Chương 2: Không gian véc tơ trên trường số thực

Phan Quang Sáng

Học viện Nông nghiệp Việt Nam

Hà Nội, Ngày 2 tháng 11 năm 2017

http://www.vnua.edu.vn/khoa/fita/pqsang/

Nội dung chính

1. Không gian véc tơ
2. Độc lập tuyến tính
3. Không gian con
4. Cơ cở và số chiều của KGVT
   - KGVT hữu hạn chiều
   - Tọa độ của một véc tơ

Định nghĩa

Một tập hợp $E \neq \emptyset$ cùng với phép cộng, ký hiệu $(+)$, và nhân vô hướng, ký hiệu là $(.)$, trên E được gọi là một không gian véc tơ trên $\mathbb{R}$ nếu các tiên đề sau được thỏa mãn,

- Đối với phép cộng: với mọi $u, v, w \in E$
  1. $u + v \in E$;
  2. Tính giao hoán: $u + v = v + u$;
  3. Tính kết hợp: $(u + v) + w = u + (v + w)$;
  4. Có phần tử không: có một phần tử $\theta \in E$ sao cho $u + \theta = \theta + u = u$;
  5. Có đối xứng: có $u' \in E$ sao cho $u + u' = u' + u = \theta$, u' được ký hiệu là $-u$;

Định nghĩa

Một tập hợp $E \neq \emptyset$ cùng với phép cộng, ký hiệu $(+)$, và nhân vô hướng, ký hiệu là $(.)$, trên E được gọi là một không gian véc tơ trên $\mathbb{R}$ nếu các tiên đề sau được thỏa mãn,

- Đối với phép cộng: với mọi $u, v, w \in E$
  - (1) $u + v \in E$;
  - (2) Tính giao hoán: $u + v = v + u$;
  - (3) Tính kết hợp: $(u + v) + w = u + (v + w)$;
  - (4) Có phần tử không: có một phần tử $\theta \in E$ sao cho $u + \theta = \theta + u = u$;
  - (5) Có đối xứng: có $u' \in E$ sao cho $u + u' = u' + u = \theta$, u' được ký hiệu là $-u$;
- Đối với phép nhân vô hướng: mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
  - (1') $\alpha u \in E$;
  - (2') $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$;
  - (3') $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$;
  - (4') $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u = \beta(\alpha u)$;
  - (5') $1u = u$;

Một số ví dụ về KGVT

Không gian véc tơ thực $\mathbb{R}^n$

Không gian các ma trận cấp $m \times n$ trên $\mathbb{R}$, ký hiệu $Mat_{(m,n)}(\mathbb{R})$

Không gian các đa thức bậc không quá n, ký hiệu $P_n[x]$.

Một số tính chất

1) Véc tơ không và véc tơ đối là duy nhất
2) $0u = \theta$ với mọi u
3) $\alpha\theta = \theta$ với mọi α
4) $(-1)u = -u$
5) Nếu $\alpha u = \theta$ thì $\alpha = 0$ hoặc $u = \theta$. Từ đó,
   nếu $\alpha u = \beta u$, $u \neq \theta$ thì $\alpha = \beta$,
   nếu $\alpha u = \alpha v$, $\alpha \neq 0$ thì $u = \theta$.

Định nghĩa 1

Cho một hệ véc tơ $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$. Ta gọi một tổ hợp tuyến tính của U là một véc tơ dạng
$k_1u_1 + k_2u_2 + \ldots + k_nu_n := u$ với các $k_i \in \mathbb{R}$.

Định nghĩa 2

Một hệ véc tơ $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ trong KGVT E được gọi là độc lập tuyến tính nếu giả sử

$$k_1u_1 + k_2u_2 + \ldots + k_nu_n = \theta \Rightarrow k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0.$$

(giữa các véc tơ không có quan hệ tuyến tính)
Nếu không hệ U được gọi là phụ thuộc tuyến tính.

Một số ví dụ

Đặc biệt hệ chỉ có véc tơ không là PTTT

Một số tính chất

1) Mọi hệ con của một hệ ĐLTT thì ĐLTT. Từ đó, mọi hệ chứa một hệ con PTTT cũng PTTT. Đặc biệt một hệ chứa véc tơ θ là PTTT.

2) Nếu hệ U PTTT khi và chỉ khi có một véc tơ trong U là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ khác.

