



BỘ MÔN TOÁN- KHOA CNTT

Câu 1: (6 điểm) Tính các định thức sau theo tham số m :

a)
$$\begin{vmatrix} 1 & m & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ -m & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

b)
$$\begin{vmatrix} m & 2 & 2 & 2 \\ 2 & m & 2 & 2 \\ 2 & 2 & m & 2 \\ 2 & 2 & 2 & m \end{vmatrix}$$

Câu 2: (6 điểm) Cho hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 - 2x_5 = -1 \\ 5x_1 + 6x_2 - 7x_3 + 2x_4 + x_5 = 8 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + mx_5 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 5 \end{cases}$$

a) (3 điểm) Giải hệ phương trình với $m = 1$.

b) (3 điểm) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm.

Câu 3: (4 điểm) Cho A là ma trận vuông cấp 2018 và $\det(A) = 2017$.

a) (2 điểm) Hãy tính $\det(A^{-1})$, với A^{-1} là ma trận nghịch đảo của ma trận A .

b) (2 điểm) Hãy tính $\det(A^*)$, với A^* là ma trận phụ hợp của ma trận A .

Câu 4: (4 điểm) Cho phương trình

$$x^3 - (2m+1)x^2 + 3mx - m = 0.$$

a) (2 điểm) Giải phương trình với $m = 2$.

b) (2 điểm) Tìm m để phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

-----Hết-----



Thời gian: 100 phút

Ngày 17/11/2018

BỘ MÔN TOÁN- KHOA CNTT

Bài 1. (5 điểm) Cho dãy số (u_n) xác định bởi công thức truy hồi:

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2 + u_n}, n \geq 1 \end{cases}$$

- 1) Đặt $u_n = \frac{1}{v_n}, n \geq 1$. Hãy biểu diễn v_{n+1} theo $v_n, n \geq 1$.
- 2) Đặt $y_n = v_n + \alpha, \alpha \in \mathbb{R}, n \geq 1$. Xác định α để dãy số (y_n) là một cấp số nhân, rồi tìm số hạng tổng quát của dãy (y_n) .
- 3) Xác định số hạng tổng quát của dãy (u_n) .

Bài 2. (4 điểm) Tính các giới hạn sau

- 1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}$.
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, với f là hàm số xác định bởi $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \in \mathbb{Q} \\ x^6 & \text{khi } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

Bài 3. (6 điểm) Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, kí hiệu $n! = 1.2.3 \dots n$ và xét hàm số

$$f_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \text{ với } x \in \mathbb{R}.$$

- 1) Chứng minh với $n \geq 1, [f_n(x)]' = f_{n-1}(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- 2) Chứng minh đồ thị hàm số $f_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.
- 3) Chứng minh đồ thị hàm số $f_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$ nằm phía trên trục hoành.
- 4) Tính tích phân $I = \int \frac{x^3}{f_3(x)} dx$.

Bài 4. (5 điểm) Bác nông dân có một cái ao nuôi cá với diện tích $50 m^2$. Vụ vừa qua bác nuôi với mật độ $20 con/m^2$ và thu được 1,5 tấn cá thành phẩm. Theo kinh nghiệm nuôi cá của mình, bác thấy cứ thả giảm đi $8 con/m^2$ thì trọng lượng mỗi con cá thành phẩm thu được tăng lên $0,5 kg$. Vậy vụ tới bác phải mua bao nhiêu con cá giống để đạt được tổng năng suất cao nhất? (Giả sử không có hao hụt số lượng cá trong quá trình nuôi).

----- **Hết** -----

ĐÁP ÁN ĐỀ THI GIẢI TÍCH

VÒNG 1

Ngày 17/11/2018

Bài 1. (5 điểm)

1) $v_{n+1} = 2v_n + 1$

2) Đặt $y_n = v_n + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$. Xác định α để dãy số (y_n) là một cấp số nhân, rồi tìm số hạng tổng quát của dãy (y_n) .

Thay $v_n = y_n - \alpha$ vào CT ở câu 1) suy ra

$$y_{n+1} - \alpha = 2(y_n - \alpha) + 1 \Leftrightarrow y_{n+1} = 2y_n - \alpha + 1$$

Chọn $\alpha = 1$ thì (y_n) là cấp số nhân với công bội $q = 2$.

Ta có $v_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow y_1 = \frac{3}{2}$. Từ đó: $y_n = y_1 q^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-2}$.

3) Xác định số hạng tổng quát của dãy (u_n) :

$$v_n = y_n - 1 = 3 \cdot 2^{n-2} - 1,$$

$$u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{3 \cdot 2^{n-2} - 1}.$$

Bài 2. (4 điểm) Tính các giới hạn sau

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{4}$.

2) Với x ở gần 0, ta luôn có

$$|f(x)| \leq x^2$$

Mà $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, từ đó theo nguyên lý kẹp suy ra $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

Bài 3. (6 điểm)

1) Tính toán đơn giản.

2) $f_3(x)' = f_2(x) > 0 \forall x$ nên $f_3(x)$ là hàm số đồng biến trên \mathbb{R} . Mà $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_3(x) = \pm\infty$ nên đồ thị hàm số $f_3(x)$ cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.

3) Do $f_4(x)' = f_3(x)$. Theo câu b), phương trình $f_3(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = t (t \neq 0)$.

Lập bảng biến thiên cho $f_4(x)$ thu được $\min f_4(x) = f_4(t) = f_3(t) + \frac{t^4}{24} = \frac{t^4}{24} > 0$ hay

$$f_4(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}.$$

4) Ta có: $f_3(x) = f_2(x) + \frac{x^3}{6} = f_3(x)' + \frac{x^3}{6}$

Suy ra $x^3 = 6[f_3(x) - (f_3(x))']$. Từ đó:

$$I = 6 \int \frac{f_3 - f_3'}{f_3} dx = 6x - 6 \ln |f_3| + C$$

Bài 4. (5 điểm) Khảo sát hàm tổng năng suất: $f(x) = (1000 - x)(1,5 + 0,0625x)$ kg với x là số cá giảm đi so với vụ hiện tại. $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất với $x = 488$. Vậy vụ tới bác nông dân phải mua $1000 - 488 = 512$ con cá giống.