

Xác suất thống kê

Chương 1: Xác suất

Phạm Việt Nga

Bm Toán, Khoa CNTT, Học viện Nông nghiệp VN
01/2019

- 1 Phép thử - Sự kiện
- 2 Xác suất
 - Định nghĩa - Tính chất
 - Xác suất có điều kiện

Nội dung

1 Phép thử - Sự kiện

2 Xác suất

- Định nghĩa - Tính chất
- Xác suất có điều kiện

Khái niệm

Ví dụ 1

Một hộp kín đựng 4 hạt đậu đỏ và 3 hạt đậu trắng kích thước như nhau. Lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 2 hạt.

- 1 Tính xác suất để 2 hạt lấy được là hai hạt đậu đỏ.
- 2 Tính xác suất để lấy được ít nhất 1 hạt đậu đỏ.
- 3 Đem gieo 2 hạt lấy được. Biết xác suất nảy mầm của hạt đậu đỏ là 0,8 và của hạt đậu trắng là 0,7, hãy tính xác suất để cả 2 hạt đem gieo đều nảy mầm.

→ **Phép thử?** **Sự kiện?**

Các phép toán với sự kiện

Sự kiện đặc biệt

- +) Sự kiện chắc chắn: Ω .
- +) Sự kiện không: \emptyset .

① *Phép hợp hai sự kiện: $A \cup B$.*

② *Phép giao hai sự kiện: $A \cap B$ hoặc AB (tích hai sk)*

Hai sk xung khắc: nếu $AB = \emptyset$; Khi đó viết $A + B$ thay cho $A \cup B$.

③ *Phép hiệu của sk A và sk B : $A \setminus B$*

Sự kiện đối lập: $\bar{A} = \Omega \setminus A$

$\rightarrow A \setminus B = A\bar{B}$.

Ví dụ 2

Ở một vùng dân cư có người nghiện hút thuốc lá, người ta thấy có rất nhiều người mắc bệnh về phổi.

Khám sức khỏe cho toàn bộ dân cư ở vùng này. Xem ngẫu nhiên bệnh án của một người dân ở vùng đó.

Gọi A là sk "người đó nghiện hút thuốc lá";

B là sk "người đó bị bệnh về phổi";

C là sk "người đó vừa nghiện thuốc lá, vừa bị bệnh về phổi";

D là sk "người đó không nghiện thuốc lá nhưng mắc bệnh về phổi";

E là sk "người đó không nghiện thuốc lá và không mắc bệnh về phổi";

F là sk "người đó không bị mắc bệnh về phổi".

Hãy viết mỗi quan hệ giữa các sk kể trên.

Hệ đầy đủ các sự kiện

Hệ đầy đủ các sự kiện

Hệ gồm n sự kiện ngẫu nhiên A_1, A_2, \dots, A_n thỏa mãn:

- $A_i A_k = \emptyset \quad \forall i \neq k$
- $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega$
- Xây dựng 1 hệ đầy đủ từ phép thử ở Ví dụ 1.

Nội dung

1 Phép thử - Sự kiện

2 Xác suất

- Định nghĩa - Tính chất
- Xác suất có điều kiện

Định nghĩa

(Xác suất là một số dùng để đo khả năng xuất hiện sự kiện.)

Định nghĩa xác suất theo quan điểm đồng khả năng

$$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{\text{số kq thuận lợi cho } A \text{ xảy ra}}{\text{số kq đồng khả năng}}$$

Định nghĩa xác suất theo quan điểm thống kê

$$f_n(A) \longrightarrow P(A), n \longrightarrow +\infty$$

với $f_n(A) = \frac{n_A}{n}$ là **tần suất** xuất hiện sk A ; n_A là số lần sk A xuất hiện trong n lần tiến hành phép thử \mathcal{E} có liên quan đến sk A trong cùng điều kiện.

Một số tính chất

- ① $0 \leq P(A) \leq 1, \forall A$
- ② $P(\emptyset) = 0; P(\Omega) = 1$
- ③ Nếu $A \subset B$ thì $P(A) \leq P(B)$
- ④ Nếu $AB = \emptyset$ thì $P(A + B) = P(A) + P(B)$
 Hệ quả 1: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
 Hệ quả 2: Nếu $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ là hệ sk xung khắc từng đôi thì
 $P(A_1 + A_2 + \dots + A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k)$
 Hệ quả 3: Nếu $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ là hệ đầy đủ các sk thì
 $P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1.$
- ⑤ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
 Mở rộng: $P(A \cup B \cup C) =$
 $P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$

Xác suất có điều kiện

Định nghĩa

Xác suất của sk B với giả thiết sk A đã xảy ra: $P(B/A)$ hoặc $P_A(B)$

Công thức

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

Công thức nhân xác suất

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B)$$

Các sự kiện độc lập

Hai sk độc lập

Sự kiện B được gọi là độc lập với sự kiện A nếu $P(B/A) = P(B)$

(?) Nếu sk B độc lập với sk A thì sk A có độc lập với sk B không?

Nếu A, B là hai sự kiện có xác suất khác 0 thì

$$A \text{ và } B \text{ độc lập} \Leftrightarrow P(AB) = P(A).P(B)$$

Ví dụ 3: Ba sinh viên An, Bình, Cường làm bài thi kết thúc học phần Xác suất thống kê độc lập nhau. Xác suất làm được bài của ba bạn tương ứng là 0,7; 0,8 và 0,9.

a) Tính xác suất để “có đúng hai bạn làm được bài thi”.

b) Nếu biết đã có đúng hai bạn làm được bài thi thì xác suất bạn Bình không làm được bài là bao nhiêu?

Công thức xác suất toàn phần

CT XSTP

$$P(A) = P(A_1)P(A/A_1) + P(A_2)P(A/A_2) + \dots + P(A_n)P(A/A_n)$$

trong đó $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ là một hệ đầy đủ các sk.

Công thức Bayes

$$P(A_k/A) = \frac{P(A_k)P(A/A_k)}{P(A)}$$

Ví dụ 4: Một hộp kín đựng 4 hạt đậu đỏ và 3 hạt đậu trắng kích thước như nhau. Lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 2 hạt và đem gieo. Biết xác suất nảy mầm của hạt đậu đỏ và đậu trắng tương ứng là 0,8 và 0,7,

- Hãy tính xác suất để cả 2 hạt đem gieo đều nảy mầm.
- Nếu biết cả 2 hạt đem gieo đều nảy mầm thì xác suất để trước đó lấy được 2 hạt đỏ là bao nhiêu?

Lược đồ Bernoulli

Lược đồ Bernoulli

Xét phép thử \mathcal{E} có liên quan đến sk A có xác suất xuất hiện là p . Tiến hành một dãy n phép thử \mathcal{E} hoàn toàn độc lập nhau \rightarrow **lược đồ Bernoulli**.

Xác suất để sk A xuất hiện đúng k lần trong lược đồ Bernoulli là:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

với $q = 1 - p$.

Ví dụ 5: Gieo 7 hạt đậu, tính xs để có đúng 3 hạt nảy mầm biết xs nảy mầm của mỗi hạt đều là 0,8.

Nhiều khả năng nhất có bao nhiêu hạt nảy mầm trong 7 hạt được gieo?

Bài tập: Bài 1 \rightarrow 6 /Tờ bài tập XSTK - soạn bởi BM Toán