3) Một véc tơ biểu diễn tuyến tính theo một hệ ĐLTT thì cách biểu diễn là duy nhất. Cụ thể,
nếu $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ ĐLTT và
$u = k_1 u_1 + k_2 u_2 + \ldots + k_n u$ thì các k_i là duy nhất.

Hạng của một hệ véc tơ

Định lý 1

Cho $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, n_m\}$ là hai hệ ĐLTT của E. Nếu mọi véc tơ của U đều biểu thị tuyến tính theo các véc tơ của V thì $n \leq m$.

Định nghĩa 3

Hạng của hệ véc tơ $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ trong KGVT E là số véc tơ ĐLTT tối đại có trong U, ký hiệu là $r(U) := r$.

Chú ý:

1) Giả sử U_1 là một hệ con ĐLTT tối đại của U, khi đó mọi véc tơ trong U biểu diễn tuyến tính theo U_1.
2) Các hệ con ĐTTT tối đại của U đều có cùng số véc tơ $= r$.

Chứng minh: giả sử phản chứng $n > m$.
Ta có các bdtt $u_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i,\ j = \overline{1, n}$.
Giả sử $\sum_{j=1}^{n} k_j u_i = \theta$ thì phải có $\forall k_j = 0$.
Tuy nhiên đẳng thức trên tương đương với

$$\sum_{j=1}^{n} k_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i = \theta \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} k_j) v_i = \theta.$$

Do hệ V ĐLTT nên phải có (? có cần đk V đltt?)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} k_j = 0,\ i = \overline{1, m}$$

Tồn tại $k_j \neq 0$ thỏa mãn hpt trên vì nó có nghiệm không tầm thường do có m pt mà có n ẩn số và $m < n$.
Như vậy dẫn đến mâu thuẫn. Vậy $n \leq m$.

Ví dụ: tìm hạng của các hệ

$$U = \{(0,1),(1,0),(-1,2)\}$$

$$V = \{(1,0,0),(0,1,1),(-1,1,2),(2,1,3)\}$$

$$W = \{(1,0,0),(0,1,1),(-1,2,2),(1,1,1)\}$$

Ví dụ: tìm hạng của các hệ

$U = \{(0, 1), (1, 0), (-1, 2)\}$

$V = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (-1, 1, 2), (2, 1, 3)\}$

$W = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (-1, 2, 2), (1, 1, 1)\}$

Đáp số: $r(U) = 2$, $r(V) = 3$, $r(W) = 2$.

Định nghĩa 5

Cho E là một không gian véc tơ. Một tập con $S \neq \emptyset$ được gọi là KGVT con của E nếu S cùng với hai phép toán cộng và nhân vô hướng của E cũng lập thành một KGVT.

Ví dụ : E, $\{\theta\}$ là các KGVT con (tầm thường) của E.

Chú ý: mọi KGVT con đều phải chứa véc tơ không.

Định lý 2

Tập con $S \neq \emptyset$ là KGVT con của E khi và chỉ khi:

(1) $u + v \in S$ với mọi $u, v \in S$

(2) $ku \in S$ với mọi $u \in S$ và mọi $k \in \mathbb{R}$.

Định lý 3

(1) Giao của hai KGVT con là KGVT con, $S_1 \cap S_2$.

(2) Tổng của hai KGVT con là KGVT con, $S = S_1 + S_2$. Hơn nữa nếu $S_1 \cap S_2 = \{\theta\}$ thì ta nói S là tổng trực tiếp của S_1 và S_2, ký hiệu $S = S_1 \oplus S_2$.

Chú ý: $S_1 \cup S_2$ nói chung không phải KGVT con.
$S_1 + S_2$ là KGVT con nhỏ nhất chứa cả S_1 và S_2, tức là chứa $S_1 \cup S_2$.

Định lý 3

(1) Giao của hai KGVT con là KGVT con, $S_1 \cap S_2$.

(2) Tổng của hai KGVT con là KGVT con, $S = S_1 + S_2$.
Hơn nữa nếu $S_1 \cap S_2 = \{\theta\}$ thì ta nói S là tổng trực tiếp của S_1 và S_2, ký hiệu $S = S_1 \oplus S_2$.

Chú ý: $S_1 \cup S_2$ nói chung không phải KGVT con.
$S_1 + S_2$ là KGVT con nhỏ nhất chứa cả S_1 và S_2, tức là chứa $S_1 \cup S_2$.

Một số ví dụ

1) $S = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0\}$ là KGVT con của $\mathbb{R}^3$.

