Chương 3. Tích phân

Phan Quang Sáng

Bộ môn Toán- Khoa CNTT- VNUA

Hà Nội, Ngày 19 tháng 10 năm 2018
http://fita.vnua.edu.vn/vi/pqsang/
pqsang@vnua.edu.vn

Nội dung chính

1. Tích phân bất định
   - 1.1. Định nghĩa và tính chất của Tích phân BĐ
   - 1.2. Hai phương pháp tính tích phân
   - 1.3. Tích phân các phân thức hữu tỷ
2. Tích phân xác định
   - 2.1. Định nghĩa TPXĐ
   - Ý nghĩa hình học của tích phân xác định
   - Tính chất của tích phân xác định (tích phân Riemann
   - 2.3. Liên hệ giữa TPXĐ và nguyên hàm
   - 2.4. Một số ứng dụng của TPXĐ
3. Tích phân suy rộng

Chúng ta biết $(\frac{1}{3}x^3 + \sin x)' = x^2 + \cos x$.

Chúng ta biết $(\frac{1}{3}x^3 + \sin x)' = x^2 + \cos x$.
Khi đó ta nói $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \sin x$ là một **nguyên hàm** của $f(x) = x^2 + \cos x$.

Chúng ta biết $(\frac{1}{3}x^3 + \sin x)' = x^2 + \cos x$.
Khi đó ta nói $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \sin x$ là một **nguyên hàm** của $f(x) = x^2 + \cos x$.

Định nghĩa

Một hàm số F được gọi là một nguyên hàm của hàm f trên khoảng (a, b) nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in (a, b)$.

Tuy nhiên, $f(x)$ có thể có nhiều NH,

Chúng ta biết $(\frac{1}{3}x^3 + \sin x)' = x^2 + \cos x$.
Khi đó ta nói $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \sin x$ là một **nguyên hàm** của $f(x) = x^2 + \cos x$.

Định nghĩa

Một hàm số F được gọi là một nguyên hàm của hàm f trên khoảng (a, b) nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in (a, b)$.

Tuy nhiên, $f(x)$ có thể có nhiều NH, $\frac{1}{3}x^3 + \sin x + C$, với bất kỳ hằng số $C \in \mathbb{R}$, vì

$$(\frac{1}{3}x^3 + \sin x + C)' = x^2 + \cos x.$$

Chúng ta biết $(\frac{1}{3}x^3 + \sin x)' = x^2 + \cos x$.
Khi đó ta nói $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \sin x$ là một **nguyên hàm** của $f(x) = x^2 + \cos x$.

Định nghĩa

Một hàm số F được gọi là một nguyên hàm của hàm f trên khoảng (a, b) nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in (a, b)$.

Tuy nhiên, $f(x)$ có thể có nhiều NH, $\frac{1}{3}x^3 + \sin x + C$, với bất kỳ hằng số $C \in \mathbb{R}$, vì

$$(\frac{1}{3}x^3 + \sin x + C)' = x^2 + \cos x.$$

Đó có phải là tất cả các NH của $x^2 + \cos x$ không?

Mệnh đề và Định nghĩa

Nếu F và G là hai NH của hàm f trên (a, b) thì tồn tại một hằng số C sao cho

$$G(x) = F(x) + C, x \in (a, b).$$

Mệnh đề và Định nghĩa

Nếu F và G là hai NH của hàm f trên (a, b) thì tồn tại một hằng số C sao cho

$$G(x) = F(x) + C, x \in (a, b).$$

Vì thế mọi NH của f có dạng tổng quát là $F(x) + C, C \in \mathbb{R}$, và được gọi là **tích phân bất định** của f trên (a, b), ký hiệu là $\int f(x)dx$.
Chúng ta có thể viết $\int f(x)dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R}$, trong đó F là một NH nào đó của f.

Ví dụ: $\int (x^2 + \cos x)dx = \frac{1}{3}x^3 + \sin x + C, C \in \mathbb{R}$.

Bảng NH của một số hàm số sơ cấp

- $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, với $\alpha \neq -1$;

  Ví dụ $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$, $\int \dfrac{1}{x^2} dx = -\dfrac{1}{x} + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$

  $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, $vi 0 < a \neq 1$;
- $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln \mid x \mid + C$;

  $\int \dfrac{1}{ax+b} dx = \dfrac{1}{a} \ln \mid ax+b \mid + C$; với $a \neq 0$;
- $\int \sin x dx = -\cos x + C$; $\int \cos x dx = \sin x + C$;
- $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$; $\int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$;
- $\int \dfrac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$;

  $\int \dfrac{1}{x^2+a^2} dx = \dfrac{1}{a} \arctan \dfrac{x}{a} + C$ với $a \neq 0$;

Tính chất của TPBĐ

1. $[\int f(x)dx]' = f(x)$;
2. $\int dF(x) = F(x) + C$;
3. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$;
4. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$.

