Chương 4. Hàm số nhiều biến số

Phan Quang Sáng

Bộ môn Toán- Khoa CNTT- VNUA

Hà Nội, Ngày 17 tháng 10 năm 2018

http://fita.vnua.edu.vn/vi/pqsang/
pqsang@vnua.edu.vn

Nội dung chính

1. 1. Định nghĩa hàm số nhiều biến số
2. 2. Đạo hàm riêng và vi phân
   - 2.1. Đạo hàm riêng
   - 2.2. Vi phân toàn phần
3. 3. Cực trị hàm hai biến

Nhắc lại $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Definition

Giả sử $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Một hàm số f của n biến số độc lập trên D là một tương ứng mỗi điểm thuộc D với một số thực,

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) &\mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

D được gọi là tập xác định của f, và tập hợp

$$\{w \in \mathbb{R} : w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D\}$$

gọi là tập giá trị của f.

Ví dụ 1: tính giá trị của hàm số

$$f(x, y, z) = \frac{x + y}{z^2}$$

tại các điểm $(1, 2, 3)$ và $(-1, 2, 3)$. Tìm và biểu diễn hình học tập xác định của f.

Ví dụ 1: tính giá trị của hàm số

$$f(x, y, z) = \frac{x+y}{z^2}$$

tại các điểm $(1, 2, 3)$ và $(-1, 2, 3)$. Tìm và biểu diễn hình học tập xác định của f.

Ví dụ 2: cho hàm số

$$f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

Tìm và biểu diễn hì nh học tập xác định của f.
Tìm tập giá trị f.

Ví dụ 1: tính giá trị của hàm số

$$f(x, y, z) = \frac{x + y}{z^2}$$

tại các điểm $(1, 2, 3)$ và $(-1, 2, 3)$. Tìm và biểu diễn hình học tập xác định của f.

Ví dụ 2: cho hàm số

$$f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

Tìm và biểu diễn hì nh học tập xác định của f.
Tìm tập giá trị f.

Ví dụ 3: Câu hỏi tương tự cho hàm số $f = \sqrt{y^2 - x}$.

Đồ thị của hàm số hai biến

Cho hàm số $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$. Khi đó đồ thị của hàm số là tập hợp sau trong không gian $\mathbb{R}^3$:

$$G(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D\}.$$

Nói chung đồ thị hàm số hai biến là một mặt trong không gian 3 chiều.

Một số ví dụ

Ví dụ 1: $z = -x - 2y + 4$. (mặt phẳng)

Ví dụ 2: $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$. (nửa trên mặt cầu)

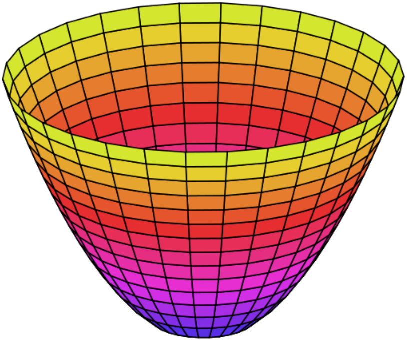
Ví dụ 3: $z = 4x^2 + y^2$. (elliptic paraboloid)

Ví dụ 4: $z = 2x^2 - y^2$. (hyperbolic paraboloid)

Ví dụ 5: $z = \sqrt{4 - 2x^2 - y^2}$. (nửa trên ellipsoid)

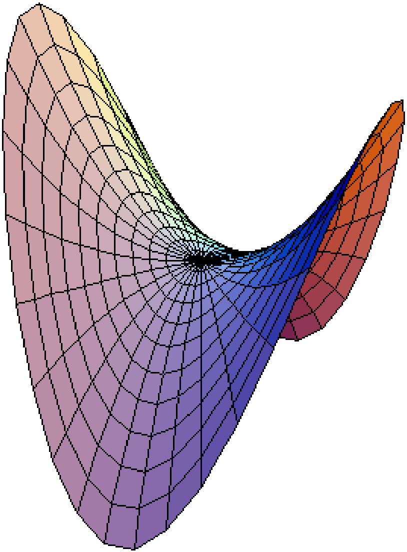
nửa trên mặt cầu

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$



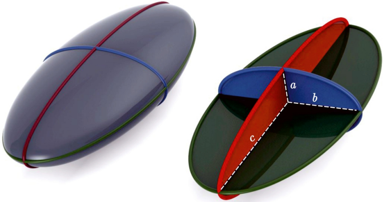
elliptic paraboloid

$$z = 4x^2 + y^2$$



hyperbolic paraboloid

$$z = 2x^2 - y^2$$



ellipsoid

Định nghĩa

Cho hàm số $z = f(x, y)$ và điểm $(x_0, y_0) \in D_f$. Khi đó các đạo hàm riêng cấp 1 của hàm số tại (x_0, y_0) được cho bởi

