

Chương 1: Ma trận – Định thức – Hệ phương trình tuyến tính

Bài 1. Cho các ma trận: $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

- 1) Tính $2A - B'$, AB , BA , ABC .
- 2) Có tồn tại ma trận X thỏa mãn $AX = C$ không? Nếu có, hãy tìm X .

Bài 2. Cho các ma trận $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & m \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

Tính AB và tìm m để ma trận AB khả nghịch.

Bài 3. Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng của ma trận, hãy đưa ma trận sau đây về dạng bậc thang, rồi dạng bậc thang thu gọn:

$$1) \begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{bmatrix}; \quad 2) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

Bài 4. Cho $A = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ và I là ma trận đơn vị cấp 3.

- 1) Tìm ma trận X sao cho $3A + 2X = I$.
- 2) Tìm hàng 2 của ma trận tích $(-2A.A')$.
- 3) Tính $A'.B$. Từ đó hãy cho biết ma trận B có khả nghịch không? nếu có, hãy suy ra ma trận nghịch đảo của ma trận B .
- 4) Tính $\det A$, rồi suy ra $\det(-A)$, $\det(2A)$, $\det(A^4)$ mà không tính các ma trận $-A, 2A, A^4$.

Bài 5. Cho ma trận: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & m & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

- 1) Tính định thức của ma trận A theo m .
- 2) Với điều kiện nào của m thì ma trận A khả nghịch?
- 3) Với các giá trị của m làm cho ma trận A khả nghịch, hãy tính phần tử ở vị trí hàng 2 cột 3 của ma trận A^{-1} (với yêu cầu không tìm ma trận A^{-1}).
- 4) Từ ma trận A xoá hàng 3 và cột 2, ta thu được ma trận B . Tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của B .

Bài 6. Tính định thức của ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Bài 7. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \\ -1 & m \end{pmatrix}$.

- 1) Tính các phần tử ở cột 2 của ma trận AB .
- 2) Với $m = 1$ tìm ma trận X sao cho $A.X = B$.

Bài 8. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$. Tìm các ma trận X thoả mãn $AX = B$.

Bài 9. Giải các hệ phương trình tuyến tính sau :

$$1) \begin{cases} x + y - 2z - 4t = 0 \\ 3x - y + 2z - 8t = 0; \\ x + 4y - z - 7t = 0 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + 3y + z = 2 \\ 2x - y - z - 11t = -9; \\ x + 3y - z + 2t = -2; \\ -3x + 2y + 2z + 17t = 15 \end{cases}$$

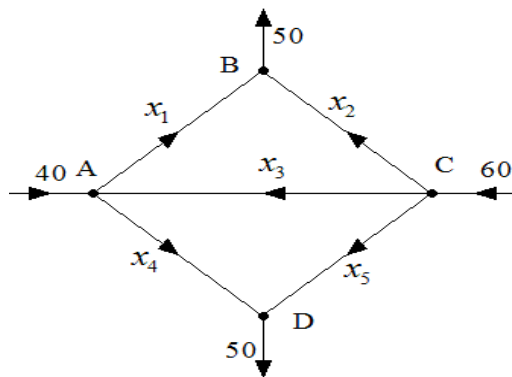
$$3) \begin{cases} x - 4y + 3z = 1 \\ 5x + 5y - z = 2; \\ 7x + 2y + 3z = 10 \\ -2x + 3y + z = 5 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 3 \\ 3x_1 - 6x_2 - 6x_3 + 8x_4 = 2 \end{cases}$$

Bài 10. Xét hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} x - 4y + 7z = a \\ 3y - 5z = b. \\ -2x + 5y - 9z = c \end{cases}$

- 1) Hệ trên có phải là hệ Cramer không ?
- 2) Tìm mối liên hệ giữa các tham số a, b, c để hệ đã cho tương thích.

Bài 11.

Trong một thành phố nọ có một hệ thống đường một chiều như hình vẽ bên, trong đó A, B, C, D là các giao lộ, mũi tên chỉ chiều đi của đường. Người ta đếm lượng xe vào và ra khỏi hệ thống này trong một ngày và thu được kết quả cho như trong hình. Hãy tìm số lượt xe đi qua các đoạn đường AB, BC, CD, DA và AC.



Bài 12. Người ta khảo sát một mô hình di dân giữa vùng đô thị và vùng nông thôn với quy luật như sau: hằng năm có 50% dân số vùng nông thôn chuyển về vùng đô thị và đồng thời có 25% dân số vùng đô thị chuyển về vùng nông thôn sinh sống. Giả sử x, y tương ứng là số dân vùng nông thôn và vùng đô thị ở thời điểm ban đầu ($x, y > 0$).

- 1) Hỏi sau 2 năm dân số của hai vùng là bao nhiêu?
- 2) Tìm công thức tính dân số của hai vùng sau k năm ($k \in \mathbb{N}^*$).