỏa mãn các phương trình:

$$\vec{F}_1 = m_1 \vec{a}_1; \quad \vec{F}_2 = m_2 \vec{a}_2; \quad \dots; \quad \vec{F}_n = m_n \vec{a}_n$$

Lấy đạo hàm vận tốc khối tâm của hệ:



# §1. Khối tâm

$$\vec{a}_G = \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \right) = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \frac{d}{dt} \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{F}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

$$\left( \sum_{i=1}^n m_i \right) \vec{a}_G = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

“Khối tâm của hệ chuyển động như một chất điểm có khối lượng bằng tổng khối lượng của hệ và chịu tác dụng của một lực bằng tổng ngoại lực tác dụng lên hệ”.



## §2. Chuyển động của vật rắn

### I. Vật rắn và chuyển động của vật rắn

#### 1. Vật rắn

Vật rắn là một hệ chất điểm mà khoảng cách giữa các chất điểm thuộc vật rắn luôn luôn không đổi.



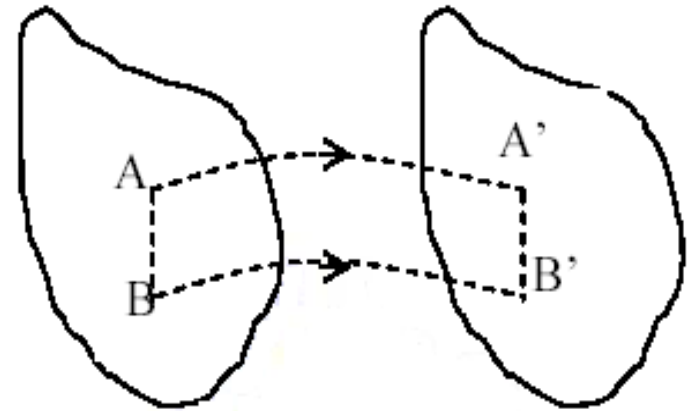


## §2. Chuyển động của vật rắn

### 2. Chuyển động của vật rắn

#### Chuyển động tịnh tiến

Khi vật rắn chuyển động tịnh tiến, mọi chất điểm của nó đều vạch ra những quỹ đạo giống nhau và đoạn nối hai điểm bất kỳ của vật luôn // với chính nó.



→ Tại một thời điểm các chất điểm có cùng véctơ vận tốc và véctơ gia tốc.

→ Chỉ cần xét chuyển động tịnh tiến của một chất điểm bất kỳ thuộc vật rắn.



## §2. Chuyển động của vật rắn



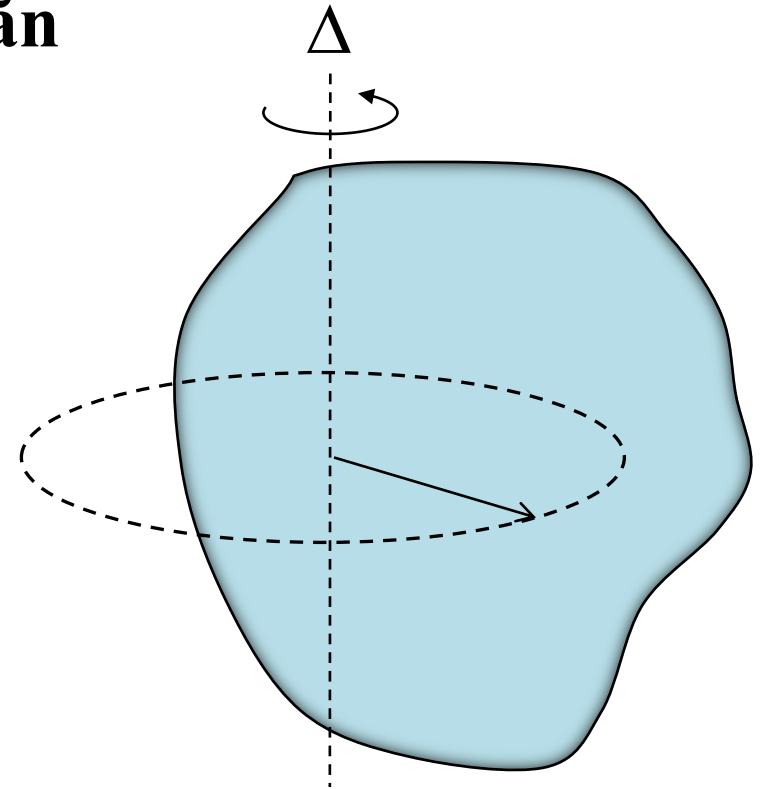


## §2. Chuyển động của vật rắn

### Chuyển động quay của vật rắn

Xét vật rắn bất kỳ quay xung quanh trục cố định.