Một số ví dụ...

Chú ý: cố gắng biểu diễn hàm số dưới dấu tích phân dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các hàm số sơ cấp cơ bản.

Phương pháp đổi biến số

Định lý

Xét tích phân $\int f[u(x)]u'(x)dx$. Giả sử đặt $t = u(x)$ và giả sử tìm được $\int f(t)dt = F(t) + C$. Khi đó ta cũng có

$$\int f[u(x)]u'(x)dx = F[u(x)] + C.$$

Ví dụ: tính các tích phân sau

$$\int (2x+1)e^{x^2+x-1}dx; \quad \int \frac{\ln x dx}{x}; \quad \int \frac{2x-3}{\sqrt{x+1}}dx.$$

Phương pháp tích phân từng phần

Định lý

Cho $u(x)$ và $v(x)$ là hai hàm số khả vi. Khi đó ta có

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)d - \int u'(x)v(x)dx.$$

Ví dụ: tính các tích phân sau

$$\int xe^x dx; \quad \int x^2 \ln x$$

Xét các tích phân hữu tỷ dạng
$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Phương pháp: phân tích phân thức $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ thành tổng của các phân thức đơn giản.

Lấy ví dụ minh họa

- Mẫu số bậc 1;

- Mẫu số bậc hai;

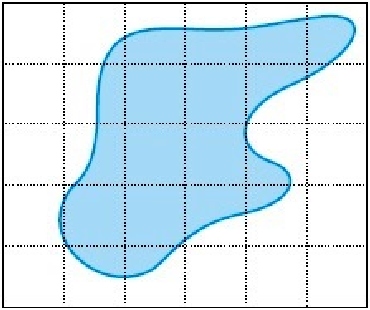
- Mẫu số bậc cao...

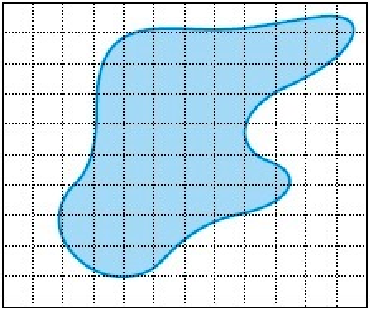
Bài toán diện tích

Làm thế nào để tính diện tích của một miền (hình) bất kỳ (trong lịch sử)?

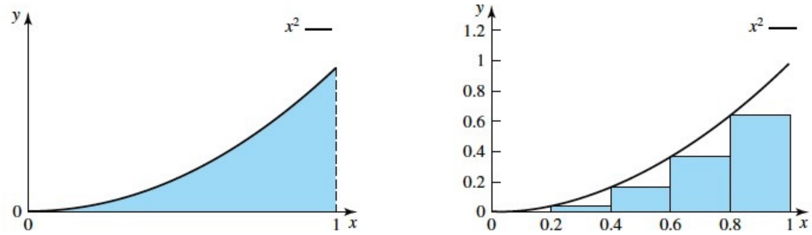
Bài toán diện tích

Làm thế nào để tính diện tích của một miền (hình) bất kỳ (trong lịch sử)?





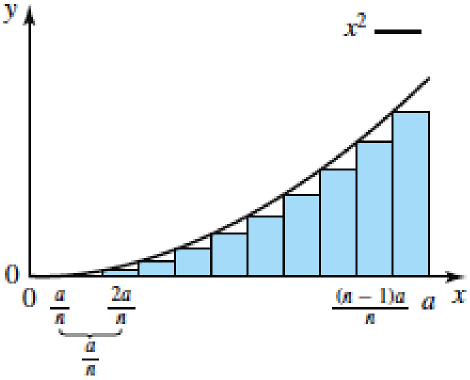
Thử tính diện tích của miền phẳng giới hạn bởi $y = x^2$, trục Ox giữa 0 và $a = 1$.



