Chương 5. Phương trình vi phân

Phan Quang Sáng

Bộ môn Toán- Khoa CNTT- VNUA

Hà Nội, Ngày 28 tháng 11 năm 2018

http://fita.vnua.edu.vn/vi/pqsang/
pqsang@vnua.edu.vn

Nội dung chính

1. Một số khái niệm về PTVP

2. Một số lớp PTVP cấp 1
   - 2.1. PT với biến số phân ly
   - 2.2. PT đẳng cấp
   - 2.3. PTVP tuyến tính
   - 2.4. PT Bernoulli

Mô hình tăng trưởng quần thể Malthus

Giả định: dân số tăng theo một tỷ lệ cố định trong một chu kỳ thời gian nhất định, tỷ lệ này không bị ảnh hưởng bởi kích thước của dân số.

Mô hình tăng trưởng quần thể Malthus

Giả định: dân số tăng theo một tỷ lệ cố định trong một chu kỳ thời gian nhất định, tỷ lệ này không bị ảnh hưởng bởi kích thước của dân số.

Giả sử kích thước (hay số lượng cá thể) của quần thể theo thời gian t $(t \geq 0)$ là $N(t)$, và ở thời điểm ban đầu là $N(0) = N_0$.

Phương trình biểu diễn mối quan hệ trên là

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = r,$$

với r là hằng số tỷ lệ tăng trưởng. (Đó là vd về PTVP cấp 1)

Một đại lượng thay đổi (nói chung) có quan hệ với tốc độ thay đổi, và PTVP cho phép biểu diễn mối quan hệ đó.

Định nghĩa

PTVP là một PT (toán học) của một hàm số, biến số và các đạo hàm của nó. Cấp của đạo hàm có mặt trong PT gọi là cấp của PT.

Ví dụ: PTVP cấp 1 có dạng

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

trong đó $y = y(x)$ là hàm số của biến số độc lập x.

Một đại lượng thay đổi (nói chung) có quan hệ với tốc độ thay đổi, và PTVP cho phép biểu diễn mối quan hệ đó.

Định nghĩa

PTVP là một PT (toán học) của một hàm số, biến số và các đạo hàm của nó. Cấp của đạo hàm có mặt trong PT gọi là cấp của PT.

Ví dụ: PTVP cấp 1 có dạng

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

trong đó $y = y(x)$ là hàm số của biến số độc lập x.
Với một cặp (x_0, y_0) cho trước, nếu yêu cầu nghiệm y của PT (1) thỏa mãn một điều kiện dạng

$$y(x_0) = y_0,$$

thì ĐK này được gọi là ĐK ban đầu.

Nghiệm của PTVP

Ví dụ: tìm nghiệm của PTVP

$$y' - 2x^2 = 0.$$

Nghiệm của PTVP

Ví dụ: tìm nghiệm của PTVP

$$y' - 2x^2 = 0.$$

Định nghĩa

Một hàm số có dạng TQ

$$y = \varphi(x, C),$$

trong đó $C \in \mathbb{R}$ là một hằng số tùy ý, thỏa mãn PT (1) được gọi là nghiệm TQ của PTVP (1).
Ứng với 1 giá trị cụ thể $C = C_0$, hàm số

$$y = \varphi(x, C_0)$$

được gọi là nghiệm riêng của PT (1).

Tích phân của PTVP

Về mặt hình học,
mỗi nghiệm của PTVP biểu diễn một đường cong trên mặt phẳng và gọi là đường cong tích phân của pt.

Định nghĩa

Khi giải PTVP (1) nhiều khi dẫn đến PT dạng

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

(*"không còn đạo hàm"*), trong đó $C \in \mathbb{R}$ là một hằng số tùy ý, và nó được gọi là Tích phân TQ của PTVP (1).
Tương tự, PT $\Phi(x, y, C_0) = 0$ được gọi là Tích phân riêng của PT (1).

Xét PT VP cấp một (1),

$$F(x, y, y') = 0.$$

ĐB dạng đã giải ra đạo hàm

$$y' = f(x, y), \tag{2}$$

hoặc dạng tương đương

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

(chú ý: $y' = \dfrac{dy}{dx}$)

Định nghĩa

PT với biến số phân ly là PT dạng

$$M(x)dx + N(y)dy = 0.$$

PT trên có TP TQ dạng

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C, \ C \in \mathbb{R}.$$

Định nghĩa

PT với biến số phân ly là PT dạng

$$M(x)dx + N(y)dy = 0.$$

PT trên có TP TQ dạng

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C, \;\; C \in \mathbb{R}.$$

Ví dụ 1: giải ptvp $y'e^x = 1$.
Ví dụ 2: giải ptvp $(x+1)y' = 2y^2x^2$.
Ví dụ 3: giải ptvp $x(y^2-1)dx + (x^2-1)dy = 0$.

