Chương 1. Ma trận - Định thức- Hệ phương trình tuyến tính

Phan Quang Sáng

Bộ môn Toán- Khoa CNTT- VNUA

Hà Nội, Ngày 14 tháng 9 năm 2018

http://fita.vnua.edu.vn/vi/pqsang/
pqsang@vnua.edu.vn

Nội dung chính

1. 1.Ma trận
2. 2. Định thức ma trận
   - 2.1. Định nghĩa Định thức
   - 2.2. Các định lý và tính chất về định thức
   - 2.3. Hạng của ma trận
3. 3. Ma trận nghịch đảo
4. 4.Hệ phương trình tuyến tính
   - 4.1. Hệ Cramer
   - 4.2. Phương pháp khử Gauss

Định nghĩa

Một ma trận (thực) là một bảng các số thực được sắp xếp theo hàng và cột.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ma trận m hàng và n cột như trên được gọi là có cấp $m \times n$.
Các số a_{ij} được gọi là các phần tử của ma trận.
Ký hiệu $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, hoặc $A = [a_{ij}]$.

Ta nói hai ma trận bằng nhau nếu chúng có cùng cấp và cùng các phần tử tương ứng. nhau

Một số ma trận đặc biệt:

- Ma trận không, ký hiệu θ;

- Ma trận cột, hàng.

- Ma trận vuông: $m = n$;

- Ma trận tam giác trên, dưới;

- Ma trận đường chéo;

- Ma trận đơn vị I_n;

Chuyển vị

Chuyển vị của ma trận A cấp $m \times n$ là ma trận cấp $n \times m$, ký hiệu A^t, có được từ A bằng cách chuyển hàng thành cột và ngược lại.

Ví dụ:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}^t.$$

Phép cộng các ma trận cùng cấp

Ví dụ: Cho các ma trận sau

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$A + B$ là gì?

Phép cộng các ma trận cùng cấp

Ví dụ: Cho các ma trận sau

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$A + B$ là gì?

Định nghĩa

Giả sử $A = [a_{ij}]$ và $B = [b_{ij}]$ là hai ma trận cấp $m \times n$. Khi đó $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$.

Phép nhân một số với một ma trận

Ví dụ: 2C là gì?, với $C = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Phép nhân một số với một ma trận

Ví dụ: 2C là gì?, với $C = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Định nghĩa

Cho $A = [a_{ij}]_{m\times n}$. Khi đó với mỗi số thực k, ta định nghĩa $kA = [ka_{ij}]_{m\times n}$.

Phép nhân một số với một ma trận

Ví dụ: 2C là gì?, với $C = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Định nghĩa

Cho $A = [a_{ij}]_{m \times n}$. Khi đó với mỗi số thực k, ta định nghĩa $kA = [ka_{ij}]_{m \times n}$.

Thực hiện các phép tính $A + B + 2C$, $A - B$.

Phép nhân hai ma trận

Ví dụ:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} =$$

Phép nhân hai ma trận

Ví dụ:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -13 & 12 \end{bmatrix}.$$

Định nghĩa

Cho $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ và $B = [b_{ij}]_{n\times k}$. Khi đó định nghĩa $C = AB = [c_{ij}]_{m\times k}$, với

$$c_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} b_{\ell j}.$$

(c_{ij} là tích của hàng thứ i của ma trận trước A và cột thứ j của ma trận sau B)

Chú ý: $A\theta = \theta$, $\theta A = \theta$, $AI_n = I_n A = A$ nếu A vuông cấp n, phép nhân ma trận không giao hoán.

Một số tính chất:

1. $(A+B)C = AC + BC$, $A(B+C) = AB + AC$.
2. $(AB)C = A(BC)$.
3. $(AB)^t = B^t A^t$.

Cho ma trận A cấp n, khi đó định thức của ma trận A, ký hiệu là $det(A)$ hoặc $\mid A \mid$, được định nghĩa quy nạp theo $n = 1, 2, \ldots$.

Lấy ví dụ cụ thể...(khai triển theo hàng, cột khác nhau)

Cho ma trận A cấp n, khi đó định thức của ma trận A, ký hiệu là $det(A)$ hoặc $\mid A \mid$, được định nghĩa quy nạp theo $n = 1, 2, \ldots$.

Lấy ví dụ cụ thể...(khai triển theo hàng, cột khác nhau)

Áp dụng tính định thức sau:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Định lý

Định thức của ma trận chuyển vị bằng định thức của ma trận ban đầu,

$$|A^t| = |A|.$$

$\Rightarrow$ Một tính chất nào đó về định thức đúng theo hàng thì cũng đúng theo cột.

Định lý

Đổi chỗ hai dòng hoặc hai cột thì định thức đổi dấu.

Hệ quả

Định thức có hai dòng hoặc hai cột giống hệt nhau thì bằng 0.

Định lý

Ta có thể khai triển một định thức theo một hàng hoặc một cột bất kỳ,

$$| A |= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij}.$$

$$| A |= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{ij}.$$

Chú ý: nên khai triển định thức theo hàng hoặc cột có nhiều số 0.

Tính chất

Có thể đưa nhân tử chung của một hàng hoặc một cột ra ngoài định thức.