Chia đoạn $[0, 1]$ thành 5 phần (bằng nhau) và dựng các hình chữ nhật như hình vẽ.
Khi đó diện tích được xấp xỷ bởi:

$$(0.2)(0)^2 + (0.2)(0.2)^2 + (0.2)(0.4)^2 + (0.2)(0.6)^2 + (0.2)(0.8)^2$$
$$= (0.2)\left[0^2 + (0.2)^2 + (0.4)^2 + (0.6)^2 + (0.8)^2\right] = 0.24$$

Tổng quát: cách lấy xấp xỉ diện tích sẽ càng chính xác nếu chia đoạn $[0, a]$ nhỏ hơn thành n (đủ lớn) phần (bằng nhau)



Khi đó diện tích được xấp xỷ bởi:

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{a}{n}f(0) + \frac{a}{n}f\left(\frac{a}{n}\right) + \frac{a}{n}f\left(\frac{2a}{n}\right) + \cdots + \frac{a}{n}f\left(\frac{(n-1)a}{n}\right) \\
&= \frac{a}{n}0^2 + \frac{a}{n}\frac{a^2}{n^2} + \frac{a}{n}\frac{2^2a^2}{n^2} + \cdots + \frac{a}{n}\frac{(n-1)^2a^2}{n^2} \\
&= \frac{a^3}{n^3}[1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2]
\end{aligned}$$

Từ đó $S_n = \dfrac{a^3}{n^3}\dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6}$. Cho $n \to +\infty$ ta nhận được

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{a^3}{3}.$$

Ta nói rằng phần diện tích là $\dfrac{a^3}{n^3}$.

Một số khái niệm quan trọng:

- Một phân hoạch đoạn $[a, b]$: $P = [x_1, x_2, \cdots, x_n]$; $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, với $k = 1, 2, \cdots, n$ và chuẩn của phép phân hoạch là $\|P\| = \max \Delta x_k$;
- Các điểm mẫu $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$, với mỗi $k = 1, 2, \cdots, n$;
- Tổng Riemann (hay tổng tích phân) $S_P = \sum_{k=1}^{n} f(c_k).\Delta x_k$;
- Tích phân xác định của hàm f trên đoạn $[a, b]$ được định nghĩa bởi

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\| \to 0} S_P, \tag{1}$$

nếu giới hạn trên tồn tại, và không phụ thuộc vào cách phân hoạch đoạn $[a, b]$ và cách chọn các điểm mẫu c_k. Hàm f khi đó gọi là khả tích trên đoạn $[a, b]$.

Một số ví dụ: biểu diễn các tích phân sau dưới dạng giới hạn của tổng Riemann Ví dụ 1

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx.$$

Ví dụ 2

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{c_k^3 - 1}\Delta x_k,$$

với P là một phân hoạch đoạn $[2, 3]$.

Một số ví dụ: biểu diễn các tích phân sau dưới dạng giới hạn của tổng Riemann Ví dụ 1

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx.$$

Ví dụ 2

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{c_k^3 - 1}\Delta x_k,$$

với P là một phân hoạch đoạn $[2, 3]$.

Định lý

Nếu hàm số f liên tục trên $[a, b]$, khi đó f là khả tích trên $[a, b]$, tức là $\int_a^b f(x)dx$ tồn tại.

Nếu hàm số f khả tích trên $[a, b]$, khi đó

$$\int_a^b f(x)dx = A_+ - A_-, \tag{2}$$

trong đó A_+ và A_- lần lượt là phần diện tích giới hạn bởi đồ thị hàm số nằm phía trên và dưới trục hoàng.

Ví dụ Tìm giá trị của tích phân sau bằng cách biểu diễn nó như là diện tích mang dấu của các miền phù hợp

$$\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}dx.$$

Nếu hàm số f khả tích trên $[a, b]$, khi đó

$$\int_a^b f(x)dx = A_+ - A_-, \tag{2}$$

trong đó A_+ và A_- lần lượt là phần diện tích giới hạn bởi đồ thị hàm số nằm phía trên và dưới trục hoàng.

Ví dụ Tìm giá trị của tích phân sau bằng cách biểu diễn nó như là diện tích mang dấu của các miền phù hợp

$$\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}dx.$$

Đáp số: π

Chúng ta đặt

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \text{ và } \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Mệnh đề

Giả sử f and g là hai hàm số khả tích trên $[a, b]$. Khi đó:

1. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, for any number $k \in \mathbb{R}$;
2. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$;
3. Nếu f khả tích trên một đoạn chứa ba điểm a, b and c, khi đó

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Mệnh đề

Giả sử f and g là hai hàm số khả tích trên $[a, b]$. Khi đó:

