Chương 2. Xác suất

Phan Quang Sáng

Bộ môn Toán- Khoa CNTT- VNUA

Hà Nội, Ngày 18 tháng 9 năm 2018
http://fita.vnua.edu.vn/vi/pqsang/
pqsang@vnua.edu.vn
https://fita.vnua.edu.vn/vi/bo-mon/bm-toan/cac-mon-giang-day/

Nội dung chính

Định nghĩa xác suất theo quan điểm đồng khả năng: Giả sử thực hiện một phép thử ngẫu nhiên và A là một Sk bất kỳ.

Giả sử phép thử có n kết quả đồng khả năng (hay còn gọi là các Sk sơ cấp cơ bản) và trong đó có n_A kết quả làm Sk A xảy ra (hay A bao gồm n_A kết quả).

Ta định nghĩa xác suất của sự kiện A là số

$$P(A) = \frac{n_A}{n}.$$

Một số ví dụ: xúc xắc, tung đồng tiền...

Định nghĩa xác suất theo tuần suất Tiến hành n phép thử với cùng điều kiện. Giả sử Sk A xuất hiện n_A lần, gọi là tần số.

Tỷ số
$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$$
được gọi là tần suất xuất hiện của Sk A.

Khi số phép thử n đủ lớn thì người ta chứng minh được $f_n(A)$ biến đổi rất nhỏ quanh một giá trị xác định (ĐL Bernoulli). Do đó người ta coi định nghĩa XS của Sk A là giá trị ổn định của tần suất khi số phép thử tăng vô hạn.
Ví du: xem trang 19.

Dưới đây $A, B...$ ký hiệu các sự kiện.

1) $0 \leq P(A) \leq 1, \; P(\phi) = 0, \; P(\Omega) = 1$

Dưới đây $A, B \ldots$ ký hiệu các sự kiện.

1) $0 \leq P(A) \leq 1,\ P(\phi) = 0,\ P(\Omega) = 1$

2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Dưới đây $A, B...$ ký hiệu các sự kiện.

1) $0 \leq P(A) \leq 1,\ P(\phi) = 0,\ P(\Omega) = 1$

2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Đặc biệt $A \cap B = \phi$ thì $P(A + B) = P(A) + P(B)$

Dưới đây $A, B\dots$ ký hiệu các sự kiện.

1) $0 \leq P(A) \leq 1,\ P(\phi) = 0,\ P(\Omega) = 1$

2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Đặc biệt $A \cap B = \phi$ thì $P(A + B) = P(A) + P(B)$

Hệ quả:

a) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

b) Nếu $A_1, A_2, \dots, A_n$ đôi một xung khắc thì

$$P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Dưới đây A, B... ký hiệu các sự kiện.

1) $0 \leq P(A) \leq 1,\ P(\phi) = 0,\ P(\Omega) = 1$

2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
   Đặc biệt $A \cap B = \phi$ thì $P(A + B) = P(A) + P(B)$

   Hệ quả:

   a) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
   b) Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ đôi một xung khắc thì

$$P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

3) Nếu $A \subseteq B$ thì $P(A) \leq P(B)$

Ví dụ: Từ hộp có 4 bi trắng và 3 bi đỏ, rút lần lượt 2 viên. Giả sử biết lần đầu rút bi trắng. Khi đó tính Xs lần thứ 2 rút được bi đỏ.

Ví dụ: Từ hộp có 4 bi trắng và 3 bi đỏ, rút lần lượt 2 viên. Giả sử biết lần đầu rút bi trắng. Khi đó tính Xs lần thứ 2 rút được bi đỏ.

Giả sử A, B là hai sự kiện của một phép thử. Xác suất của sự kiện A khi biết Sk B xảy ra được gọi là XS có điều kiện của A khi B xảy ra, ký hiệu $P(A/B)$.

Ví dụ: Từ hộp có 4 bi trắng và 3 bi đỏ, rút lần lượt 2 viên. Giả sử biết lần đầu rút bi trắng. Khi đó tính Xs lần thứ 2 rút được bi đỏ.

Giả sử A, B là hai sự kiện của một phép thử. Xác suất của sự kiện A khi biết Sk B xảy ra được gọi là XS có điều kiện của A khi B xảy ra, ký hiệu $P(A/B)$.