Mô hình tăng trưởng có giới hạn

(vd mô tả sự phát triển của cá)

Ký hiệu $L = L(t)$ là chiều dài của một con cá ở độ tuổi t, $t \geq 0$, và giả sử $L(0) = L_0 > 0$.

Giả sử chiều dài của cá tuân theo phương trình von Bertalanffy:

$$\frac{dL}{dt} = k(A - L),$$

trong đó k và A là các hằng số dương (g/s $L_0 < A$).

Định nghĩa

Hàm hai biến số $f = f(x, y)$ được gọi là hàm đẳng cấp bậc k $(k \in \mathbb{R})$ nếu

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y).$$

Một số ví dụ:

$$f = f(x, y) = x^3 - x^2 y + 2xy^2 - y^3.$$

$$g = g(x, y) = x^2(\ln x - \ln y) + 2xy.$$

$$z = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Định nghĩa

PTVP đẳng cấp là PT dạng

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

trong đó M, N là các hàm đẳng cấp cùng bậc.

Cách giải: bằng phép đổi biến

$$y = xu(x)$$

chúng ta có thể chuyển PT đẳng cấp về dạng biến số phân ly.
Chú ý: $y' = u + xu'$ và $dy = udx + xdu$

Định nghĩa

PTVP đẳng cấp là PT dạng

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

trong đó M, N là các hàm đẳng cấp cùng bậc.

Cách giải: bằng phép đổi biến

$$y = xu(x)$$

chúng ta có thể chuyển PT đẳng cấp về dạng biến số phân ly.
Chú ý: $y' = u + xu'$ và $dy = udx + xdu$
Ví dụ 1: giải PTVP

$$(x^2 + y^2)dx - (x^2 + xy)dy = 0.$$

Ví dụ 2: giải PTVP

$$xy' = y \ln \frac{y}{x}.$$

Định nghĩa

PT tuyến tính là PT dạng

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{3}$$

trong đó p, q là các hàm số của x.

Cách giải: tìm nghiệm dưới dạng $y = u(x)v(v)$, trong đó $v \neq 0$.

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$$

$$u'v + u[v' + p(x)v] = q(x). \tag{4}$$

Chọn $v \neq 0$ sao cho

$$v' + p(x)v = 0 \tag{5}$$

(PTTT thuần nhất t/ư của (3), đưa được về dạng b/số phân ly)

Lúc này PT (4) trở thành

$$u'v = q(x), \text{ hay}$$

$$u' = \frac{q(x)}{v(x)}.$$

Từ đó,

$$u = \int \frac{q(x)}{v(x)} dx.$$

Lúc này PT (4) trở thành

$$u'v = q(x), \text{ hay}$$

$$u' = \frac{q(x)}{v(x)}.$$

Từ đó,

$$u = \int \frac{q(x)}{v(x)} dx.$$

Ví dụ 1: giải PTVP

$$y' - 2\frac{y}{x} = x^2 \cos x.$$

Ví dụ 2: giải PTVP

$$xy' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x}.$$

Định nghĩa

PT Bernoulli là PT dạng

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}, \tag{6}$$

trong đó p, q là các hàm số x, số thực $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$.

Cách giải: (đưa về dạng PTTT bằng cách đổi hàm)

Nhận xét:

1. Nếu $\alpha > 0$ thì hàm số $y = 0$ là một nghiệm của PT.
2. Nếu $\alpha < 0$ thì $y \neq 0$ (không là nghiệm).

Ngoài ra, ta sẽ tìm các nghiệm $y \neq 0$: chia hai vế PT (6) cho y^{α} ta được

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x). \tag{7}$$

Đổi hàm đặt

$$z = z(x) = y^{1-\alpha}.$$

Ta có đạo hàm của z theo x là

$$z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'.$$

Phương trình (7) trở thành

$$\frac{z'}{1-\alpha} + p(x)z = q(x), \text{ hay}$$

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x).$$

Đây là PTTT đã biết cách giải...

Đổi hàm đặt

$$z = z(x) = y^{1-\alpha}.$$

Ta có đạo hàm của z theo x là

$$z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'.$$

Phương trình (7) trở thành

$$\frac{z'}{1-\alpha} + p(x)z = q(x), \text{ hay}$$

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x).$$

Đây là PTTT đã biết cách giải...

Ví dụ 1: giải PTVP

$$y' + 2\frac{y}{x} = \frac{y^3}{x^2}.$$