KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
BỘ MÔN TOÁN

Đề số: **11**
Ngày thi: 20/08/2019

ĐỀ THI **KẾT THÚC** HỌC PHẦN

Tên Học phần: **Đại số tuyến tính**
Thời gian làm bài: 75 phút
Loại đề thi: **Tự luận**

Câu I (4.0 điểm) Cho ma trận $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & -1 & -2\end{bmatrix}$.

1. (1.5đ) Tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của ma trận A bằng cách sử dụng ma trận phụ hợp.
2. (1.0đ) Tìm ma trận X sao cho $AXA=2I$, trong đó I là ma trận đơn vị cấp 3 (*gợi ý: sử dụng ma trận nghịch đảo tìm được từ ý 1*).
3. (1.5đ) Chứng minh rằng $\lambda=1$ là một giá trị riêng của ma trận A. Tìm các vectơ riêng tương ứng với giá trị riêng $\lambda=1$.

Câu II (3.5 điểm) Trong không gian véctơ $\mathbb{R}^4$ cho tập hợp
$$H=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid y-2t=0\right\}.$$

1) (1.0đ) Chứng minh rằng H là một không gian véctơ con của $\mathbb{R}^4$.
2) (1.5đ) Tìm một cơ sở U của H, và tính số chiều của không gian H.
3) (1.0đ) Chứng minh rằng véctơ $u=(-4;2;-1;1)$ thuộc H và tìm tọa độ của u trong cơ sở U vừa tìm được ở ý 2.

Câu III (2.5 điểm) Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ xác định bởi
$$\forall u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ f(u)=(-y+z;-x+z;x-y).$$

1) (1.0đ) Tìm $Ker(f)$.
2) (1.5đ) Tìm ma trận của ánh xạ f trong cơ sở
$$U=\left\{u_1=(1,0,0),\ u_2=(1,0,1),\ u_3=(1,1,1)\right\} \text{ của } \mathbb{R}^3.$$

.... HẾT ....

Ghi chú: + Cán bộ coi thi không phải giải thích gì thêm
+ Sinh viên không được sử dụng tài liệu

Cán bộ ra đề | Duyệt đề

Vũ Thị Thu Giang | Phan Quang Sáng

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
BỘ MÔN TOÁN

Đề số: **12**
Ngày thi: 20/08/2019

ĐỀ THI **KẾT THÚC** HỌC PHẦN

Tên Học phần: **Đại số tuyến tính**
Thời gian làm bài: 75 phút
Loại đề thi: **Tự luận**

Câu I (4.0 điểm) Cho ma trận $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

1. (1.5đ) Tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của ma trận A bằng cách sử dụng ma trận phụ hợp.
2. (1.0đ) Tìm ma trận X sao cho $AXA=-2I$, trong đó I là ma trận đơn vị cấp 3 (*gợi ý: sử dụng ma trận nghịch đảo tìm được từ ý 1*).
3. (1.5đ) Chứng minh rằng $\lambda=1$ là một giá trị riêng của ma trận A. Tìm các vectơ riêng tương ứng với giá trị riêng $\lambda=1$.

Câu II (3.5 điểm) Trong không gian véctơ $\mathbb{R}^4$ cho tập hợp

$$H=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid y-3t=0\right\}.$$

1) (1.0đ) Chứng minh rằng H là một không gian véctơ con của $\mathbb{R}^4$.
2) (1.5đ) Tìm một cơ sở U của H, và tính số chiều của không gian H.
3) (1.0đ) Chứng minh rằng véctơ $u=(-4;3;-1;1)$ thuộc H và tìm tọa độ của u trong cơ sở U vừa tìm được ở ý 2.

Câu III (2.5 điểm) Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$\forall u=(x;y;z)\in\mathbb{R}^3,\ f(u)=(y-z;x-z;-x+y).$$

1) (1.0đ) Tìm $Ker(f)$.
2) (1.5đ) Tìm ma trận của ánh xạ f trong cơ sở

$$U=\left\{u_1=(1,0,1),\ u_2=(1,0,0),\ u_3=(1,1,1)\right\} \text{ của } \mathbb{R}^3.$$

.... HẾT ....

Ghi chú: + Cán bộ coi thi không phải giải thích gì thêm
+ Sinh viên không được sử dụng tài liệu

Cán bộ ra đề | Duyệt đề

Vũ Thị Thu Giang | Phan Quang Sáng

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
BỘ MÔN TOÁN

Đề số: **02**
Ngày thi: **25/08/2019**

ĐỀ THI **KẾT THÚC** HỌC PHẦN

Tên Học phần: **Đại số tuyến tính**
Thời gian làm bài: 75 phút
Loại đề thi: **Tự luận**

Câu I (2.5 điểm) Cho các ma trận: $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & m \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & -6 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

1) (1.0đ) Tính $A.B^t$ theo m.
2) (1.5đ) Tìm tất cả các giá trị của m để ma trận A khả nghịch. Khi đó hãy tìm phần tử nằm ở hàng 1, cột 2 của ma trận nghịch đảo của ma trận A.