Khi vật rắn quay, mọi chất điểm thuộc vật rắn đều chuyển động theo quỹ đạo tròn với tâm thuộc trục quay.



→ Tại một thời điểm, các chất điểm thuộc vật rắn có cùng  $\vec{\theta}, \vec{\omega}, \vec{\beta}$



## §2. Chuyển động của vật rắn





## §2. Chuyển động của vật rắn

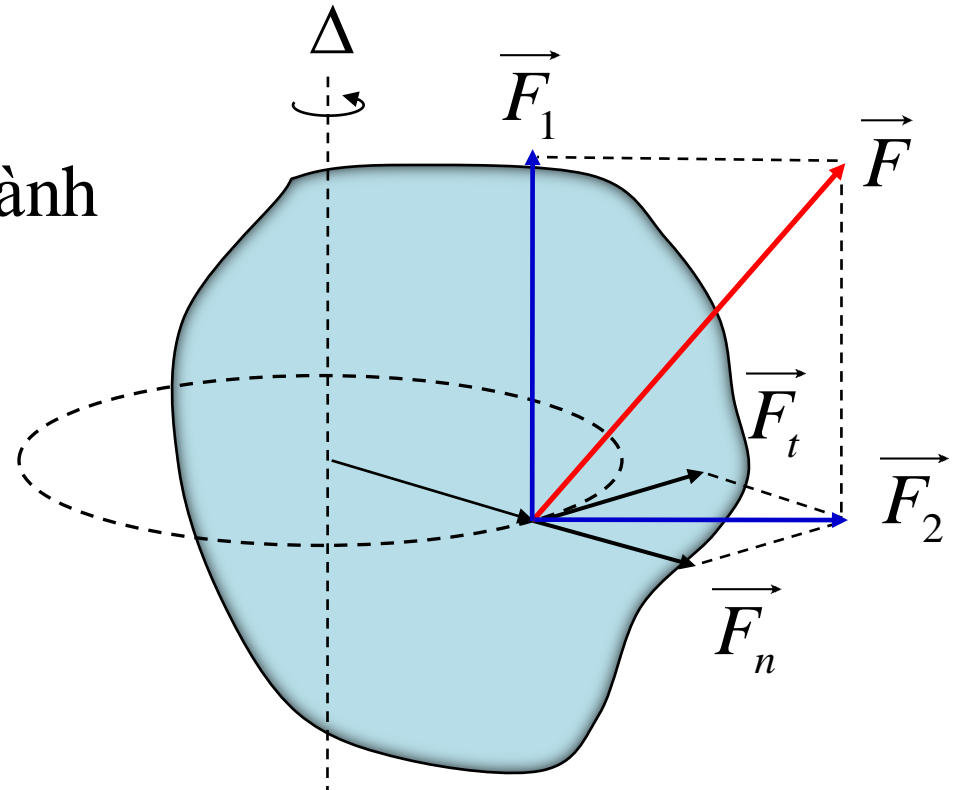
### II. Phương trình cơ bản của chuyển động quay

#### 1. Mômen lực

Giả sử dưới tác dụng của lực  $F$  bất kỳ. Vật rắn quay quanh trục cố định  $\Delta$ .

