

**Câu 1.** Cho ma trận  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ m & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ .

1) Tính định thức của ma trận  $A$  theo  $m$ . Từ đó suy ra  $\det(2A), \det(A^t \cdot A)$ .

2) Tìm  $m$  để ma trận  $A$  khả nghịch. Khi ma trận  $A$  khả nghịch, hãy tìm hàng 2 của ma trận  $A^{-1}$ .

3) Với  $m = 1$ , hãy tìm ma trận  $X$  sao cho  $2A - 3X = A^t$ .

**Câu 2.** Giải hệ phương trình sau 
$$\begin{cases} x - 4y + 3z - 2t = 4 \\ x - 3y + 3t = 1 \\ y + 3z - 7t = -3 \end{cases}$$

Giải:

**Câu 1.** 1/.  $\det A = -3 + 12 + m - 2 - (-9) - 2m = -m + 16$  (1đ)

$\Rightarrow \det(2A) = 2^3 \cdot \det(A) = 8(-m + 16)$  (do ma trận  $A$  vuông cấp 3) và (1đ)

$\det(A^t \cdot A) = \det(A^t) \cdot \det A = (\det A)^2 = (-m + 16)^2$ . (1đ)

2/.  $A$  khả nghịch khi  $\det A \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 16$  (0,75đ)

Khi đó hàng 2 của mt  $A^{-1}$  là  $\frac{1}{\det A} [A_{12} \ A_{22} \ A_{32}] = \frac{1}{\det A} \left[ - \begin{vmatrix} m & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \ \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \ - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ m & 3 \end{vmatrix} \right]$  (1đ)

$= \frac{1}{-m+16} [6-m \ 5 \ -m-9] = \left[ \frac{6-m}{16-m} \ \frac{5}{16-m} \ \frac{m+9}{m-16} \right]$  (0,5đ)

3/.  $2A - 3X = A^t \Leftrightarrow X = \frac{1}{3}(2A - A^t)$  (0,5đ)

Khi  $m = 1, A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow 2A = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 6 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$  và  $A^t = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$  (0,75đ)

$\Rightarrow X = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 7 \\ 5 & -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4/3 \\ 0 & -1/3 & 7/3 \\ 5/3 & -5/3 & 1/3 \end{bmatrix}$  (0,5đ)

**Câu 2.** Ma trận bổ sung của hệ  $\bar{A} = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -7 & -3 \end{array} \right]$  (0,25đ)

Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng của ma trận để đưa ma trận  $\bar{A}$  về dạng bậc thang, rồi dạng bậc thang thu gọn như sau:

$$\bar{A} \xrightarrow{-H_1+H_2} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -7 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{-H_2+H_3} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & -12 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{matrix} (1/6)H_3; (1/2)H_3+H_2 \\ -(1/2)H_3+H_1 \end{matrix}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right]$$

$\xrightarrow{4H_2+H_1} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right]$  (2đ). Suy ra nghiệm tổng quát của hệ pt đã cho là 
$$\begin{cases} x = -8 \\ y = t - 3 \\ z = 2t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$
 (0,75đ)