2) $L = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | -3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0, x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0\}$ là KGVT con của $\mathbb{R}^3$.

3) Tập hợp các nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

KG con sinh bởi một hệ véc tơ

Định nghĩa 6

Cho $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ là một hệ véc tơ trong E. KGVT con sinh bởi U là KGVT con nhỏ nhất của E chứa mọi véc tơ của U, ký hiệu là $L(U)$ hoặc $Span(U)$.
Chúng ta có thể chứng minh $L(U)$ là tập các tổ hợp tuyến tính của các véc tơ của U, gọi là bao tuyến tính:

$$L(U) = \{k_1u_1 + k_2u_2 + \dots + k_mu_m | k_i \in \mathbb{R}\}.$$

Nếu một KGVT con $S = L(U)$ thì ta cũng nói rằng U là một hệ sinh của S.

Thực tế $S = L(U)$ được sinh bởi một hệ con ĐLTT tối đại của U (sau này gọi là 1 cơ sở của S).

Định nghĩa 7

Cho E là một KGVT. Một hệ $\mathcal{B}$ các véc tơ của E được gọi là một cơ sở của E nếu hệ $\mathcal{B}$ ĐLTT và mọi véc tơ của E đều BDTT qua $\mathcal{B}$.

Như vậy E được sinh bởi $\mathcal{B}$: $E = L(\mathcal{B})$.

Định nghĩa 8

Nếu KGVT E có một cơ sở gồm n véc tơ thì mọi cơ sở khác của E cũng có n véc tơ. Số n được gọi là số chiều của E, ký hiệu $dim(E) = n$, và ta nói E là KGVT (hữu hạn) n chiều.

Một số ví dụ:
1) $\mathbb{R}^n$ là KGVT n chiều, vd cơ sở chính tắc
2) $P_n[x]$ là KGVT $n+1$ chiều
3) $Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ là KGVT $m \times n$ chiều.

Mệnh đề 1

Giả sử E là một KGVT n chiều. Khi đó:

1) Mọi hệ có nhiều hơn $n+1$ véc tơ đều PTTT. (Nói cách khác có tối đa n véc tơ ĐLTT) (suy ra từ Định lý 1)
2) Mọi hệ n véc tơ ĐLTT là cơ sở của E (và ngược lại).

Ví dụ: chứng minh một hệ sau là cơ sở

1) $U = \{(-1,2),(2,3)\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^2$.
2) $V = \{(-1,2,1),(2,3,1),(1,0,1)\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Mệnh đề 2

Giả sử U có m véc tơ, $r(U) = r$ $(r \leq m)$, và $S = L(U)$. Khi đó

1) Một hệ con r véc tơ ĐLTT (tối đại) của U là một cơ sở của S, $dim(S) = r$.
2) Mọi hệ sinh của S phải có tối thiểu r véc tơ.

Hệ quả

1) Đặc biệt khi E là một KGVT n chiều và $E = L(U)$...
2) Ta có thể bổ sung vào một hệ véc tơ ĐLTT để được một cơ sở. Như vậy KGVT hữu hạn chiều luôn có một cơ sở.

Định lý 4

Giả sử S_1 và S_2 là hai KGVT con của KGVT hữu hạn chiều E. Khi đó

$$dim(S_1 + S_2) = dim(S_1) + dim(S_2) - dim(S_1 \cap S_2).$$

Ví dụ: trong $\mathbb{R}^3$, cho các kgvt con xác định bởi
$S_1 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0\}$,
$S_2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | -x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

1) Tìm một cơ sở và số chiều của S_1, S_2.
2) Tìm cơ sở và số chiều của $S_1 \cap S_2$.
3) Chứng minh $S_1 + S_2 = \mathbb{R}^3$.

Giả sử E là KGVT n chiều và $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là một cơ sở. Khi đó mọi $u \in E$ được biểu diễn tuyến tính duy nhất theo các véc tơ của $\mathcal{B}$,

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i = x_1 u_1 + \ldots + x_n u_n.$$

Khi đó $u_{\mathcal{B}} = (x_1, \ldots, x_n)$ được gọi là tọa độ của véc tơ u trong cơ sở $\mathcal{B}$.
Người ta cũng gọi ma trận cột, ký hiệu $[u]_{\mathcal{B}}$,

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

là tọa độ cột của véc tơ u trong cơ sở $\mathcal{B}$.