Câu II (1.5 điểm) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} -x+y-4z+t=2 \\ 2x-y+3z \qquad =1 \\ x \qquad +z-t=3 \end{cases}.$$

Câu III (2.5 điểm) Trong không gian vec tơ $\mathbb{R}^4$ cho tập hợp

$$W=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x-2y-3z+4t=0\right\}.$$

1) (1.0đ) Chứng minh rằng W là một không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^4$.
2) (1.5đ) Tìm một cơ sở của W.

Câu IV (2.5 điểm) Cho ánh xạ tuyến tính

$$f: \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$
$$u=(x,y,z)\mapsto f(u)=(x-2z,6y+3x)$$

1) (1.0đ) Tìm hạt nhân của ánh xạ tuyến tính f.
2) (1.5đ) Tìm ma trận của f trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và cơ sở $S=\{v_1=(2,0);v_2=(1,2)\}$ của $\mathbb{R}^2$.

Câu V (1.0 điểm) Trong không gian véctơ 3 chiều V, cho cơ sở $U=\{u_1,u_2,u_3\}$ và hệ véctơ $S=\{v_1,v_2,v_3\}$ trong đó $v_1=u_1-u_2, v_2=u_1+u_2-u_3, v_3=3u_2+u_3$. Chứng minh rằng hệ véctơ S là một cơ sở của V.

.... HẾT ....

Ghi chú: + Cán bộ coi thi không phải giải thích gì thêm
+ Sinh viên không được sử dụng tài liệu

Cán bộ ra đề
Nguyễn Hà Thanh

Duyệt đề
Vũ Thu Giang

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
BỘ MÔN TOÁN

Đề số: **03**
Ngày thi: **25/08/2019**

ĐỀ THI **KẾT THÚC** HỌC PHẦN

Tên Học phần: **Đại số tuyến tính**
Thời gian làm bài: 75 phút
Loại đề thi: **Tự luận**

Câu I (2.5 điểm) Cho các ma trận: $A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & -3 & -1\\ m & 1 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-3 & 8 & -2\\ 0 & 2 & -2\end{bmatrix}$.

1) (1.0đ) Tính $B.A^t$ theo m.
2) (1.5đ) Tìm tất cả các giá trị của m để ma trận A khả nghịch. Khi đó hãy tìm phần tử nằm ở hàng 2, cột 1 của ma trận nghịch đảo của ma trận A.

Câu II (1.5 điểm) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+\ \ y-4z+t=3\\ 3x+2y-2z \quad =1\\ -x-2y+9z+t=-11\end{cases}.$$

Câu III (2.5 điểm) Trong không gian vec tơ $\mathbb{R}^4$ cho tập hợp

$$W=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid 3x-y-2z+5t=0\right\}.$$

1) (1.0đ) Chứng minh rằng W là một không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^4$.
2) (1.5đ) Tìm một cơ sở của W.

Câu IV (2.5 điểm) Cho ánh xạ tuyến tính

$$f: \quad \mathbb{R}^3 \quad \to \quad \mathbb{R}^2$$
$$u=(x,y,z)\mapsto f(u)=(z-2x,2y+4z)$$

1) (1.0đ) Tìm hạt nhân của ánh xạ tuyến tính f.
2) (1.5đ) Tìm ma trận của f trong cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và cơ sở $S=\{v_1=(2,0);v_2=(1,2)\}$ của $\mathbb{R}^2$.

Câu V (1.0 điểm) Trong không gian véctơ 3 chiều V, cho cơ sở $U=\{u_1,u_2,u_3\}$ và hệ véctơ $S=\{v_1,v_2,v_3\}$ trong đó $v_1=u_2-u_3, v_2=-u_1+u_2+u_3, v_3=3u_1+u_2+u_3$. Chứng minh rằng hệ véctơ S là một cơ sở của V.

.... HẾT ....
Ghi chú: + Cán bộ coi thi không phải giải thích gì thêm
+ Sinh viên không được sử dụng tài liệu

Cán bộ ra đề
Nguyễn Hà Thanh

Duyệt đề
Vũ Thu Giang

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
BỘ MÔN TOÁN

Đề số: **11**
Ngày thi: 26/08/2019

ĐỀ THI **KẾT THÚC** HỌC PHẦN

Tên Học phần: **Đại số tuyến tính**
Thời gian làm bài: 75 phút
Loại đề thi: **Tự luận**

Câu I (3.0 điểm) Cho các ma trận $A=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$.

a) (1.5đ) Tìm ma trận X sao cho $A^2+2X=B$.
b) (1.5đ) Tìm các giá trị riêng và các vectơ riêng của ma trận *A*.

Câu II (2.0 điểm) Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y-2z-t=1 \\ 3x-y+z+3t=2 \\ 2x-2y+2z+mt=1 \end{cases}.$$

a) (1.0đ) Với giá trị nào của m thì hệ trên có nghiệm?
b) (1.0đ) Giải hệ trên khi $m=1$ (*gợi ý: có thể sử dụng kết quả biến đổi ở ý a*).