Phân tích lực  $F$  thành ba thành phần như hình vẽ

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_n + \vec{F}_t \quad (1)$$





## §2. Chuyển động của vật rắn

### Nhận xét

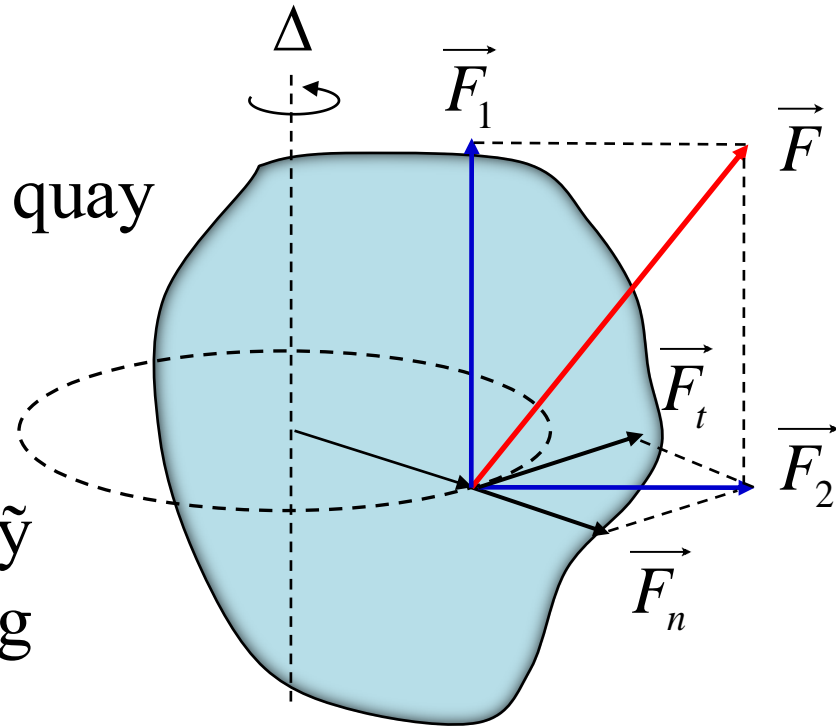
$\vec{F}_1$  có phương song song với trục quay  
→ chỉ làm vật rắn chuyển động dọc trục quay

$\vec{F}_n$  có phương pháp tuyến với quỹ đạo và nằm trong mặt phẳng quỹ đạo

→ chỉ kéo vật rắn dãn xa trục quay

$\vec{F}_t$  có phương tiếp tuyến với quỹ đạo và nằm trong mặt phẳng quỹ đạo

→ làm vật rắn quay quanh trục  $\Delta$





## §2. Chuyển động của vật rắn

### Ý nghĩa của Mômen lực

*Mômen của lực tiếp tuyến  $\vec{F}_t$  đối với trục quay là đại lượng vật lý đặc trưng cho tác dụng của lực đối với chuyển động quay*

**Định nghĩa:**  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_t$  (2)

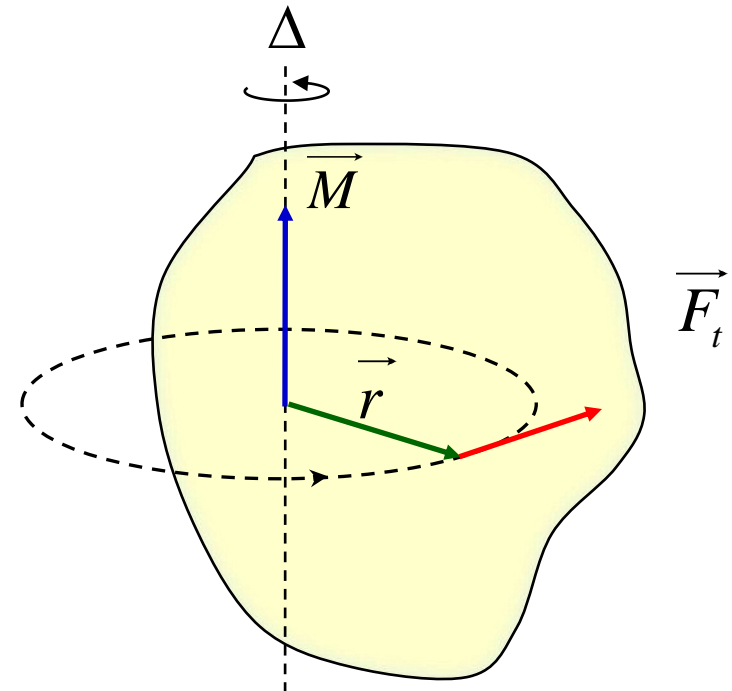
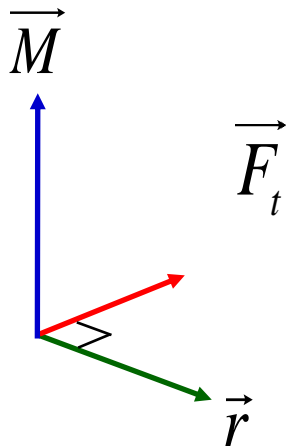
Trong đó:  $\vec{r}$  là véctơ khoảng cách từ trục quay tới điểm đặt của lực  $\vec{F}_t$