Công thức XS có điều kiện

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \tag{1}$$

Chứng minh Ta có $n_{A/B} = n_{AB}$ do đó

$$P(A/B) = \frac{n_{AB}}{n_B} = \frac{\frac{n_{AB}}{n}}{\frac{n_B}{n}} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Từ (1) suy ra

$$P(AB) = P(B)P(A/B)$$

Từ (1) suy ra

$$P(AB) = P(B)P(A/B) = P(A)P(B/A) \qquad (2)$$

Từ (1) suy ra

$$P(AB) = P(B)P(A/B) = P(A)P(B/A) \tag{2}$$

Tổng quát:

$$P(A_1A_2\dots A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)\dots P(A_n/A_1A_2\dots A_{n-1}) \tag{3}$$

Ví dụ: có 6 cây đậu hoa vàng, 2 cây đậu hoa trắng, lấy lần lượt 2 cây. Tính XS để cả 2 cây lấy ra là đậu hoa vàng.

Từ (1) suy ra

$$P(AB) = P(B)P(A/B) = P(A)P(B/A) \qquad (2)$$

Tổng quát:

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)\ldots P(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1}) \qquad (3)$$

Ví dụ: có 6 cây đậu hoa vàng, 2 cây đậu hoa trắng, lấy lần lượt 2 cây. Tính XS để cả 2 cây lấy ra là đậu hoa vàng.

Tinh XS cây thứ 2 là cây đậu hoa vàng?

Định nghĩa: Sự kiện A được gọi là ĐL với Sk B nếu

$$P(A/B) = P(A)$$

Định nghĩa: Sự kiện A được gọi là ĐL với Sk B nếu

$$P(A/B) = P(A)$$

Khi đó B cũng ĐL với Sk A: $P(B/A) = P(B)$.
Ta nói A và B là ĐL nhau và ĐK cần và đủ là

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Định nghĩa: Sự kiện A được gọi là ĐL với Sk B nếu

$$P(A/B) = P(A)$$

Khi đó B cũng ĐL với Sk A: $P(B/A) = P(B)$.
Ta nói A và B là ĐL nhau và ĐK cần và đủ là

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Định nghĩa: Hệ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ được gọi là ĐL hoàn toàn nếu mỗi Sk A_i đều ĐL với giao bất kỳ của 1 số các Sk khác.

Một số Vd: trang 25

Giả sử $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là một hệ đầy đủ các Sk của 1 phép thử và A là Sk bất kỳ.

$$P(A) = P(AA_1) + P(AA_2) + \ldots + P(AA_n) \quad (4)$$
$$= P(A_1)P(A/A_1) + P(A_2)P(A/A_2) + \ldots + P(A_n)P(A/A_n) \quad (5)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(A/A_i) \quad (6)$$

Ví du...

Giả sử $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là một hệ đầy đủ các Sk của 1 phép thử và A là Sk với $P(A) \neq 0$. Khi đó với mỗi j,

$$P(A_j/A) = \frac{P(A_jA)}{P(A)} = \frac{P(A_j)P(A/A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(A/A_i)} \qquad (7)$$

Ví du:

Lược đồ Bernoulli: tiến hành liên tiếp n phép thử như nhau, ĐL nhau và giả sử Xs của Sk A trong mỗi phép thử đều bằng p, $0 < p < 1$.

Gọi B_k là sự kiện A xuất hiện k lần, $0 \leq k \leq n$. Khi đó

$$P(B_k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \text{ với } q = 1 - p \tag{8}$$

Lược đồ Bernoulli: tiến hành liên tiếp n phép thử như nhau, ĐL nhau và giả sử Xs của Sk A trong mỗi phép thử đều bằng p, $0 < p < 1$.

Gọi B_k là sự kiện A xuất hiện k lần, $0 \leq k \leq n$. Khi đó

$$P(B_k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \text{ với } q = 1 - p \tag{8}$$

Số lần xuất hiện chắc chắn nhất: (k nào để XS $P(B_k)$ lớn nhất?)

Lược đồ Bernoulli: tiến hành liên tiếp n phép thử như nhau, ĐL nhau và giả sử Xs của Sk A trong mỗi phép thử đều bằng p, $0 < p < 1$.

Gọi B_k là sự kiện A xuất hiện k lần, $0 \leq k \leq n$. Khi đó

$$P(B_k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \text{ với } q = 1 - p \tag{8}$$

Số lần xuất hiện chắc chắn nhất: (k nào để XS $P(B_k)$ lớn nhất?)

1. Nếu $np - q$ không phải số nguyên thì số lần chắc chắn nhất là $k_0 = [np - q] + 1$
2. Nếu $np - q$ là số nguyên thì số lần chắc chắn nhất là $k_0 = np - q$ và $np - q + 1$

Ví dụ...