Câu III (2.0 điểm) Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^3$ cho hệ vectơ

$$U=\{u_1=(1,2,2);\ u_2=(0,3,2);\ u_3=(-2,1,0)\}.$$

a) (0.75đ) Chứng minh U là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.
b) (1.25đ) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở U sang cơ sở chính tắc của không gian $\mathbb{R}^3$.

Câu IV (3.0 điểm) Cho ánh xạ $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$\forall u=(x;y;z;t)\in\mathbb{R}^4,\ f(u)=(y+2z;\ x-y-t).$$

a) (1.0đ) Chứng minh rằng f là một ánh xạ tuyến tính.
b) (2.0đ) Tìm $Ker(f)$. Hãy chỉ ra một cơ sở và tính số chiều của $Ker(f)$, từ đó suy ra hạng của ánh xạ tuyến tính f.

.... HẾT ....

Ghi chú: + Cán bộ coi thi không phải giải thích gì thêm
+ Sinh viên không được sử dụng tài liệu

Cán bộ ra đề   Duyệt đề

Đỗ Thị Huệ   Vũ Thu Giang

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
BỘ MÔN TOÁN

Đề số: **12**
Ngày thi: 26/08/2019

ĐỀ THI **KẾT THÚC** HỌC PHẦN

Tên Học phần: **Đại số tuyến tính**
Thời gian làm bài: 75 phút
Loại đề thi: **Tự luận**

Câu I (3.0 điểm) Cho các ma trận $A=\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$.

a) (1.5đ) Tìm ma trận X sao cho $B-2X=A^2$.
b) (1.5đ) Tìm các giá trị riêng và các vectơ riêng của ma trận *A*.

Câu II (2.0 điểm) Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x-2y+z-t=2 \\ 3x+y-z+3t=5 \\ 2x+3y-z+mt=4 \end{cases}.$$

a) (1.0đ) Với giá trị nào của m thì hệ trên có nghiệm?
b) (1.0đ) Giải hệ trên khi $m=3$ (*gợi ý: có thể sử dụng kết quả biến đổi ở ý a*).

Câu III (2.0 điểm) Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^3$ cho hệ vectơ

$$U=\{u_1=(1,2,2);\ u_2=(0,3,2);\ u_3=(2,0,2)\}.$$

a) (0.75đ) Chứng minh U là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.
b) (1.25đ) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở U sang cơ sở chính tắc của không gian $\mathbb{R}^3$.

Câu IV (3.0 điểm) Cho ánh xạ $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$\forall u=(x;\ y;\ z;\ t)\in\mathbb{R}^4,\ f(u)=(x-y-z;\ y+3t).$$

a) (1.0đ) Chứng minh rằng f là một ánh xạ tuyến tính.
b) (2.0đ) Tìm $Ker(f)$. Hãy chỉ ra một cơ sở và tính số chiều của $Ker(f)$, từ đó suy ra hạng của ánh xạ tuyến tính f.

.... HẾT ....

Ghi chú: + Cán bộ coi thi không phải giải thích gì thêm
+ Sinh viên không được sử dụng tài liệu

Cán bộ ra đề | Duyệt đề

Đỗ Thị Huệ | Vũ Thu Giang

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN **BỘ MÔN TOÁN** Đáp án đề thi số: **11**	**ĐÁP ÁN ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC PHẦN** **Tên học phần: Đại số tuyến tính**

Ngày thi: 20/08/2019

Ghi chú : Mọi cách giải khác đáp án mà đúng đều được đủ điểm.