## §2. Chuyển động của vật rắn

### Xác định véctơ mômen lực $\vec{M}$

- + Gốc đặt tại tâm quỹ đạo chuyển động quay.
- + Phương nằm trên trục quay.
- + Chiều thuận chiều quay từ ngọn  $\vec{r}$  sang ngọn  $\vec{F}_t$
- + Độ lớn:  $M = r.F_t$  (3)
- + Dạng véctơ:  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_t$  (4)

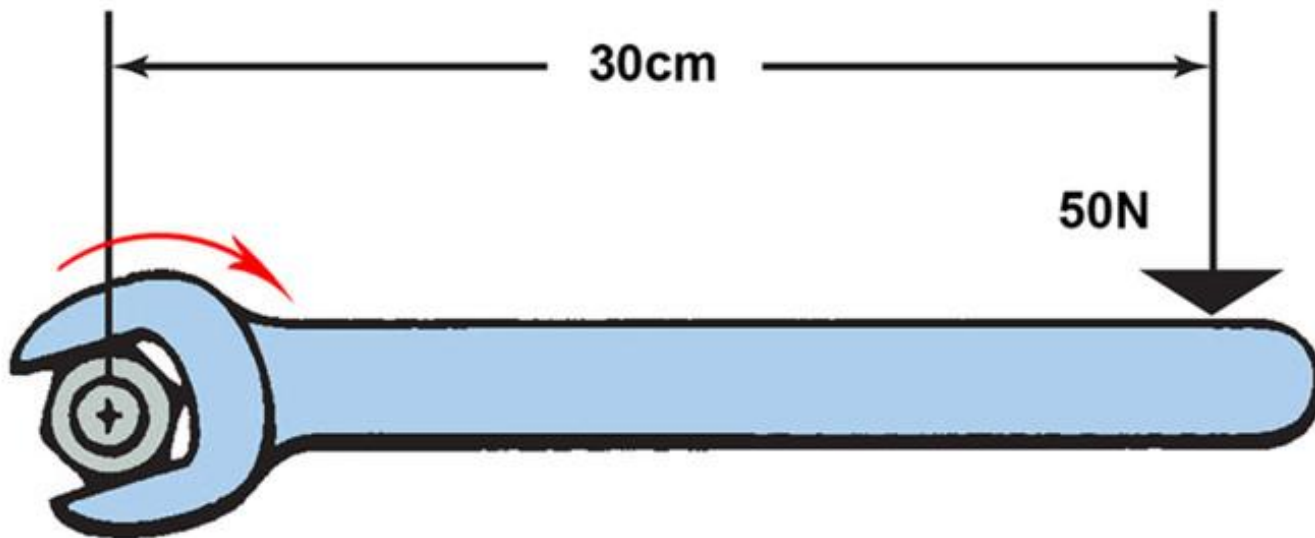




## §2. Chuyển động của vật rắn

### Mômen lực (Mômen xoắn)

Mômen xoắn biểu thị cho tác động của một lực làm quay một vật thể quanh một trục.



Mô men xoắn tạo ra bởi một cờ-lê khi xiết ốc với lực 50N và độ dài cánh tay đòn 0,3m là  $0,3 \times 50 = 15\text{Nm}$ .