Tính chất này và hệ quả trước suy ra:

Hệ quả

Định thức có hai dòng hoặc hai cột tỷ lệ thì bằng 0.

Tính chất

Nếu một hàng (hoặc một cột) là tổng của hai hàng (hoặc hai cột) thì định thức có thể viết tổng của hai định thức tương ứng...

Hình vẽ minh họa...và ví dụ...

Một số tính chất mở rộng từ các tính chất trên

Tính chất

Định thức không thay đổi khi cộng vào một hàng (hoặc một cột) một số lần của các hàng khác (hoặc một cột).

Vẽ hình minh họa...

Định lý

Định thức của ma trận tích bằng tích các định thức,

$$det(AB) = det(A)det(B)$$

Một số chú ý:

1. Định thức của ma trận tam giác bằng tích các phần tử nằm trên đường chéo chính, đặc biệt $|I_n| = 1$.

2. Áp dụng các phép biến đổi cơ bản như trong các tính chất trên để đưa định thức về dạng tam giác

Ví dụ: tính định thức

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

Định nghĩa

Cho ma trận A cấp $m \times n$. Hạng của ma trận A, ký hiệu là $r(A)$, là cấp cao nhất có thể của một định thức con khác 0 lấy ra từ ma trận A.

Lấy ví dụ minh họa...

Một số chú ý:

1. $r(A) = r(A^t)$
2. Hạng của ma trận bậc thang bằng số hàng khác 0 của nó.
3. Các phép biến đổi sơ cấp không làm thay đổi hạng của ma trận
   $\Rightarrow$ Sử dụng chúng để đưa ma trận về dạng bậc thang

Ví dụ: tính hạng của ma trận sau

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 2 & -5 \\ -3 & 5 & 4 & 6 & -3 \\ 4 & -9 & -17 & -8 & 32 \end{bmatrix}$$

Định nghĩa

Ma trận A vuông cấp n được gọi là khả nghịch nếu có một ma trận B vuông cấp n sao cho $AB = BA = I_n$.
Khi đó ma trận B như trên là duy nhất và được gọi là ma trận nghịch đảo của A, ký hiệu là A^{-1}.

Ví dụ: cho $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, khi đó chúng ta có thể kiểm tra

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Định nghĩa

Ma trận A vuông cấp n được gọi là khả nghịch nếu có một ma trận B vuông cấp n sao cho $AB = BA = I_n$.
Khi đó ma trận B như trên là duy nhất và được gọi là ma trận nghịch đảo của A, ký hiệu là A^{-1}.

Ví dụ: cho $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, khi đó chúng ta có thể kiểm tra

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Một vài tính chất:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. Nếu A và B khả nghịch thì $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Định lý

Ma trận A khả nghịch khi và chỉ khi $det(A) \neq 0$. Khi đó

1. $$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)},$$

2. Ma trận nghịch đảo A^{-1} cho bởi công thức

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \widetilde{A}^t,$$

trong đó

$$\widetilde{A} = [(-1)^{i+j} D_{ij}],$$

và gọi là ma trận phụ hợp của A.

Áp dụng tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau (nếu có)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ví dụ:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 & = 1 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 & = 2 \end{cases}$$

Một hệ gồm m PTTT của n ẩn số có dạng:

$$\left\{\begin{array}{ll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{array}\right. \tag{1}$$

Đặt $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, gọi là ma trận hệ số; $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$,

$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$.

Dạng ma trận của hệ: $Ax = b$.

Một hệ gồm m PTTT của n ẩn số có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases} \tag{1}$$

Đặt $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, gọi là ma trận hệ số; $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$,

$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$.

Dạng ma trận của hệ: $Ax = b$.

Khi nào hệ có nghiệm và cách tìm nghiệm?

Định nghĩa và Định lý

Hệ (1) gọi là hệ Cramer nếu A là ma trận vuông $(m = n)$ và $det(A) \neq 0$. Khi đó hệ Cramer có nghiệm duy nhất

$$x = A^{-1}b.$$

Hơn nữa

$$x_j = \frac{det(A_j)}{det(A)}, j = 1, 2, \cdots, n,$$

trong đó A_j là ma trận có được từ A bằng cách thay cột thứ j bằng cột vế phải.

Ví dụ...

Đặt $A^{bs} = [A \mid b]$, gọi mà ma trận bổ sung của hệ (1).

Định lý

Hệ PT (1) có nghiệm khi và chỉ khi

$$r(A) = r(A^{bs}) := r.$$

Hơn nữa

1. Nếu $r =$ số ẩn $= n$ thì hệ có nghiệm duy nhất;
2. Nếu $r <$ số ẩn $= n$ thì hệ có vô số nghiệm: ta có thể chọn r ẩn chính và $n - r$ ẩn tùy ý.

Giải hpt bằng pp khử Gauss

Ví dụ 1: giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + 2z & = 4 \\ -2x + y + z & = 0 \\ 3x - 2y + 5z & = 6 \end{cases}$$

Ví dụ 2: giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + 2z & = 4 \\ -2x + y + z & = 0 \\ x + 4y + 7z & = 12 \end{cases}$$

Ví dụ 3: giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 2y - z + t & = 0 \\ 2x - 3y + z - 2t & = 5 \\ x + y - 2z - t & = -5 \end{cases}$$