$$\frac{d}{dx} f(x, y_0)|_{x=x_0} := f'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \text{ (đối với biến } x),$$

$$\frac{d}{dy} f(x_0, y)|_{y=y_0} := f'_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \text{ (đối với biến } y)$$

Định nghĩa

Cho hàm số $z = f(x, y)$ và điểm $(x_0, y_0) \in D_f$. Khi đó các đạo hàm riêng cấp 1 của hàm số tại (x_0, y_0) được cho bởi

$$\frac{d}{dx} f(x, y_0)|_{x=x_0} := f'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \text{ (đối với biến } x\text{)},$$

$$\frac{d}{dy} f(x_0, y)|_{y=y_0} := f'_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \text{ (đối với biến } y\text{)}$$

Ví dụ 1: tìm các đạo hàm riêng
$f(x, y) = x^3y^2 + 3x - 5y^2 + 4y - 1.$

Định nghĩa

Cho hàm số $z = f(x, y)$ và điểm $(x_0, y_0) \in D_f$. Khi đó các đạo hàm riêng cấp 1 của hàm số tại (x_0, y_0) được cho bởi

$$\frac{d}{dx} f(x, y_0)|_{x=x_0} := f'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \text{ (đối với biến } x),$$

$$\frac{d}{dy} f(x_0, y)|_{y=y_0} := f'_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \text{ (đối với biến } y)$$

Ví dụ 1: tìm các đạo hàm riêng
$f(x, y) = x^3y^2 + 3x - 5y^2 + 4y - 1$.
Chú ý Khi tính f'_x, ta coi y là hằng số, và lấy đạo hàm của f theo biến x. (tương tự cho f'_y).
Ví dụ 2: tìm các đạo hàm riêng $f(x, y) = \frac{x+y}{y} + 2x$.

Đạo hàm riêng cấp cao

Ví dụ 1: tinh các đạo hàm riêng liên tiếp của hàm
$f(x, y) = x^3y^2 + 3x - 5y^2 + 4y - 1$.

Đạo hàm riêng cấp cao

Ví dụ 1: tinh các đạo hàm riêng liên tiếp của hàm $f(x,y) = x^3y^2 + 3x - 5y^2 + 4y - 1$.

Người ta có thể định nghĩa các đạo hàm riêng cấp 2,

$$f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, f''_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Đạo hàm riêng cấp cao

Ví dụ 1: tinh các đạo hàm riêng liên tiếp của hàm $f(x,y) = x^3y^2 + 3x - 5y^2 + 4y - 1$.

Người ta có thể định nghĩa các đạo hàm riêng cấp 2,

$$f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, f''_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Ví dụ 2: $f(x,y) = e^y \ln x + \dfrac{x^3+1}{2y}$.

Đạo hàm riêng cấp cao

Ví dụ 1: tinh các đạo hàm riêng liên tiếp của hàm $f(x, y) = x^3y^2 + 3x - 5y^2 + 4y - 1$.

Người ta có thể định nghĩa các đạo hàm riêng cấp 2,

$$f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, f''_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Ví dụ 2: $f(x, y) = e^y \ln x + \dfrac{x^3 + 1}{2y}$.

Định lý (về đạo hàm hỗn hợp)

Nếu hàm số $z = f(x, y)$ có các ĐHR hỗn hợp f_{xy}, f_{yx} liên tục trong một lân cận điểm (x_0, y_0), khi đó ta có

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

Cho hàm số $z = f(x, y)$ và điểm $(x_0, y_0) \in D_f$. Đặt
$\triangle x = x - x_0$, $\triangle y = y - y_0$ và
$\triangle f = f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0)$.

Giả sử hàm số có các ĐHR $\frac{\partial f}{\partial x}$ và $\frac{\partial f}{\partial y}$ liên tục tại (x_0, y_0) và gần đó. Khi đó $\triangle f$ có thể biểu diễn dạng

$$\triangle f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\triangle x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\triangle y\right] + \varepsilon_1 \triangle x + \varepsilon_2 \triangle y,$$

trong đó ε_1 và $\varepsilon_2 \to 0$ khi $(\triangle x, \triangle y) \to (0, 0)$.