## §2. Chuyển động của vật rắn

### Mômen xoắn trong động cơ

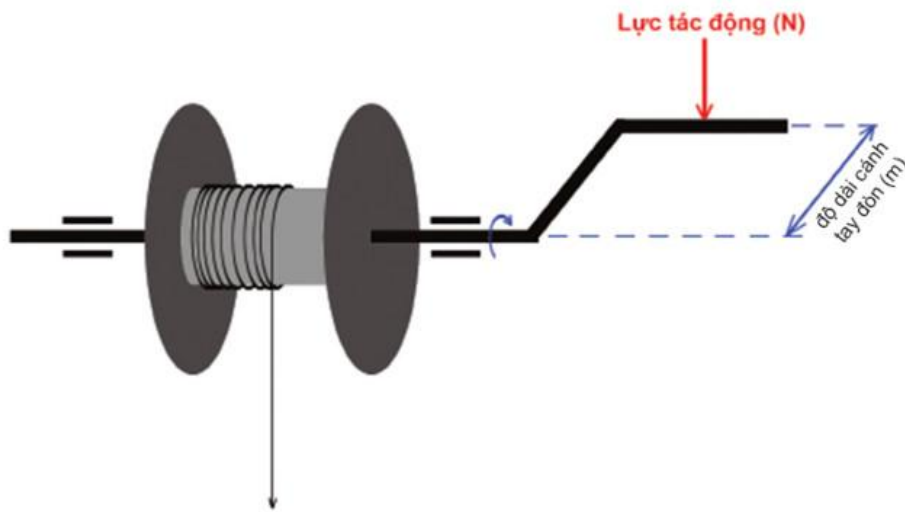


Ta không thể nói một chiếc Lamborghini có công suất 700 HP là "mạnh" hơn một chiếc xe tải Hyundai có công suất 200 HP bởi "sức mạnh" của chiếc xe không chỉ thể hiện ở một đại lượng là công suất mà nó còn thể hiện ở một đại lượng quan trọng khác, đó chính là mômen xoắn.



## §2. Chuyển động của vật rắn

Một chiếc xe có mô-men xoắn càng lớn thì lực quay của bánh xe càng mạnh, xe càng có khả năng chở hay kéo vật nặng và do đó càng "đề pa" nhanh chóng hơn.



Tuy nhiên, chiếc xe có đạt được tốc độ cao hay không thì phụ thuộc vào công suất của động cơ.



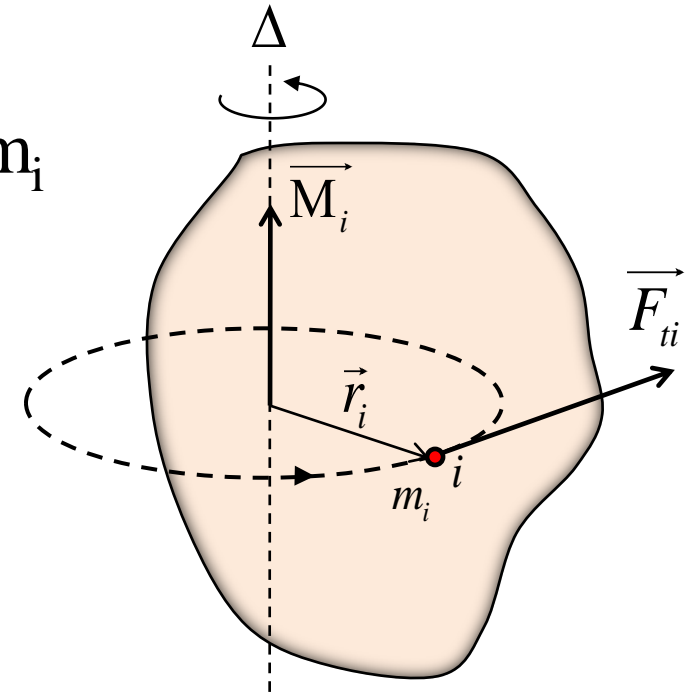
## §2. Chuyển động của vật rắn

### 2. Phương trình chuyển động quay của vật rắn

+ Xét vật rắn (gồm  $n$  chất điểm).

+ Xét chất điểm thứ  $i$ , khối lượng  $m_i$  thuộc vật rắn và cách trục quay  $\Delta$  một khoảng  $r_i$ .

+ Giả sử có lực tiếp tuyến  $\vec{F}_{ti}$  tác dụng lên chất điểm  $i$  và thu được gia tốc  $\vec{a}_{ti}$





## §2. Chuyển động của vật rắn

Theo định luật 2 Newton:

$$F_{ti} = m_i a_{ti} \quad (5)$$

Nhân 2 vế của (5) với  $r_i$  ta được:

$$r_i \cdot F_{ti} = r_i \cdot m_i \cdot a_{ti}$$

Mà:  $a_{ti} = \beta \cdot r_i, M_i = r_i \cdot F_{ti}$

( $M_i$  gọi là mômen của lực  $F_{ti}$  với chất điểm  $i$ )

$$\rightarrow M_i = m_i \cdot r_i^2 \cdot \beta \quad (6)$$

+ Đối với cả vật rắn gồm  $n$  chất điểm ta có:

$$\sum_{i=1}^n M_i = \left( \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \right) \beta \quad (7)$$



## §2. Chuyển động của vật rắn

**Đặt:**

+  $M = \sum M_i$  gọi là mômen tổng hợp các ngoại lực tác dụng lên vật rắn.

