KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
BỘ MÔN TOÁN

Đề số: **04**
Ngày thi: 02/6/2018

ĐỀ THI **KẾT THÚC** HỌC PHẦN

Tên Học phần: **Đại số tuyến tính**
Thời gian làm bài: 75 phút
Loại đề thi: **Tự luận**

Câu I (3.5 điểm) Cho các ma trận $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ m & 2m+1 & 4m\\ 2 & 7 & 9\end{bmatrix}; B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 5 & 7\\ 4 & -2 & 7 & 5\\ 2 & -1 & 2 & a\end{bmatrix}; C=\begin{bmatrix}4\\ 4\\ 8\end{bmatrix}$.

1. (1.25 đ) Tìm m để ma trận A khả nghịch. Từ đó tính $\det(A^{-1})$.
2. (1.25 đ) Với $m=1$, tìm ma trận X sao cho $A.X=C$
3. (1.0 đ) Tìm a sao cho ma trận B có hạng bằng 2.

Câu II (2.5 điểm) Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^3$ cho tập $S=\left\{u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \middle| -x+2y+z=0\right\}$.

1. (1.0 đ) Chứng minh rằng S là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^3$.
2. (1.5 đ) Tìm một cơ sở và số chiều của không gian vectơ con S.

Câu III (1.0 điểm) Cho $U=\{u_1=(2,0,3); u_2=(0,2,-1); u_3=(1,2,3)\}$ là hệ vectơ trong không gian vectơ $\mathbb{R}^3$. Hỏi U có là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ không? Nếu có, hãy tìm tọa độ của vectơ $v=(5,-2,1)$ trong cơ sở trên.

Câu IV (3.0 điểm) Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x,y)=(x+2y,2x+y),\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$$

1. (1.5 đ) Tìm $Ker f$, $\operatorname{Im} f$ và ma trận A của ánh xạ tuyến tính f trong cơ sở chính tắc $E=\{e_1=(1,0),e_2=(0,1)\}$ của $\mathbb{R}^2$
2. (1.5 đ) Tìm giá trị riêng và vectơ riêng của ma trận A. Ma trận A có chéo hóa được không? Nếu có hãy tìm ma trận P làm chéo hóa A.

.... HẾT ....

Ghi chú: + Cán bộ coi thi không phải giải thích gì thêm
+ Sinh viên không được sử dụng tài liệu

Cán bộ ra đề
Ngọc Minh Châu

Duyệt đề
Phạm Việt Nga

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
BỘ MÔN TOÁN

Đề số: **05**
Ngày thi: 02/6/2018

ĐỀ THI **KẾT THÚC** HỌC PHẦN

Tên Học phần: **Đại số tuyến tính**
Thời gian làm bài: 75 phút
Loại đề thi: **Tự luận**

Câu I (3.5 điểm) Cho các ma trận $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & m\\ 2 & 7 & 2m+1\\ 3 & 9 & 4m\end{bmatrix}; B=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1 & 5\\ 4 & -1 & 3 & 2\\ 2 & -4 & 4 & \lambda\end{bmatrix}; C=\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 1\end{bmatrix}$

1. (1.25 đ) Tìm m để ma trận A khả nghịch. Tính $\det(2A)$.
2. (1.25 đ) Với $m=1$, tìm ma trận X sao cho $A.X=C$
3. (1.0 đ) Tìm λ sao cho ma trận B có hạng bằng 2.

Câu II (2.5 điểm) Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^3$ cho tập $V=\left\{u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \middle| 4x-y+2z=0\right\}$.

1. (1.0 đ) Chứng minh rằng V là không gian vectơ con của $\mathbb{R}^3$.
2. (1.5 đ) Tìm một cơ sở và số chiều của không gian vectơ con V

Câu III (1.0 điểm) Cho $U=\{u_1=(4,0,1); u_2=(2,0,1); u_3=(1,2,1)\}$ là hệ vectơ trong không gian vectơ $\mathbb{R}^3$. Hỏi U có là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ không? Nếu có, hãy tìm tọa độ của vectơ $v=(5,-2,1)$ trong cơ sở trên.