1. Nếu $f(x) \geq 0$ trên $[a, b]$, thì $\int_a^b f(x)dx \geq 0$;
2. Nếu $f(x) \geq g(x)$ trên $[a, b]$, thì $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$;
3. Nếu $m \leq f(x) \leq M$ on $[a, b]$, thì

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Ví dụ: chứng tỏ rằng

$$0 \leq \int_0^\pi \sin x dx \leq \pi.$$

Định lý về sự tồn tại NH của hàm liên tục

Nếu f liên tục $[a, b]$, khi đó hàm F định nghĩa bởi

$$F(x) = \int_a^x f(u)du, \;\; a \leq x \leq b, \tag{3}$$

là liên tục trên $[a, b]$ và khả vi trên (a, b), với

$$\frac{d}{dx}F(x), \text{ or}, \; F'(x) = f(x).$$

ĐL suy ra

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(u)du + C, C \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Ví dụ Tính đạo hàm

$$\int_0^x (\sin u - e^{2u})du,$$

$$\int_1^x \frac{2u}{1+u^3}du,$$

$$\int_0^{x^3} \frac{1}{u+1}du, x > 0,$$

$$\int_{x^2}^{x^3} \frac{1}{u+1}du, x > 0,$$

Định lý

Nếu f liên tục trên $[a, b]$, và giả sử F là một NH bất kỳ của f, khi đó

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) := F(x)]_a^b \tag{5}$$

Chứng minh: hàm F là một NH của f nên nó phải có dạng (4)

$$F(x) = \int_a^x f(u)du + C, x \in [a, b].$$

Đặc biệt, thay $x = a$, sau đó thay $x = b$ vào biểu thức trên ta thu được

$$F(a) = C,$$

$$F(b) = \int_a^b f(u)du + C.$$

Hai PT trên dẫn đến kết quả cần chứng minh (5).

Ví dụ: tính các tích phân sau

$$\int_0^1 (x^2 + 2x)dx,$$

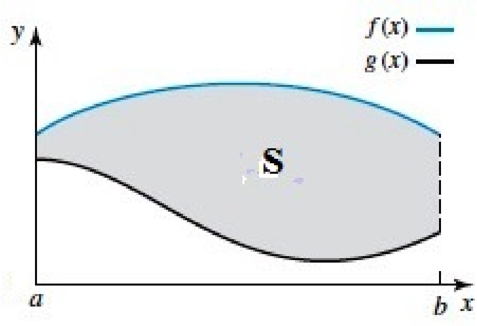
$$\int_0^\pi \sin(2x)dx,$$

$$\int_0^1 2x\ e^{x^2} dx.$$

Chú ý: chúng ta cũng có thể sử dụng pp đổi biến và TP từng phần cho TP xác định.

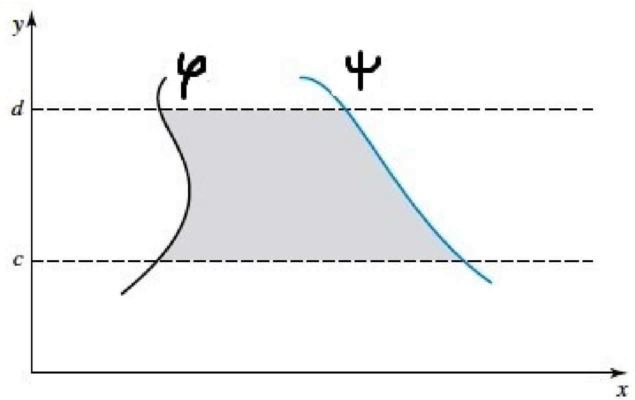
Ví dụ...

Tính diện tích hình phẳng



$$S = \int_a^b |\ f(x) - g(x)\ |\ dx$$

Ví dụ: tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2x$, $y = -x + 2$.



$$S = \int_c^d |\ \Psi(y) - \varphi(y)\ |\ dy$$

Ví dụ: tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$ và trục Ox.

Tính độ dài đường cong

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \mid dx$$

Ví dụ: tính độ dài đường cong $y = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{1}{2}\ln x$, với $1 \leq x \leq e$.

Tích phân suy rộng có cận vô hạn

Ví dụ: xét diện tích miền vô hạn giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x^2}$, trục Ox với $x \geq 1$.

Định nghĩa

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{\infty} f(x)dx.$$

Nếu giới hạn tồn tại thì TP suy rộng được gọi là hội tụ, ngược lại goi là phân kỳ.

Một số ví dụ:...

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2+4x+3} dx$$