+  $I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$  gọi là mômen quán tính của vật rắn với trục quay

$$\rightarrow M = I.\beta \quad (8)$$

+ Do  $\vec{M} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$  (?) nên ta có thể viết dưới dạng véctor:

$$\vec{M} = I.\vec{\beta} \quad (9)$$



## §2. Chuyển động của vật rắn

Biểu thức (8), (9) là phương trình cơ bản của chuyển động quay của vật rắn quanh một trục cố định.

$$(9) \rightarrow \vec{\beta} = \frac{\vec{M}}{I}$$

### Phát biểu

*Trong chuyển động quay của vật rắn, gia tốc góc mà vật rắn thu được tỷ lệ thuận với mômen tổng hợp các ngoại lực tác dụng lên vật rắn và tỷ lệ nghịch với mômen quán tính của vật rắn đối với trục quay.*



## §3. Mômen quán tính

### Cách tính mômen quán tính

Nếu ta có thể chia nhỏ vật thành từng yếu tố nhỏ có khối lượng  $m_i$  và cách trục quay một khoảng  $r_i$  và có mômen quán tính là  $I_i$ . Khi đó mômen quán tính của vật sẽ được tính theo công thức:

$$I = \sum_{i=1}^n I_i = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

Nếu khối lượng của vật phân bố liên tục thì ta có thể chia nhỏ vật tùy ý. Khi đó  $m_i$  sẽ biến thành  $dm$ .

$$I = \lim_{m_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \rightarrow I = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV$$



## §3. Mômen quán tính

### Đặc điểm

- +  $I$  phụ thuộc khối lượng của các chất điểm thuộc vật rắn
- +  $I$  phụ thuộc hình dạng, kích thước và vị trí của vật rắn với trục quay.

### Ý nghĩa

→ *Mômen quán tính đặc trưng cho quán tính trong chuyển động quay của vật rắn quanh trục cố định.*



## §3. Mômen quán tính

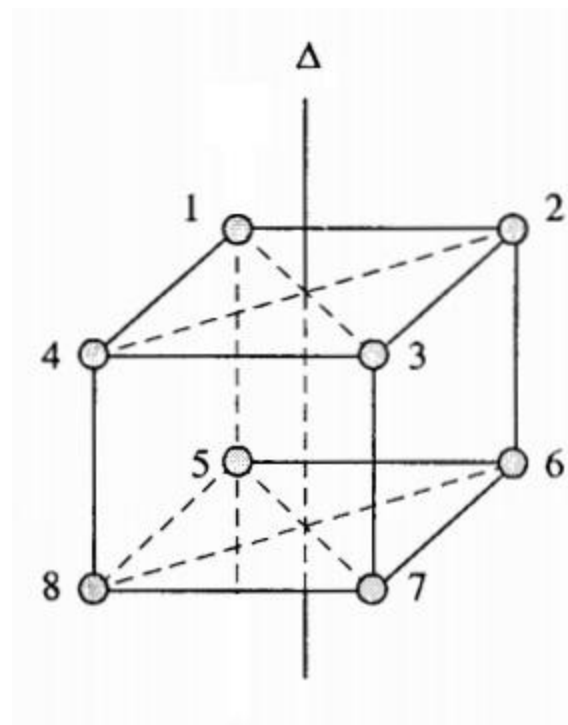
Ví dụ: Mômen quán tính của một mạng gồm 8 hạt cùng có khối lượng  $m$  trên hình lập phương cạnh  $a$  có trục quay là trục  $\Delta$

Khoảng cách từ các hạt đến trục quay là:

$$r = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Mômen quán tính của hệ là:

$$I = \sum m_i r_i^2 = 8m \left( \frac{a}{\sqrt{2}} \right)^2 = 4ma^2$$





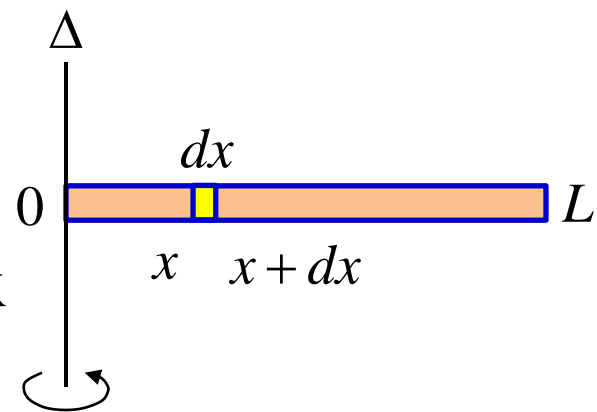
## §3. Mômen quán tính

**Ví dụ: Mômen quán tính của thanh mảnh có tiết diện không đổi  $S$ , chiều dài  $L$ , khối lượng  $m$  và có trục quay đi qua một đầu thanh**

Ta tính  $I$  của phần tử nhỏ có chiều dài  $dx$  và cách trục quay khoảng  $x$ .

