Chương 2. Phép tính vi phân hàm một biến

Phan Quang Sáng

Bộ môn Toán- Khoa CNTT- VNUA

Hà Nội, Ngày 1 tháng 10 năm 2018

http://fita.vnua.edu.vn/vi/pqsang/
pqsang@vnua.edu.vn

Nội dung chính

1. Đạo hàm của hàm số
   - 1.1. Nhắc lại về hàm số
   - 1.2. Định nghĩa và các quy tắc của đạo hàm
2. Đạo hàm cấp cao và vi phân
3. Ứng dụng của đạo hàm

- Định nghĩa hàm số
- Hàm số ngược và các hàm lượng giác ngược
- Các hàm số sơ cấp cơ bản

Ví dụ: bài toán vận tốc trung bình và vận tốc tức thời

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trong một lân cận của điểm $x = c$. Với $h \neq 0$ đủ nhỏ, đăt

$$\Delta x = (c + h) - c = h, \ \Delta f = f(c + h) - f(c),$$

và lập tỷ số

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(c + h) - f(c)}{h}.$$

Chú ý: tỷ số trên thể hiện tốc độ biến thiên trung bình của hàm số trên $[c; c + h]$.

Nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

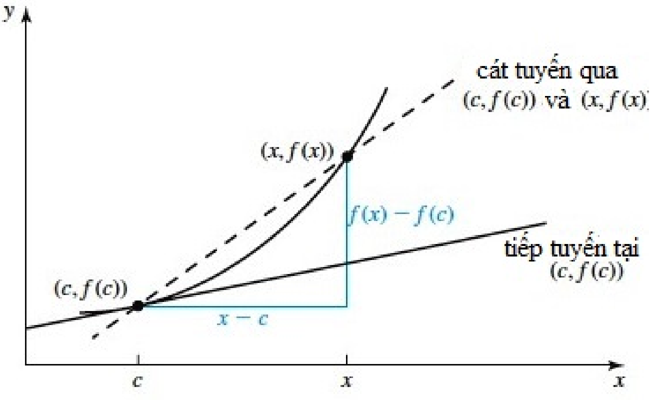
thì ta nói hàm số có đạo hàm (hay khả vi) tại c và giới hạn đó được goi là đạo hàm của hàm số f tại điểm c, ký hiệu là $f'(c)$ hoặc $\frac{df}{dx}(c)$.

Chú ý: $f'(c)$ thể hiện tốc độ biến thiên tức thời của hàm số tại điểm $x = c$.

Ví dụ 1: tính đạo hàm của hàm số $y = x^2$ tại $x = 2$ và tại $x = x_0 \in \mathbb{R}$ bất kỳ.
Ví dụ 2: tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{x}$ tại mỗi $x \neq 0$.

Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = c$ thì đạo hàm $f'(c)$ là hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm $(c; f(c))$.



Khi đó PT tiếp tuyến là

$$y = f'(c)(x - c) + f(c).$$

Đạo hàm của các hàm số sơ cấp cơ bản

- $(x^\alpha)' = \alpha(x^{\alpha-1})$, với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$;
  Ví dụ: $\sqrt{x}' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $(\dfrac{1}{x})' = -\dfrac{1}{x^2}$.
- $(e^x)' = e^x$;
  $(a^x)' = a^x \ln a$, với $0 < a \neq 1$;
- $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;
  $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, với $0 < a \neq 1$;
- $(\sin x)' = \cos x$;
- $(\cos x)' = -\sin x$;
- $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
- $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

Các quy tắc cơ bản của đạo hàm

Giả sử $u(x), v(x)$ là hai hàm số khả vi, khi đó:

$$(u+v)' = u' + v';$$

$$(ku)' = ku', k \in \mathbb{R};$$

$$(uv)' = u'v + uv';$$

Với $v(x) \neq 0$,

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Ví dụ...

Đạo hàm của hàm số ngược

Định lý

Nếu trong một lân cận của $x = c$ hàm số $y = f(x)$ có hàm số ngược f^{-1} và có đạo hàm $f'(c) \neq 0$ thì hàm số ngược f^{-1} cũng có đạo hàm tại $f(c)$ và

$$[f^{-1}]'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}.$$

Ví dụ...

- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$;

Đạo hàm của hàm số hợp

Ví dụ: xét đạo hàm của hàm số $y = (x^2 + 1)^3$.
(sau đó $y = (x^2 + 1)^{100}$)

Định lý

Nếu hàm số $u = u(x)$ khả vi tai x_0 và hàm số $f = f(u)$ khả vi tại $u_0 = u(x_0)$, thì hàm số hợp $f \circ u$ cũng khả vi x_0, và

$$(f \circ u)'(x_0) = f'(u_0)u'(x_0).$$

Biểu thức trên còn có thể viết

$$\frac{d}{dx}[f(u(x))] = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}.$$

Một số ví dụ...