Câu		Đáp án vắn tắt	Điểm
Câu I 4.0 đ	1	$\det A = 3 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$	0.25
		$A_{11} = 2$ $A_{21} = 1$ $A_{31} = -1$ $A_{12} = 4$ $A_{22} = -1$ $A_{32} = -2$ $A_{13} = -1$ $A_{23} = 1$ $A_{33} = -1$	0.25*3
		Mt nghịch đảo $A^{-1} = \frac{1}{\det A}.A^* = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$	0.5
	2	$X = 2\left(A^{-1}\right)^2 \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{-2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & 0 \end{bmatrix}$	0.5*2
	3	Tính $A - I$, $\det(A - I) = 0 \Rightarrow$ 1 là giá trị riêng của A.	0.25 0.25
		Gọi $u = [x \quad y \quad z]^t$ là véc tơ riêng của A ứng với giá trị riêng 1. Khi đó $(A - I)u = \theta$.	0.25
		$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	0.25*2
		$\begin{cases} x - y - 3z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$. Vậy $u = [x \quad x \quad 0]^t$, $x \neq 0$.	0.25
Câu II 3.5 đ	1	$H = \{(x;y;z;t) \mid y = 2t\} = \{(x;2t;z;t) \mid x,t,z \in \mathbb{R}\}$	0.25
		$= \{x(1;0;0;0) + t(0;2;0;1) + z(0;0;1;0) \mid x,t,z \in \mathbb{R}\}$	0.25
		$= Span\{u_1 = (1;0;0;0), u_2 = (0;2;0;1), u_3 = (0;0;1;0)\}$.	0.25
		Suy ra H là kgvt con của $\mathbb{R}^4$.	0.25
	2	*Ta có $\{u_1 = (1;0;0;0), u_2 = (0;2;0;1), u_3 = (0;0;1;0)\}$ là hệ sinh của H .	0.5
		CM $\{u_1 = (1;0;0;0), u_2 = (0;2;0;1), u_3 = (0;0;1;0)\}$ đltt.	0.5
		$\{u_1 = (1;0;0;0), u_2 = (0;2;0;1), u_3 = (0;0;1;0)\}$ là cơ sở của H	0.25
		$\Rightarrow \dim(H) = 3$	0.25
	3	Chứng minh $u \in H$.	0.5
		Ta có $u = -4u_1 + u_2 - u_3$. Tọa độ : $(-4;1;-1)$	0.5
Câu III 2.5 đ	1	$\ker f = \{(x;y;z) \mid f(x;y;z) = \theta\}$ $= \{(x;y;z) \mid (-y+z; -x+z; x-y) = (0;0;0)\}$ $= \{(z;z;z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.	0.25 0.25 0.5
	2	$f(u_1) = (0;-1;1); f(u_2) = (1;0;1); f(u_3) = (0;0;0)$	0.5
		$f(u_1) = c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 \Leftrightarrow c_1 = -1, c_2 = 2, c_3 = -1$ Tọa độ của $f(u_2)$ là $(0;1;0)$. Tọa độ của $f(u_3)$ là $(0;0;0)$.	0.25*3
		Ma trận $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.	0.25

GV ra đề: Vũ Thị Thu Giang

GV soạn đáp án: Nguyễn Hà Thanh
Duyệt ĐA: Vũ Thị Thu Giang

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN **BỘ MÔN TOÁN** Đáp án đề thi số: **12**	**ĐÁP ÁN ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC PHẦN** **Tên học phần: Đại số tuyến tính**

Ngày thi: **20/08/2019**

Ghi chú : Mọi cách giải khác đáp án mà đúng đều được đủ điểm.

Câu		**Đáp án vắn tắt**	**Điểm**
Câu I 4.0 đ	1	$\det A = 3 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$	0.25
		$A_{11} = 2 \quad A_{21} = 4 \quad A_{31} = -1$ $A_{12} = 1 \quad A_{22} = -1 \quad A_{32} = 1$ $A_{13} = -1 \quad A_{23} = -2 \quad A_{33} = -1$	0.25*3
		Mt nghịch đảo $A^{-1} = \frac{1}{\det A}.A^* = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$	0.5
	2	$X = -2\left(A^{-1}\right)^2 \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} -2 & \frac{-4}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$	0.5*2
	3	Tính $A - I$, $\det(A-I) = 0 \Rightarrow$ 1 là giá trị riêng của A.	0.25 0.25
		Gọi $u = [x \quad y \quad z]^t$ là véc tơ riêng của A ứng với giá trị riêng 1. Khi đó $(A-I)u = \theta$.	0.25
		$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	0.25*2
		$\begin{cases} -x - 3z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6y \\ z = -2y \end{cases}$. Vậy $u = [6y \quad y \quad -2y]^t$, $y \neq 0$.	0.25

Câu II 3.5 đ	1	$H = \{(x;y;z;t) \mid y = 3t\} = \{(x;3t;z;t) \mid x,t,z \in \mathbb{R}\}$	0.25
		$= \{x(1;0;0;0) + t(0;3;0;1) + z(0;0;1;0) \mid x,t,z \in \mathbb{R}\}$	0.25
		$= Span\{u_1 = (1;0;0;0), u_2 = (0;3;0;1), u_3 = (0;0;1;0)\}$.	0.25
		Suy ra H là kgvt con của $\mathbb{R}^4$.	0.25
	2	*Ta có $\{u_1 = (1;0;0;0), u_2 = (0;3;0;1), u_3 = (0;0;1;0)\}$ là hệ sinh của H .	0.5
		CM $\{u_1 = (1;0;0;0), u_2 = (0;3;0;1), u_3 = (0;0;1;0)\}$ đltt.	0.5
		$\{u_1 = (1;0;0;0), u_2 = (0;3;0;1), u_3 = (0;0;1;0)\}$ là cơ sở của H	0.25
		$\Rightarrow \dim(H) = 3$	0.25
	3	Chứng minh $u \in H$.	0.5
		Ta có $u = -4u_1 + u_2 - u_3$. Tọa độ : $(-4;1;-1)$	0.5
Câu III 2.5 đ	1	$\ker f = \{(x;y;z) \mid f(x;y;z) = \theta\}$ $= \{(x;y;z) \mid (y-z;x-z;-x+y) = (0;0;0)\}$ $= \{(z;z;z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.	0.25 0.25 0.5
	2	$f(u_1) = (-1;0;-1)$; $f(u_2) = (0;1;-1)$; $f(u_3) = (0;0;0)$	0.5
		$f(u_1) = c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 \Leftrightarrow c_1 -1, c_2 = 0, c_3 = 0$ Tọa độ của $f(u_2)$ là $(-2;1;1)$. Tọa độ của $f(u_3)$ là $(0;0;0)$.	0.25*3
		Ma trận $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.	0.25