Câu IV (3.0 điểm) Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x,y)=(x+4y,x-2y),\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$$

1. (1.5 đ) Tìm $Kerf$, $\operatorname{Im} f$ và ma trận A của ánh xạ tuyến tính f trong cơ sở chính tắc $E=\{e_1=(1,0),e_2=(0,1)\}$ của $\mathbb{R}^2$.
2. (1.5 đ) Tìm giá trị riêng và vectơ riêng của ma trận A. Ma trận A có chéo hóa được không? Nếu có hãy tìm ma trận P làm chéo hóa A.

.... HẾT ....

Ghi chú: + Cán bộ coi thi không phải giải thích gì thêm
+ Sinh viên không được sử dụng tài liệu

Cán bộ ra đề
Ngọc Minh Châu

Duyệt đề
Phạm Việt Nga

<table>
<tr><td>KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
BỘ MÔN TOÁN</td><td>**ĐÁP ÁN ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC PHẦN**
Tên học phần: Đại số tuyến tính
Đáp án đề thi số: 04</td></tr>
</table>

(Ngày thi: 02/6/2018)

Ghi chú: Mọi cách giải khác đáp án mà đúng đều được đủ điểm.

<table>
<tr><th>Câu</th><th></th><th>Đáp án vắn tắt</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td rowspan="11">**I**
3.5đ</td><td rowspan="3">1</td><td>$\det A = 3(1-m)$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>Ma trận A khả nghịch $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>$\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} = \dfrac{1}{3(1-m)}$</td><td>0.25
0.25</td></tr>
<tr><td rowspan="6">2</td><td>Mt A cỡ 3×3, mt C cỡ 3×1 nên mt X cỡ 3×1, g/s
$X = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^t$</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>$A.X = C \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+3z=4 \\ x+3y+4z=4 \\ 2x+7y+9z=8 \end{cases}$. Có $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 7 & 9 & 8 \end{array}\right)$</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>$A \xrightarrow[(-2H_1)+H_3]{(-H_1)+H_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\cdots} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>Hệ t/đ : $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-z+4 \\ y=-z \end{cases}$.</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>Vậy $X = \begin{bmatrix} -z+4 & -z & z \end{bmatrix}^t, z \in \mathbb{R}$</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td>$B \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 3 & 7-a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -2-a \end{bmatrix}$</td><td>0.25
0.25</td></tr>
<tr><td>$r(B) = 2 \Leftrightarrow -2-a=0 \Leftrightarrow a=-2$. Vậy $a=-2$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td rowspan="6">**II**
2.5đ</td><td rowspan="3">1</td><td>Đ/k $-x+2y+z=0 \Leftrightarrow x=2y+z$
$\Rightarrow S = \left\{u=(2y+z,y,z) \mid y,z \in \mathbb{R}\right\}$</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>$\Rightarrow S = \left\{u = y(2,1,0)+z(1,0,1) \mid y,z \in \mathbb{R}\right\}$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>$S = Span\{u_1=(2,1,0); u_2=(1,0,1)\}$ (1)
