Chương 3: Ánh xạ tuyến tính

Phan Quang Sáng

Học viện Nông nghiệp Việt Nam

Hà Nội, Ngày 8 tháng 11 năm 2017
http://www.vnua.edu.vn/khoa/fita/pqsang/

Nội dung chính

1. Các định nghĩa và tính chất
2. Ma trận của ánh xạ
3. Giá trị riêng và véc tơ riêng

Định nghĩa 1

Cho E và F là hai KGVT thực. Một ánh xạ $f : E \to F$ được gọi là ánh xạ tuyến tính nếu nó thỏa mãn:

(1) $f(u+v) = f(u) + f(v)$ với mọi $u, v \in E$;

(2) $f(ku) = kf(u)$ với mọi $u \in E$ và mọi $\alpha \in \mathbb{R}$.

Định nghĩa 1

Cho E và F là hai KGVT thực. Một ánh xạ $f : E \to F$ được gọi là ánh xạ tuyến tính nếu nó thỏa mãn:

(1) $f(u+v) = f(u) + f(v)$ với mọi $u, v \in E$;

(2) $f(ku) = kf(u)$ với mọi $u \in E$ và mọi $\alpha \in \mathbb{R}$.

Một số ví dụ: kiểm tra ánh xạ tuyến tính?

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (2x, -3x)$.

2) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = (x + y, 2x - 3y)$.

3) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $h(x, y) = (2x + y + 1, x - 3y)$.

4) $s : \mathbb{R}^2 \to Mat_{(2,2)}(\mathbb{R})$, $s(x, y) = \begin{bmatrix} x - y & x + 2y \\ 3y & -2x + 4y \end{bmatrix}$.

5) Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ cấp 3×2.

Khi đó ánh xạ, cũng ký hiệu bởi $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ cho bởi,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto y = A(x) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = Ax = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

là một AXTT.

Ví dụ: $x = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \mapsto y = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -7 \\ -6 \end{bmatrix}$

5) Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ cấp 3×2.

Khi đó ánh xạ, cũng ký hiệu bởi $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ cho bởi,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto y = A(x) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = Ax = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

là một AXTT.

Ví dụ: $x = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \mapsto y = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -7 \\ -6 \end{bmatrix}$

Một cách tổng quát, cho A là một ma trận cấp $m \times n$, khi đó ánh xạ $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ cho bởi

$$x \mapsto y = A(x) = Ax$$

là một Axtt, được gọi là Axtt tương ứng với ma trận A.

Các tính chất

Giả sử $f : E \to F$ là một Axtt. Khi đó,

1) Axtt biến véc tơ không thành véc tơ không: $f(\theta_E) = \theta_F$.
2) $f(\sum_{i=1}^n x_i u_i) = \sum_{i=1}^n x_i f(u_i)$

Ví dụ: $f(2u - 3v + 5w) = f(2u - 3v) + f(5w) =$
$f(2u) + f(-3v) + 5f(w) = 2f(u) - 3f(v) + 5f(w)$.

Các tính chất

Giả sử $f: E \to F$ là một Axtt. Khi đó,

1) Axtt biến véc tơ không thành véc tơ không: $f(\theta_E) = \theta_F$.
2) $f(\sum_{i=1}^n x_i u_i) = \sum_{i=1}^n x_i f(u_i)$

Ví dụ: $f(2u - 3v + 5w) = f(2u - 3v) + f(5w) = f(2u) + f(-3v) + 5f(w) = 2f(u) - 3f(v) + 5f(w)$.

Định lý 1

Ánh xạ tuyến tính $f: E \to F$ hoàn toàn được xác định bởi ảnh của một cơ sở của E.

Định nghĩa 2

Cho $f : E \to F$ là một Axtt.
Ảnh của f, ký hiệu là $Im(f)$, là tập hợp

$$f(E) = \{f(x) \in F : x \in E\}.$$

Nhân của f, ký hiệu là $Ker(f)$, là tập

$$Ker(f) = \{x \in E : f(x) = \theta_F\} = f^{-1}(\theta_F).$$

Định lý 2

(1) $Ker(f)$ là KGVT con của E.
(2) $Im(f)$ là KGVT con của F.

Định nghĩa 3

Hạng của f, ký hiệu là $r(f)$, là số chiều của $Im(f)$:

$$r(f) = Dim(Im(f)).$$

Định lý 3

Nếu E là KG hữu hạn chiều thì $Im(f)$ cũng là KGVT con hữu hạn chiều.

Giả sử $Dim(E) = n$ và $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một cơ sở của E. Khi đó

$$Im(f) = L(f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)),$$

$$r(f) = Dim(Im(f)) \leq n.$$

Định lý 4

Nếu E là KGVT n chiều thì

$$Dim(Ker(f)) + Dim(Im(f)) = n.$$

Một số ví dụ

Xác định ảnh và hạt nhân của các ánh xạ tuyến tính

1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x - 2y, 2x + 3y)$.

2) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(x, y, z) = (x + y + z, 2y - 3z)$.

3) $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $h(x, y, z) = (2x + z, x - y, 2x + y + z)$.

Ma trận của ánh xạ tuyến tính

Cho $f : E \to F$ là một Axtt. Giả sử $Dim(E) = n$, $Dim(F) = m$, và giả sử $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ là một cơ sở của E, $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ là một cơ sở của F. Khi đó

Định nghĩa 4

Ma trận

$$A = [\ [f(u_1)]_{\mathcal{V}}\ [f(u_2)]_{\mathcal{V}} \cdots [f(u_n)]_{\mathcal{V}}\ ]$$

được gọi là ma trận của Axtt f trong các cơ sở $(\mathcal{B}, \mathcal{V})$.