Phần tử này có khối lượng là:  $dm = \rho S dx$

$$\rightarrow dI = r^2 dm = x^2 \rho S dx$$



Mômen quán tính của cả thanh:

$$I = \int dI = \int_0^L \rho S x^2 dx = \rho S \left( \frac{x^3}{3} \right)_0^L = \frac{1}{3} \rho S L^3$$

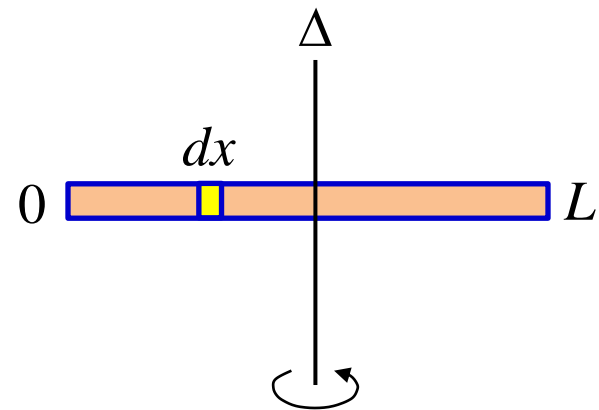
$$\text{Với: } m = \rho S L \quad \rightarrow I = \frac{1}{3} m L^2$$



## §3. Mômen quán tính

Ví dụ: Mômen quán tính của thanh mảnh có tiết diện không đổi  $S$ , chiều dài  $L$ , khối lượng  $m$  và có trục quay qua điểm giữa thanh

$$I = \int dI = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \rho S x^2 dx = \rho S \left( \frac{x^3}{3} \right)_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{1}{12} \rho S L^3$$



Với:  $m = \rho S L \rightarrow I = \frac{1}{12} m L^2$



# §3. Mômen quán tính

Mômen quán tính của một số vật rắn khác

+ Mômen quán tính của hình xuyến

$$I = \frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2)$$

+ Mômen quán tính của hình trụ rỗng

$$I = mR^2$$

+ Mômen quán tính của hình trụ đặc

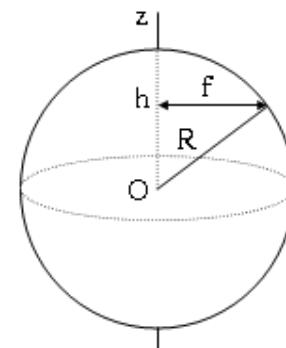
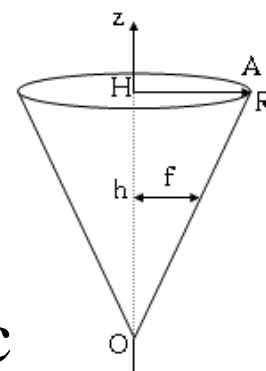
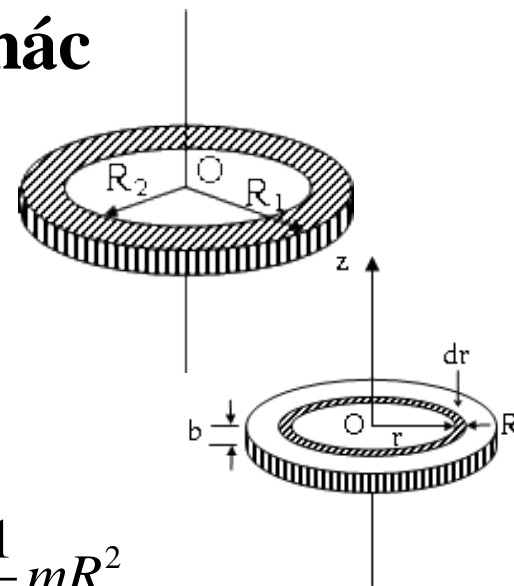
$$I = \frac{1}{2}mR^2$$

+ Mômen quán tính của hình nón

$$I = \frac{3}{10}mR^2$$

+ Mômen quán tính của quả cầu đặc

$$I = \frac{2}{5}mR^2$$





## §4. Mômen động lượng

### 1. Mômen động lượng ( $\vec{L}$ )

#### Ý nghĩa

*Đặc trưng cho trạng thái chuyển động về mặt động lực học của vật rắn quay xung quanh một trục*

#### Định nghĩa

Mômen động lượng của vật rắn là đại lượng có trị số bằng tích của vận tốc góc với mômen quán tính của vật rắn đối với trục quay.