GV ra đề: Vũ Thị Thu Giang

GV soạn đáp án: Nguyễn Hà Thanh
Duyệt ĐA: Vũ Thị Thu Giang

HỌC VIỆN NÔNG NGHIỆP VN KHOA CNTT Đề số: **02** Ngày thi: 25/08/2019	**ĐÁP ÁN ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC PHẦN** **Tên học phần: đại số tuyến tính** *Thời gian làm bài: 75 phút* ***Loại đề thi: Không sử dụng tài liệu***

Ghi chú : Mọi cách giải khác đáp án mà đúng đều được đủ điểm.

Câu		Đáp án vắn tắt	Điểm
I 2.5đ	1	Viết đúng B^t được 0,25đ	0.25
		$AB^t = \begin{bmatrix} 15 & -6 \\ -16 & 8 \\ m & -2 \end{bmatrix}$ 2 phần tử đúng đc 0.25đ;	0.75
	2	$\det(A) = -5m + 5$	0.5
		$A\ kn \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$	0.5
		Với $m \neq 1$ thì phần tử thuộc hàng 1 cột 2 của ma trận nghich đảo của A là $\dfrac{1}{\det(A)}A_{21} = \dfrac{-\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & m \end{vmatrix}}{-5m+5} = \dfrac{2m}{-5m+5}$	0.5
II 1.5đ		$\overline{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$	0.25
		$\xrightarrow[h3+h1\to h3]{h2+2h1\to h2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$	0.5
		$\xrightarrow{h3-h1\to h3} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$	0.25
		Nghiệm: $x = -3$ (0.25); $y = 3t + 5; z = t; t \in R$	0.5
III 2.5đ	1	$W \neq \Phi$	0.25
		$u + v; ku$	0.25
		CM $u + v \in W$	0.25
		CM $ku \in W$	0.25
	2	$u \in W \Rightarrow u = (2y + 3z - 4t; y; z; t)$	0.25
		$u = y(2;1;0;0) + z(3;0;1;0) + t(-4;0;0;1)$	0.5
		hệ sinh $U = \{(2;1;0;0),(3;0;1;0),(-4;0;0;1)\}$	0.25
		Chứng minh U độc lập tuyến tính, suy ra là cơ sở.	0.5
IV 2.5đ	1	$u = (x; y; z) \in Ker(f) \Leftrightarrow f(u) = \theta$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2z = 0 \\ 6y + 3x = 0 \end{cases}$	0.25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = -z \end{cases}$	0.25
		$u = (2z, -z, z)$	0.25
		$Ker(f) = \{u = (2z, -z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$	0.25
	2	$f(e_1) = (1;3), f(e_2) = (0;6), f(e_3) = (-2;0)$	0.5
		$(1;3) = -\dfrac{1}{4}v_1 + \dfrac{3}{2}v_2$	0.25
		$(0;6) = -\dfrac{3}{2}v_1 + 3v_2$	0.25
		$(-2;0) = -v_1 + 0v_2$	0.25
		Ma trận của f : $\begin{bmatrix} -1/4 & -3/2 & -1 \\ 3/2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$	0.25
V 1.0đ		Xét $l_1v_1 + l_2v_2 + l_3v_3 = \theta$ $\Leftrightarrow (l_1 + l_2)u_1 + (-l_1 + l_2 + 3l_3)u_2 + (-l_2 + l_3)u_3 = \theta$ $\Leftrightarrow \begin{cases} l_1 + l_2 = 0 \\ -l_1 + l_2 + 3l_3 = 0 \\ -l_2 + l_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow l_1 = l_2 = l_3 = 0$ hệ S độc lập tuyến tính.	0.25 0.5
		mà $\dim V = 3$ Vậy hệ vec tơ S là một cơ sở của V .	0.25

GV ra đề: *Nguyễn Hà Thanh.* GV soạn đáp án : *Nguyễn Thùy Dung*

Duyệt đáp án: Vũ Thị Thu Giang

HỌC VIỆN NÔNG NGHIỆP VN KHOA CNTT Đề số: **03** Ngày thi: 25/08/2019	**ĐÁP ÁN ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC PHẦN** **Tên học phần: đại số tuyến tính** *Thời gian làm bài: 75 phút* ***Loại đề thi: Không sử dụng tài liệu***

Ghi chú : Mọi cách giải khác đáp án mà đúng đều được đủ điểm.