Đạo hàm của một số hàm số sơ cấp

Cho $u = u(x)$ là hàm số khả vi của x. Khi đó:

- $(u^\alpha)' = \alpha(u^{\alpha-1})u'$, với $\alpha \in \mathbb{R}$;
- $(e^u)' = e^u u'$;
  $(a^u)' = (\ln a)a^u u'$, với $0 < a \neq 1$;
- $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$;
  $(\ln u)' = \frac{u'}{(\ln a)u}$;
- $(\sin u)' = u' \cos u$;
  $(\cos u)' = -u' \sin u$;
- $(\tan u)' = \frac{1}{\cos^2 x} u'$;
  $(\cot u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} u'$;

Tính khả vi và liên tục

Mệnh đề

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = c$ thì hàm số cũng liên tục tại điểm đó.

Tính khả vi và liên tục

Mệnh đề

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = c$ thì hàm số cũng liên tục tại điểm đó.

Phản ví dụ: $f(x) = |x|$.

Đạo hàm cấp cao

Nếu các hàm đạo hàm vẫn khả vi thì ta có thể tiếp tục lấy đạo hàm và thu được các đạo hàm cấp cao hơn: đạo hàm cấp 2, đạo hàm cấp 3...

Ký hiệu: $f', f'', f'''..., f^{(n)}...$

Ví dụ 1: tính đạo hàm các cấp của hàm số

$$y = \frac{1}{2x+1}.$$

Ví dụ 2: tính đạo hàm các cấp của hàm số

$$y = \sqrt{2x+1}.$$

Vi phân của hàm số

(Lấy ví dụ cụ thể biểu diễn Δf theo Δx)

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(c)$ tại điểm c. Ta có,

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}, \text{ hay } \lim_{\Delta x \to 0} [\frac{\Delta f}{\Delta x} - f'(c)] = 0.$$

Đặt hàm $\theta(\Delta x) = \dfrac{\Delta f}{\Delta x} - f'(c)$ thì $\lim_{\Delta x \to 0} \theta(\Delta x) = 0.$

Ta có thể biểu diễn

$$\Delta f = f'(c) \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \theta(\Delta x).$$

Số hạng $\Delta x \cdot \theta(\Delta x)$ là một phần vô cùng bé (so với Δx) của Δf. Như vậy

$$\Delta f \approx f'(c) \cdot \Delta x. \tag{1}$$

Đặt $df(c) = f'(c) \cdot \Delta x$ và gọi là vi phân của hàm số tại điểm $x = c$.

Đặc biệt ta có $dx = \Delta x$ nên vi phân sẽ được viết dưới dạng

$$df(c) = f'(c) \cdot dx \tag{2}$$

Ví dụ: tính vi phân của hàm số $y = x^3$ tai điểm $x = 2$ và sau đó tại một điểm x bất kỳ.

Một cách tổng quát ta viết

$$df = f'(x) \cdot dx \tag{3}$$

Đặc biệt ta có $dx = \Delta x$ nên vi phân sẽ được viết dưới dạng

$$df(c) = f'(c) \cdot dx \tag{2}$$

Ví dụ: tính vi phân của hàm số $y = x^3$ tai điểm $x = 2$ và sau đó tại một điểm x bất kỳ.

Một cách tổng quát ta viết

$$df = f'(x) \cdot dx \tag{3}$$

Ứng dụng tính gần đúng giá trị của hàm số
Biểu diễn (1) suy ra

$$f(c + \Delta x) \approx f(c) + f'(c) \cdot \Delta x. \tag{4}$$

Công thức trên cho phép tính xấp xỷ giá trị của hàm số tại các điểm ở gần c.
Ví dụ: tính gần đúng giá trị $\sqrt[5]{1,001}$.

Đạo hàm có rất nhiều ứng dụng trong các bài toán về quỹ đạo trong nhiều lĩnh vực (tăng, giảm; cực trị, min, max; lồi, lõm, điểm uốn...)

Quy tắc L'Hospital

Quy tắc dùng tính các giới hạn dạng **vô định** $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$.

Quy tắc L'H

Giả sử f và g là hai hàm số khả vi ở gần một điểm a sao cho

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0 \text{ (hoặc } \infty\text{)}, \text{ và}$$

$$g'(x) \neq 0 \text{ với } x \text{ ở gần } a.$$

Nếu tồn tại giới hạn $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ thì $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Quy tắc cũng đúng trong trường hợp $a = \pm\infty$.

Một số ví dụ

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1;$$

$$\lim_{u\to 0} \frac{ln(u+1)}{u} = 1;$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x};$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{x};$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}.$$

Một số dạng giới hạn vô định khác: $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0^∞, ∞^0, 0^0, 1^∞.