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega} \quad (1)$$

$$\vec{L} = m(\vec{r} \times \vec{v}) = (\vec{r} \times \vec{P}) \quad (1.1)$$



## §4. Mômen động lượng

### 2. Định luật bảo toàn mômen động lượng

$$+ \text{Từ } \vec{M} = I \cdot \vec{\beta} \rightarrow \vec{M} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt} \text{ Hay } \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (2)$$

Khi mômen tổng hợp các ngoại lực tác dụng lên vật rắn bằng 0:

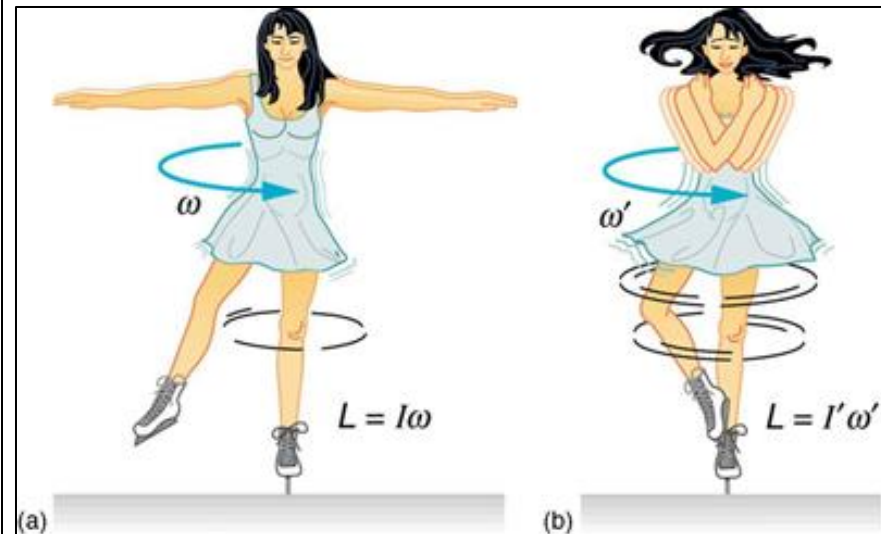
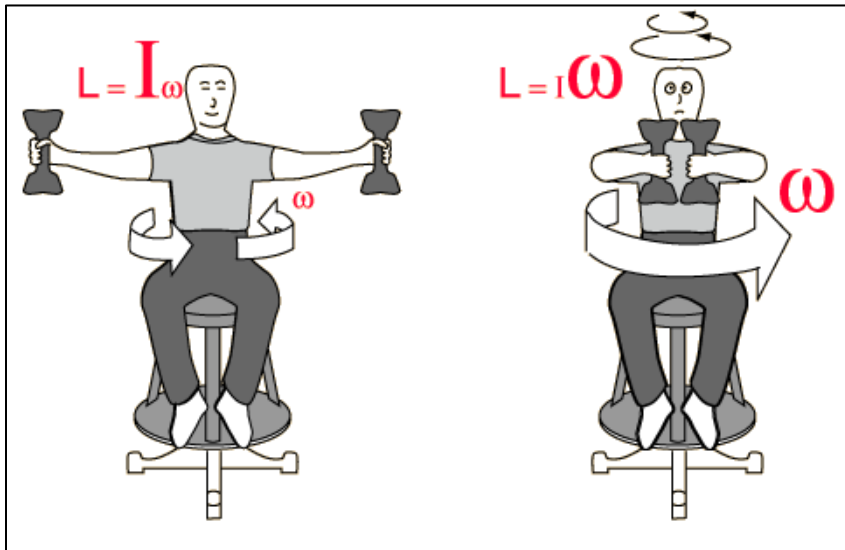
$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{L} = \text{const} \text{ Hay } I \cdot \vec{\omega} = \overline{\text{const}} \quad (3)$$

### Phát biểu

*Nếu mômen tổng hợp các ngoại lực tác dụng lên vật rắn bằng không thì mômen động lượng được bảo toàn*



# §4. Mômen động lượng





**HỌC VIỆN NÔNG NGHIỆP VIỆT NAM**  
**VIETNAM NATIONAL UNIVERSITY OF AGRICULTURE**

# Hết chương 3