Câu		Đáp án vắn tắt	Điểm
I 2.5đ	1	Viết đúng A^t được 0,25đ	0.25
		$BA^t = \begin{bmatrix} 17 & -22 & -3m \\ 2 & -4 & -6 \end{bmatrix}$ 2 phần tử đúng đc 0.25đ;	0.75
	2	$\det(A) = m + 11$	0.5
		A $kn \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -11$	0.5
	2	Với $m \neq -11$ thì phần tử thuộc hàng 2 cột 1 của ma trận nghich đảo của A là $\frac{1}{\det(A)} A_{12} = \frac{-\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ m & 4 \end{vmatrix}}{-5m+5} = \frac{-m}{m+11}$	0.5
II 1.5đ		$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 9 & 1 & -11 \end{bmatrix}$	0.25
		$\xrightarrow[h3+h1 \to h3]{h2-3h1 \to h2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 10 & -3 & -8 \\ 0 & -1 & 5 & 2 & -8 \end{bmatrix}$	0.5
		$\xrightarrow{h3-h2 \to h3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 10 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$	0.25
		Nghiệm: $x = -5 - 4t$ (0.25); $y = 7t + 8; z = t; t \in R$	0.5
III 2.5đ	1	$S \neq \Phi$	0.25
		$u + v; ku$	0.25
		CM $u + v \in S$	0.25
		CM $ku \in S$	0.25
	2	$u \in \mathrm{W} \Rightarrow u = (\mathrm{x}; 3\mathrm{x} - 2\mathrm{z} + 5t; z; t)$	0.25
		$u = x(1;3;0;0) + z(0;-2;1;0) + t(0;5;0;1)$	0.5
		hệ sinh $U = \{(1;3;0;0), (0;-2;1;0), (0;5;0;1)\}$	0.25
		Chứng minh U độc lập tuyến tính, suy ra là cơ sở	0.5
IV 2.5đ	1	$u = (x;y;z) \in Ker(f) \Leftrightarrow f(u) = \theta$ $\Leftrightarrow \begin{cases} z - 2x = 0 \\ 2y + 4z = 0 \end{cases}$	0.25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 2x \\ y = -4x \end{cases}$	0.25
		$u = (x; -4x; 2x)$	0.25
		$Ker(f) = \{u = (x; -4x; 2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$	0.25
	2	$f(e_1) = (-2;0), f(e_2) = (0;2), f(e_3) = (1;4)$	0.5
		$(-2;0) = -v_1 + 0v_2$	0.25
		$(0;2) = -\frac{1}{2}v_1 + v_2$	0.25
		$(-2;0) = -\frac{1}{2}v_1 + 2v_2$	0.25
		Ma trận của f : $\begin{bmatrix} -1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	0.25
V 1.0đ		Xét $l_1v_1 + l_2v_2 + l_3v_3 = \theta$ $\Leftrightarrow (-l_2 + 3l_3)\mathrm{u}_1 + (l_1 + l_2 + l_3)u_2 + (-l_1 + l_2 + l_3)u_3 = \theta$ $\Leftrightarrow \begin{cases} -l_2 + 3l_3 = 0 \\ l_1 + l_2 + l_3 = 0 \\ -l_1 + l_2 + l_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow l_1 = l_2 = l_3 = 0$ hệ S độc lập tuyến tính	0.25 0.5
		mà $\dim V = 3$ Vậy hệ vec tơ S là một cơ sở của V	0.25

GV ra đề: *Nguyễn Hà Thanh.* GV soạn đáp án : *Nguyễn Thùy Dung*

Duyệt đáp án: Vũ Thị Thu Giang

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN **BỘ MÔN TOÁN**	ĐÁP ÁN ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC PHẦN Tên học phần: Đại số tuyến tính Đáp án đề số : **11**

(Ngày thi: 26/08/2019)

Ghi chú : Mọi cách giải khác đáp án mà đúng đều được đủ điểm.