Một số ví dụ

1) Tọa độ của véc tơ trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$.
2) $u = (-3, 4)$ trong cơ sở $U = \{(-1, 2), (2, 3)\}$.
3) $u = (3, 1, 2)$ trong cơ sở
   $V = \{(-1, 2, 1), (2, 3, 1), (1, 0, 1)\}$.

Lại nói về hạng của hệ véc tơ

Cho E là KGVT n chiều và $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ là một hệ véc tơ trong E.

Định lý 5

Giả sử $\mathcal{B}$ là một cơ sở tùy ý của E. Lập ma trận tạo bởi các tọa độ cột của các véc tơ của U trong cơ sở $\mathcal{B}$,

$$A = ([u_1]_{\mathcal{B}}\ [u_2]_{\mathcal{B}} \cdots [u_m]_{\mathcal{B}}).$$

Khi đó ta có kết quả

$$r(U) = r(A).$$

Ví dụ: tìm hạng của các hệ véc tơ

1) $U = \{(0,1), (1,0), (-1,2)\}$
2) $V = \{(1,0,0), (0,1,1), (-1,1,2), (2,1,3)\}$
3) $W = \{(1,0,0), (0,1,1), (-1,2,2), (1,1,1)\}$

Đổi cơ sở

Giả sử $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, $\mathcal{B}' = \{u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\}$ là hai cơ sở của KGVT n chiều E. Cho $u \in E$ và giả sử u tọa độ của nó trong hai cơ sở trên lần lượt là $[u]_{\mathcal{B}}$ và $[u]_{\mathcal{B}'}$.

Đổi cơ sở

Giả sử $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, $\mathcal{B}' = \{u'_1, u'_2, \ldots, u'_n\}$ là hai cơ sở của KGVT n chiều E. Cho $u \in E$ và giả sử u tọa độ của nó trong hai cơ sở trên lần lượt là $[u]_{\mathcal{B}}$ và $[u]_{\mathcal{B}'}$.

Hãy tìm mối liên hệ giữa $[u]_{\mathcal{B}}$ và $[u]_{\mathcal{B}'}$.

Đổi cơ sở

Giả sử $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, $\mathcal{B}' = \{u_1', u_2', \ldots, u_n'\}$ là hai cơ sở của KGVT n chiều E. Cho $u \in E$ và giả sử u tọa độ của nó trong hai cơ sở trên lần lượt là $[u]_{\mathcal{B}}$ và $[u]_{\mathcal{B}'}$.

Hãy tìm mối liên hệ giữa $[u]_{\mathcal{B}}$ và $[u]_{\mathcal{B}'}$.

Chúng ta định nghĩa *ma trận chuyển cơ sở* từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$

$$P = ([u_1']_{\mathcal{B}}\ [u_2']_{\mathcal{B}} \cdots [u_n']_{\mathcal{B}}).$$

Đổi cơ sở

Giả sử $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, $\mathcal{B}' = \{u'_1, u'_2, \dots, u'_n\}$ là hai cơ sở của KGVT n chiều E. Cho $u \in E$ và giả sử u tọa độ của nó trong hai cơ sở trên lần lượt là $[u]_{\mathcal{B}}$ và $[u]_{\mathcal{B}'}$.

Hãy tìm mối liên hệ giữa $[u]_{\mathcal{B}}$ và $[u]_{\mathcal{B}'}$.

Chúng ta định nghĩa *ma trận chuyển cơ sở* từ $\mathcal{B}$ sang $\mathcal{B}'$

$$P = ([u'_1]_{\mathcal{B}} \ [u'_2]_{\mathcal{B}} \cdots [u'_n]_{\mathcal{B}}).$$

Khi đó ta có liên hệ

$$[u]_{\mathcal{B}} = P[u]_{\mathcal{B}'},$$

và ngược lại

$$[u]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[u]_{\mathcal{B}}$$

với chú ý rằng ma trận P là khả nghịch vì $r(P) = r(\mathcal{B}') = n$ (theo ĐL 5).

Một số ví dụ tìm tọa độ của véc tơ

1) $u = (-3, 4)$ trong cơ sở chính tắc và trong cơ sở $U = \{(-1, 2), (2, 3)\}$.

2) $u = (-3, 1, 2)$ trong cơ sở $U = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ và trong cơ sở $V = \{(-1, 2, 1), (2, 3, 1), (1, -1, 1)\}$.

3) Chứng minh hệ các ma trận sau là cơ sở của $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$,
$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,
$M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,
Tìm tọa độ của $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ trong cơ sở trên.