Ma trận của ánh xạ tuyến tính

Cho $f : E \to F$ là một Axtt. Giả sử $Dim(E) = n$, $Dim(F) = m$, và giả sử $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một cơ sở của E, $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ là một cơ sở của F. Khi đó

Định nghĩa 4

Ma trận

$$A = [\ [f(u_1)]_{\mathcal{V}}\ [f(u_2)]_{\mathcal{V}} \cdots [f(u_n)]_{\mathcal{V}}\ ]$$

được gọi là ma trận của Axtt f trong các cơ sở $(\mathcal{B}, \mathcal{V})$.

Khi đó nếu u có tọa độ cột trong cơ sở $\mathcal{B}$ là $[u]_{\mathcal{B}}$ thì $f(u)$ có tọa độ cột trong cơ sở $\mathcal{V}$ là

$$[f(u)]_{\mathcal{V}} = A[u]_{\mathcal{B}}.$$

Ma trận của ánh xạ tuyến tính

Cho $f : E \to F$ là một Axtt. Giả sử $Dim(E) = n$, $Dim(F) = m$, và giả sử $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một cơ sở của E, $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ là một cơ sở của F. Khi đó

Định nghĩa 4

Ma trận

$$A = [\ [f(u_1)]_{\mathcal{V}}\ [f(u_2)]_{\mathcal{V}} \cdots [f(u_n)]_{\mathcal{V}}\ ]$$

được gọi là ma trận của Axtt f trong các cơ sở $(\mathcal{B}, \mathcal{V})$.

Khi đó nếu u có tọa độ cột trong cơ sở $\mathcal{B}$ là $[u]_{\mathcal{B}}$ thì $f(u)$ có tọa độ cột trong cơ sở $\mathcal{V}$ là

$$[f(u)]_{\mathcal{V}} = A[u]_{\mathcal{B}}.$$

Chú ý : Nếu $F \equiv E$ và $\mathcal{V} \equiv \mathcal{B}$ thì ta nói A là ma trận của Axtt f trong cơ sở $\mathcal{B}$.

Ví dụ: Xác định ma trận của các Axtt

1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (2x + z, x - y, 2x + y + z)$ trong các cơ sở chính tắc.

2) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(x, y, z) = (x - y, x + y - 3z)$ trong các cơ sở $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ và $\mathcal{V} = \{(1, 1), (1, 2)\}$.

   Cho $u = (-1, 0, 3)$, xác định tọa độ của $f(u)$ trong cơ sở $\mathcal{V}$.

Ví dụ: Xác định ma trận của các Axtt

1) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (2x + z, x - y, 2x + y + z)$ trong các cơ sở chính tắc.

2) $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(x, y, z) = (x - y, x + y - 3z)$ trong các cơ sở $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ và $\mathcal{V} = \{(1, 1), (1, 2)\}$.

Cho $u = (-1, 0, 3)$, xác định tọa độ của $f(u)$ trong cơ sở $\mathcal{V}$. **(Gợi ý** $u = 2u_1 - 3u_2 + u_3$**)**

Ví dụ: Xác định ma trận của các Axtt

1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (2x + z, x - y, 2x + y + z)$ trong các cơ sở chính tắc.

2) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(x, y, z) = (x - y, x + y - 3z)$ trong các cơ sở $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ và $\mathcal{V} = \{(1, 1), (1, 2)\}$.

   Cho $u = (-1, 0, 3)$, xác định tọa độ của $f(u)$ trong cơ sở $\mathcal{V}$. **(Gợi ý** $u = 2u_1 - 3u_2 + u_3$**)**

3) $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $h(x, y, z) = (2x + z, x - y, 2x + y + z)$ trong cơ sở $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$.

Ma trận của ánh xạ tuyến tính trong hai cơ sở

Cho $f : E \to E$ là một Axtt. Giả sử $\mathcal{B}$ và $\mathcal{B}'$ là hai cơ sở của E. Giả sử A là ma trận của Axtt f trong cơ sở $\mathcal{B}$ và A' là ma trận f trong cơ sở $\mathcal{B}'$.

Mối liên hệ giữa A và A'?

Ma trận của ánh xạ tuyến tính trong hai cơ sở

Cho $f : E \to E$ là một Axtt. Giả sử $\mathcal{B}$ và $\mathcal{B}'$ là hai cơ sở của E. Giả sử A là ma trận của Axtt f trong cơ sở $\mathcal{B}$ và A' là ma trận f trong cơ sở $\mathcal{B}'$.

Mối liên hệ giữa A và A'?

Gọi P là ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$. Khi đó ta có kết quả:

$$A' = P^{-1}AP.$$

Ma trận của ánh xạ tuyến tính trong hai cơ sở

Cho $f : E \to E$ là một Axtt. Giả sử $\mathcal{B}$ và $\mathcal{B}'$ là hai cơ sở của E. Giả sử A là ma trận của Axtt f trong cơ sở $\mathcal{B}$ và A' là ma trận f trong cơ sở $\mathcal{B}'$.

Mối liên hệ giữa A và A'?

Gọi P là ma trận chuyển cơ sở từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$. Khi đó ta có kết quả:

$$A' = P^{-1}AP.$$

Hai ma trận A, A' thỏa mãn đẳng thức trên được gọi là **đồng dạng**.

Cho $f : E \to E$ là một Axtt của KGVT n chiều E.

Định nghĩa

Số thực λ được gọi là một giá trị riêng của f nếu có một véc tơ $u \neq \theta$ trong E sao cho $f(u) = \lambda u$.
Lúc đó u được gọi một véc tơ riêng của f tương ứng với giá trị riêng λ.