Câu		**Đáp án vắn tắt**	**Điểm**
I **3.0đ**	a	$X=\frac{1}{2}(B-A^2); A^2=\begin{bmatrix}13 & 12\\ -4 & -3\end{bmatrix}$	0.5 0.5
		$\Rightarrow X=\begin{bmatrix}-11/2 & -4\\ 3/2 & 0\end{bmatrix}$	0.5
	b	$\det(A-\lambda I)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}4-\lambda & 3\\ -1 & -\lambda\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda_1=1\\ \lambda_2=3\end{array}\right.$	0.25 0.25
		Nếu $\lambda_1=1 \Rightarrow \begin{bmatrix}3 & 3\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\theta \Leftrightarrow x+y=0 \Leftrightarrow x=-y$ Véc tơ riêng $v_1=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-y\\ y\end{bmatrix}=y\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}(y\neq 0)$	0.25 0.25
		Nếu $\lambda_2=3 \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\theta \Leftrightarrow x+3y=0 \Leftrightarrow x=-3y$ Véc tơ riêng $v_2=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3y\\ y\end{bmatrix}=y\begin{bmatrix}-3\\ 1\end{bmatrix}(y\neq 0)$	0.25 0.25
II **2.0đ**	a	$A^{bs}=\left[\begin{array}{cccc\|c}1 & 1 & -2 & -1 & 1\\ 3 & -1 & 1 & 3 & 2\\ 2 & -2 & 2 & m & 1\end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc\|c}1 & 1 & -2 & -1 & 1\\ 0 & 4 & -7 & -6 & 1\\ 0 & 4 & -6 & -2-m & 1\end{array}\right]$	0.25 0.25
		$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc\|c}1 & 1 & -2 & -1 & 1\\ 0 & 4 & -7 & -6 & 1\\ 0 & 0 & -1 & m-4 & 0\end{array}\right]$	0.25
		Do $r(A)=r(A^{bs})=3<4\ \forall m \Rightarrow$ Hệ có nghiệm với mọi m	0.25
	b	Với $m=1$ hệ $\Leftrightarrow \begin{cases}x+y-2z-t=1\\ 4y-7z-6t=1\\ -z-3t=0\end{cases}$	0.5
		$\Leftrightarrow \begin{cases}x=-5t/4+3/4\\ y=-15t/4+1/4\\ z=-3t; t\in R\end{cases}$	0.5
III **2.0đ**	a	Chứng minh U đltt: g/s $\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3=\theta$ $\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1-2\lambda_3=0\\ 2\lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3=0\\ 2\lambda_1+2\lambda_2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1=0\\ \lambda_2=0\\ \lambda_3=0\end{cases}$ Do dim R^3=3= số véc tơ của họ U nên U là cơ sở của R^3	0.25 0.25 0.25
	b	$gs: (1,0,0)=au_1+bu_2+cu_3 \Leftrightarrow \begin{cases}a-2c=1\\ 2a+3b+c=0\\ 2a+2b=0\end{cases}$ $\Rightarrow a=-1; b=1; c=-1$	0.25 0.25
		Tương tự $(0,1,0)=du_1+eu_2+fu_3 \Rightarrow d=-2; e=2; f=-1$	0.25
		$(0,0,1)=mu_1+nu_2+pu_3 \Rightarrow m=3; n=-2,5; p=1,5$	0.25
		Ma trận chuyển cơ sở : $A=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 3\\ 1 & 2 & -2,5\\ -1 & -1 & 1,5\end{bmatrix}$	0.25
IV **3.0đ**	a	Viết đúng $u+v$, ku	0.25
		Chứng minh đúng $f(u+v)=f(u)+f(v)$	0.5
		$f(ku)=kf(u)$	0.25
	b	$u=(x,y,z,t)\in \mathrm{Ker}f \Leftrightarrow f(u)=\theta$ $\Leftrightarrow \begin{cases}y+2z=0\\ x-y-t=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-2z\\ x=-2z+t\end{cases}$	0.25 0.25
		Vậy $Kerf=\left\{u=(x,y,z,t) \mid \begin{cases}y=-2z\\ x=-2z+t\end{cases}\right\}$	0.25
		$u\in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow u=(-2z+t,-2z,z,t)$ $=(-2z,-2z,z,0)+(t,0,0,t)$ $=z(-2,-2,1,0)+t(1,0,0,1)$ Vậy $\{u_1=(-2,-2,1,0); u_2=(1,0,0,1)\}$ là hệ sinh của Ker(f)	0.25 0.25
		Hai vec tơ $\{u_1;u_2\}$ không tỷ lệ nên độc lập tuyến tính Vậy $\{u_1;u_2\}$ là cơ sở của Ker(f) và $\dim(Kerf)=2$	0.25 0.25
		$\dim(\mathrm{Im} f)=\dim(R^4)-\dim(Kerf)=4-2=2 \Rightarrow r(f)=2$	0.25

Cán bộ ra đề: Đỗ Thị Huệ

Cán bộ soạn đáp án — Duyệt đáp án

Nguyễn Thủy Hằng — Lê Thị Diệu Thùy

<table>
<tr><td>KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN
BỘ MÔN TOÁN</td><td>ĐÁP ÁN ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC PHẦN
Tên học phần: Đại số tuyến tính
Đáp án đề số : 12</td></tr>
</table>

(Ngày thi: 26/08/2019)

Ghi chú : Mọi cách giải khác đáp án mà đúng đều được đủ điểm.