Khi đó, vi phân toàn phần của hàm số, ký hiệu df, được định nghĩa bởi

$$df(x_0, y_0) = [\cdots]$$

Cho hàm số $z = f(x, y)$ và điểm $(x_0, y_0) \in D_f$. Đặt
$\triangle x = x - x_0$, $\triangle y = y - y_0$ và
$\triangle f = f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0)$.

Giả sử hàm số có các ĐHR $\frac{\partial f}{\partial x}$ và $\frac{\partial f}{\partial y}$ liên tục tại (x_0, y_0) và gần đó. Khi đó $\triangle f$ có thể biểu diễn dạng

$$\triangle f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\triangle x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\triangle y\right] + \varepsilon_1 \triangle x + \varepsilon_2 \triangle y,$$

trong đó ε_1 và $\varepsilon_2 \to 0$ khi $(\triangle x, \triangle y) \to (0, 0)$.

Khi đó, vi phân toàn phần của hàm số, ký hiệu df, được định nghĩa bởi

$$df(x_0, y_0) = [\cdots] = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy.$$

Ví dụ: tính vi phân toàn phần của hàm số

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + xy^2 + 1$$

tại điểm $(2, -1)$, và sau đó tại một điểm bất kỳ.

Xấp xỷ tuyến tính

Từ biểu diễn $\triangle f \approx df(x_0, y_0)$, ta suy ra

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0),$$

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0),$$

gọi là **xấp xỷ tuyến tính** của f tại (x_0, y_0).

Xấp xỷ tuyến tính

Từ biểu diễn $\triangle f \approx df(x_0, y_0)$, ta suy ra

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0),$$

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0),$$

gọi là **xấp xỷ tuyến tính** của f tại (x_0, y_0).

Ví dụ 1: tìm xấp xỷ tuyến tính của $f(x, y) = \ln(x - 2y^2)$ tại $(3, 1)$ và sử dụng nó để tính xấp xỷ $f(3.05, 0.95)$.

Ví dụ 2: tính gần đúng $\ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1)$.

Định nghĩa cực trị (CT)

Hàm số $z = f(x, y)$ gọi là đạt cực đại (t/ư cực tiểu) tại điểm $(x_0, y_0) \in D_f$ nếu $z_0 = f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ (t/ư $z_0 = f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$) với mọi điểm $(x, y) \in D_f$ ở gần (x_0, y_0).

Khi đó z_0 được gọi là giá trị CT (cực đại hoặc cực tiểu) của hàm số.

Định nghĩa cực trị (CT)

Hàm số $z = f(x, y)$ gọi là đạt cực đại (t/ư cực tiểu) tại điểm $(x_0, y_0) \in D_f$ nếu $z_0 = f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ (t/ư $z_0 = f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$) với mọi điểm $(x, y) \in D_f$ ở gần (x_0, y_0).
Khi đó z_0 được gọi là giá trị CT (cực đại hoặc cực tiểu) của hàm số.

Định lý (ĐK cần của CT)

Giả sử hàm số $z = f(x, y)$ đạt CT tại (x_0, y_0) mà tại đó các đạo hàm riêng cấp 1 tồn tại thì (x_0, y_0) phải là điểm dừng của hàm số, tức là

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Định lý (ĐK đủ của CT)

Giả sử điểm (x_0, y_0) là điểm dừng của hàm số $z = f(x, y)$, và giả sử các ĐHR cấp 2 tồn tại và liên tục tại các điểm ở gần (x_0, y_0). Đặt

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), B = f''_{xy}(x_0, y_0), C = f''_{yy}(x_0, y_0).$$

$$\triangle = AC - B^2 \square 0.$$

Khi đó:

1. Nếu $\triangle < 0$ thì hàm số không đạt CT tại (x_0, y_0).
2. Nếu $\triangle > 0$ thì hàm số đạt cực CT tại (x_0, y_0).
   Hơn nữa (x_0, y_0) là điểm cực tiểu nếu $A > 0$; điểm cực đại nếu $A < 0$.

Ví dụ: tìm các điểm CT nếu có của hàm số

$$f(x, y) = 8x^3 + 2xy - 3x^2 + y^2 - 1$$