$\Rightarrow S$ là kgvt con của $\mathbb{R}^3$.</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2</td><td>(1) $\Rightarrow U = \{u_1, u_2\}$ là hệ sinh của S</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>U gồm 2 vectơ khác không và không tỉ lệ nên đltt (2)
Từ (1) & (2) $\Rightarrow$ $U = \{u_1, u_2\}$ là một cơ sở của S</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>Vì cơ sở U của S gồm 2 vectơ $\Rightarrow$ dimS =2</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">**III**
1.0đ</td><td rowspan="2">1</td><td>Ta có $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \Rightarrow U$ đltt
Mà $U \subset \mathbb{R}^3$ và $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ nên U là 1 cơ sở của $\mathbb{R}^3$</td><td>0.25
0.25</td></tr>
<tr><td>Giả sử $\alpha = k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3$
$\Leftrightarrow (5,-2,1) = k_1(2,0,3) + k_2(0,2,-1) + k_3(1,2,3)$
$\Rightarrow \begin{cases} 2k_1 + k_3 = 5 \\ 2k_2 + 2k_3 = -2 \\ 3k_1 - k_2 + 3k_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 4 \\ k_2 = 2 \\ k_3 = -3 \end{cases} \Rightarrow \alpha_U = (4,2,-3)$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td rowspan="7">**IV**
3.0đ</td><td rowspan="3">1</td><td>G/s $u=(x,y) \in Kerf \Leftrightarrow f(x,y) = \theta$
$\Leftrightarrow (x+2y, 2x+y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=0 \\ 2x+y=0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow x=y=0 \Rightarrow Kerf = \{\theta=(0,0)\}$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>Vì $\dim \operatorname{Im} f + \dim Kerf = \dim \mathrm{R}^2 = 2$
$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = 2$.
Mà $\operatorname{Im} f \subset R^2$ & $\dim \mathrm{R}^2 = 2 \Rightarrow \mathrm{Imf} \equiv \mathrm{R}^2$</td><td>0.25
0.25</td></tr>
<tr><td>Ta có $\begin{cases} f(e_1) = (1,2) = e_1 + 2e_2 \\ f(e_2) = (2,1) = 2e_1 + e_2 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$</td><td>0.25
0.25</td></tr>
<tr><td rowspan="4">2</td><td>$\lvert A - \lambda I \rvert = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2 - 2^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \vee \lambda = 3$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>Vtr ứng với gtr $\lambda_1 = -1$ là $u = \begin{bmatrix} -y & y \end{bmatrix}^t, y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>Vtr ứng với gtr $\lambda_2 = 3$ là $u = \begin{bmatrix} x & x \end{bmatrix}^t, x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>Mt A chéo hóa được vì A có đủ 2 vectơ riêng đltt
Ma trận P làm chéo hóa A là $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$</td><td>0.25
0.25</td></tr>
</table>