<table>
<tr><th>Câu</th><th></th><th>Đáp án vắn tắt</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td rowspan="6">I
3.0đ</td><td rowspan="2">a</td><td>$X=\frac{1}{2}(B-A^2); A^2=\begin{bmatrix}3&6\\2&7\end{bmatrix}$</td><td>0.5
0.5</td></tr>
<tr><td>$\Rightarrow X=\begin{bmatrix}-1/2&-9/2\\-3/2&-1\end{bmatrix}$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td rowspan="4">b</td><td>$\det(A-\lambda I)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}-\lambda&3\\1&2-\lambda\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\lambda_1=-1\\\lambda_2=3\end{array}\right.$</td><td>0.25
0.25</td></tr>
<tr><td>Nếu $\lambda_1=-1\Rightarrow\begin{bmatrix}1&3\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\theta\Leftrightarrow x+3y=0\Leftrightarrow x=-3y$
Véc tơ riêng $v_1=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3y\\y\end{bmatrix}=y\begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix}(y\neq 0)$</td><td>0.25
0.25</td></tr>
<tr><td>Nếu $\lambda_2=3\Rightarrow\begin{bmatrix}-3&3\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\theta\Leftrightarrow x-y=0\Leftrightarrow x=y$
Véc tơ riêng $v_2=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y\\y\end{bmatrix}=y\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(y\neq 0)$</td><td>0.25
0.25</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5">II
2.0đ</td><td rowspan="3">a</td><td>$A^{bs}=\left[\begin{array}{cccc|c}1&-2&1&-1&2\\3&1&-1&3&5\\2&3&-1&m&4\end{array}\right]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{cccc|c}1&-2&1&-1&2\\0&-7&4&-6&1\\0&-7&3&-2-m&0\end{array}\right]$</td><td>0.25
0.25</td></tr>
<tr><td>$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{cccc|c}1&-2&1&-1&2\\0&-7&4&-6&1\\0&0&1&m-4&1\end{array}\right]$</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>Ta thấy $r(A)=r(A^{bs})=3<4\forall m$
Hệ luôn có nghiệm với mọi m</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td rowspan="2">b</td><td>Với $m=3$ hệ $\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y+z-t=2\\-7y+4z-6t=1\\z-t=1\end{cases}$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-4t/7+13/7\\y=-2t/7+3/7\\z=t+1; t\in R\end{cases}$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td rowspan="5">III
2.0</td><td>a</td><td>Chứng minh U đltt: g/s $\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3=\theta$
$\Leftrightarrow\begin{cases}-\lambda_1+2\lambda_3=0\\2\lambda_1+3\lambda_2=0\\2\lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1=0\\\lambda_2=0\\\lambda_3=0\end{cases}$
Do dim R^3=3 =số vec tơ của hệ U nên U là cơ sở của R^3</td><td>0.25
0.25
0.25</td></tr>
<tr><td rowspan="4">b</td><td>$gs: (1,0,0)=au_1+bu_2+cu_3\Leftrightarrow\begin{cases}a+2c=1\\2a+3b=0\\2a+2b+2c=0\end{cases}$
$\Rightarrow a=3; b=-2; c=-1$</td><td>0.25
0.25</td></tr>
<tr><td>$(0,1,0)=du_1+eu_2+fu_3\Rightarrow d=2; e=-1; f=-1$</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>$(0,0,1)=mu_1+nu_2+pu_3\Rightarrow m=-3; n=2; p=1{,}5$</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>Ma trận chuyển cơ sở : $A=\begin{bmatrix}3&2&-3\\-2&-1&2\\-1&-1&1{,}5\end{bmatrix}$</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td rowspan="8">IV
3.0đ</td><td rowspan="3">a</td><td>Viết đúng $u+v,\ ku$</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>Chứng minh đúng $f(u+v)=f(u)+f(v)$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>$f(ku)=kf(u)$</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td rowspan="5">b</td><td>$u=(x,y,z,t)\in Kerf\Leftrightarrow f(u)=\theta$
$\Leftrightarrow x-y-z=0; y+3t=0$
$\Leftrightarrow x=-3t+z; y=-3t$</td><td>0.25
0.25</td></tr>
<tr><td>Vậy $Kerf=\left\{u=(x,y,z,t)\mid\begin{cases}y=-3t\\x=z-3t\end{cases}\right\}$</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>$u\in Ker(f)\Leftrightarrow u=(z-3t,-3t,z,t)$
$=(z,0,z,0)+(-3t,-3t,0,t)$
$=z(1,0,1,0)+t(-3,-3,0,1)$
Vậy $\{u_1=(1,0,1,0); u_2=(-3,-3,0,1)\}$ là hệ sinh của Kerf</td><td>0.25
0.25</td></tr>
<tr><td>Hai véc tơ $u_1;u_2$ không tỷ lệ nên họ $\{u_1;u_2\}$ đltt.</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>Vậy $\{u_1;u_2\}$ là cơ sở của Kerf và $\dim(Kerf)=2$
$\dim(\mathrm{Im}\, f)=\dim(R^4)-\dim(Kerf)=4-2=2\Rightarrow r(f)=2$</td><td>0.25
0.25</td></tr>
</table>

Cán bộ ra đề: Đỗ Thị Huệ Cán bộ soạn đáp án Nguyễn Thủy Hằng

Duyệt đáp án Lê Thị Diệu Thùy