Cán bộ ra đề: *Ngọc Minh Châu* Duyệt đáp án

Cán bộ soạn đáp án: *Ngọc Minh Châu*

<table>
<tr><td>KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
BỘ MÔN TOÁN</td><td>**ĐÁP ÁN ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC PHẦN**
Tên học phần: Đại số tuyến tính
Đáp án đề thi số: 05</td></tr>
</table>

(Ngày thi: 02/6/2018)

Ghi chú: Mọi cách giải khác đáp án mà đúng đều được đủ điểm.

<table>
<tr><th>Câu</th><th></th><th>Đáp án vắn tắt</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td rowspan="11"></td><td rowspan="3">1</td><td>$\det A = 3(m-1)$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>Ma trận A khả nghịch $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>$\det(2A) = 2^3 \det A = 24(m-1)$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td rowspan="5">2</td><td>Mt A cỡ 3×3, mt C cỡ 3×1 nên mt X cỡ 3×1, g/s $X = [\ x \quad y \quad z\ ]^t$</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>$AX = C \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z=2 \\ 2x+7y+3z=-1. \\ 3x+9y+4z=1 \end{cases}$ $\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 3 & -1 \\ 3 & 9 & 4 & 1 \end{array}\right]$</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>$\bar{A} \xrightarrow{\cdot\cdot} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 1 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow{\cdot\cdot} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$</td><td>0.25
0.25</td></tr>
<tr><td>Hệ t/đ : $\begin{cases} x+2y+z=2 \\ 3y+z=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+7 \\ z=-3y-5 \end{cases}$</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>Vậy $X = [\ y+7 \quad y \quad -3y-5\ ]^t, y \in \mathbb{R}$</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td>$B \to \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 5 & -8 \\ 0 & -7 & 5 & \lambda-5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+3 \end{bmatrix}$</td><td>0.25
0.25</td></tr>
<tr><td>$r(B) = 2 \Leftrightarrow \lambda+3=0 \Leftrightarrow \lambda=-3$. Vậy $\lambda=-3$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="6">**II**
2.5đ</td><td rowspan="3">1</td><td>Đ/k $4x-y+2z=0 \Leftrightarrow y=4x+2z$
$\Rightarrow V = \{u=(x,4x+2z,z) \mid x,z \in \mathbb{R}\}$</td><td>0.25
0.25</td></tr>
<tr><td>$V = \{u = x(1,4,0)+z(0,2,1) \mid x,z \in \mathbb{R}\}$</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>$V = span\{u_1=(1,4,0), u_2=(0,2,1)\}$ (1)
$\Rightarrow V$ là kgvt con của $\mathbb{R}^3$.</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2</td><td>(1) $\Rightarrow U = \{u_1,u_2\}$ là 1 hệ sinh của V</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>U gồm 2 vectơ khác không và không tỉ lệ nên đltt (2)
Từ (1) & (2) $\Rightarrow$ $U = \{u_1,u_2\}$ là một cơ sở của V</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>Vì cơ sở U của V gồm 2 vectơ $\Rightarrow$ dimV=2</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">**III**
1.0đ</td><td rowspan="2">1</td><td>Ta có $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow U$ đltt
Mà $U \subset \mathbb{R}^3$ và $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ nên U là 1 cơ sở của $\mathbb{R}^3$</td><td>0.25
0.25</td></tr>
<tr><td>Giả sử $\alpha = k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3$
$\Leftrightarrow (5,-2,1) = k_1(4,0,1) + k_2(2,0,1) + k_3(1,2,1)$
$\Rightarrow \begin{cases} 4k_1+2k_2+k_3=5 \\ 2k_3=-2 \\ k_1+k_2+k_3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1=1 \\ k_2=1 \\ k_3=-1 \end{cases} \Rightarrow \alpha_U = (1,1,-1)$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td rowspan="7">**IV**
3.0đ</td><td rowspan="3">1</td><td>G/s $u=(x,y) \in Kerf \Leftrightarrow f(x,y) = \theta$
$\Leftrightarrow (x+4y, x-2y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x+4y=0 \\ x-2y=0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow x=y=0 \Rightarrow Kerf = \{\theta = (0,0)\}$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>Vì $\dim \mathrm{Im} f + \dim Kerf = \dim \mathrm{R}^2 = 2$
$\Rightarrow \dim \mathrm{Im} f = 2.$
Mà $\mathrm{Im} f \subset R^2$ & $\dim \mathrm{R}^2 = 2 \Rightarrow \mathrm{Imf} \equiv \mathrm{R}^2$</td><td>0.25
0.25</td></tr>
<tr><td>Ta có $\begin{cases} f(e_1) = (1,1) = e_1+e_2 \\ f(e_2) = (4,-2) = 4e_1 - 2e_2 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$</td><td>0.25
0.25</td></tr>
<tr><td rowspan="4">2</td><td>$\lvert A-\lambda I \rvert = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \vee \lambda = -3$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>Vtr ứng với gtr $\lambda_1 = 2$ là $u = [\ 4y \quad y\ ]^t, y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>Vtr ứng với gtr $\lambda_2 = -3$ là $u = [\ x \quad -x\ ]^t, x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>Mt A chéo hóa được vì A có đủ 2 vectơ riêng đltt
Ma trận P làm chéo hóa A là $P = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$</td><td>0.25
0.25</td></tr>
</table>

Cán bộ ra đề: *Ngọc Minh Châu* Duyệt đáp án

Cán bộ soạn đáp án: *Ngọc Minh Châu*