BÀI TẬP ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

1. MA TRẬN.

1.1. Cho A là ma trận vuông cấp n thỏa mãn $A^2 - A = I_n$. Chứng minh rằng A có ma trận nghịch đảo và tìm ma trận nghịch đảo của A.

1.2. Cho M, N là các ma trận vuông cấp 3 thỏa mãn $MN = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 2 \\ 6 & -7 & 2 \\ 6 & -6 & 1 \end{bmatrix}$

a. Tính $(MN)^2$.

b. Chứng minh NM khả nghịch. Tìm ma trận nghịch đảo của NM.

1.3. Cho A là ma trận cấp n thỏa mãn $A^2 = A$. Chứng minh rằng ma trận $B = 2A - I$ có ma trận nghịch đảo.

1.4. Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}; a, b, c \in R$$

a. Chứng minh rằng nếu $A^{2016} = 0$ thì $A^2 = 0$

b. Tìm a, b, c sao cho tồn tại $n \in N^*$ để

$$A^n = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.5. Tính

a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n$

b. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^n$

1.6. Tính lũy thừa bậc n của $A = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$.

1.7. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 2017 & 1 & -2017 \\ 2016 & 2 & -2017 \\ 2016 & 1 & -2016 \end{bmatrix}$. Xác định các phần tử nằm trên đường chéo chính của ma trận $S = I + A + A^2 + \cdots + A^{2017}$.

1.8. Cho A là ma trận vuông cấp n

$$A = \begin{pmatrix} 2015 & 2016 & \cdots & 2016 \\ 2016 & 2015 & \cdots & 2016 \\ \dots & \dots & \cdots & \dots \\ 2016 & 2016 & \cdots & 2015 \end{pmatrix}$$

Tính A^k, với k là số nguyên dương.

1.9. Cho $A, B \in M_n(R)$ thỏa mãn $A^2 = A + B + BA$. Chứng minh rằng $AB = BA$.

1.10. Cho $A, B \in M_n(R)$ thỏa mãn $AB = 0, B \neq 0$. Chứng minh rằng tồn tại ma trận $C \in M_n(R)$ khác ma trận 0 thỏa mãn $AC = CA = 0$.

1.11. Cho ma trận vuông *A*, *B* cấp n. Vết của ma trận *A* là tổng tất cả các phần tử trên đường chéo chính của *A*, kí hiệu $Tr(A)$. Chứng minh rằng:

a. $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$.

b. $Tr(kA) = kTr(A),\ k \in \mathbb{R}$.

c. $Tr(AB) = Tr(BA)$

1.12. Chứng minh rằng không tồn tại các ma trận A, B, C, D vuông cấp n sao cho $AC + BD = I$ và $CA + BD = 0$, I là ma trận đơn vị, 0 là ma trận không.

1.13. (Đẳng thức Wagner)

a. Chứng minh rằng với mọi ma trận A, B, C vuông cấp 2 ta luôn có

$$(AB - BA)^2 C - C(AB - BA)^2 = 0$$

b. Chứng minh rằng với mọi ma trận A, B, C vuông cấp 2 ta luôn có

$$(AB - BA)^{2016} C - C(AB - BA)^{2016} = 0$$

1.14. Tùy theo giá trị của m, hãy tìm hạng của ma trận $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ m & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & m & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

1.15. Tìm m để hạng của ma trận sau nhỏ nhất $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ m & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

1.16. Cho ma trận vuông cấp *n*: $A = \begin{bmatrix} 1 & m & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & ... & 1 & m \\ m & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tìm m để hạng của ma trận *A* nhỏ hơn *n*.

1.17. Chứng minh rằng mọi ma trận hạng r đều có thể phân tích được thành tổng của r ma trận có hạng bằng 1.

1.18. Giả sử *A*, *B* là các ma trận vuông cấp *n* thỏa mãn $AB = BA,\ A^{2016} = 0,\ B^{2017} = 0$.

a. Chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên k để $(A+B)^k = 0$.

b. Chứng minh rằng $r(I + A + B) = r(I - A - B) = n$.

2. ĐỊNH THỨC

2.1. Giải phương trình: $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 14 & 64 \end{vmatrix} = 0$

2.2. Tính định thức :

a. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix}$

b. $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix}$

2.3. Tính $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ trong đó a,b,c là 3 nghiệm của phương trình bậc 3 : $x^3 + px + q = 0$.

2.4. Cho *m, n, p, q* là các nghiệm của phương trình $x^4 - x + 1 = 0$ và

$$A = \begin{bmatrix} m+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & n+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & p+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & q+1 \end{bmatrix}$$

Tính $\det(A)$.

2.5. Tính các định thức cấp *n* sau :

a. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ . & . & . & \dots & . \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \end{vmatrix}$;

b. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ . & . & . & \dots & . \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & x & x & \dots & x \end{vmatrix}$;

d. $\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ . & . & . & \dots & . \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}$

e. $D_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \dots & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^2 \end{vmatrix}$,

D_n là định thức cấp n mà các phần tử nằm trên đường chéo chính bằng $1+x^2$, các phần tử thuộc hai đường chéo gần đường chéo chính bằng x và các phần tử còn lại bằng 0.

2.6.

a. A là một ma trận vuông cấp n thỏa mãn $A^{-1} = A$. Chứng minh $|\det(A-I)| = 0$ hoặc $|\det(A-I)| = 2^n$.

b. A, B là hai ma trận vuông cùng cấp n thỏa mãn $AB - BA = B$. Chứng minh $\det(B) = 0$.

2.7. Cho A, B là các ma trận thực vuông cấp n thỏa mãn $AB = A + B$ và $A^{2016} = 0$. Chứng minh rằng $\det(B) = 0$.

2.8. Cho các ma trận vuông A, B thỏa mãn $A^t A = I; B^t B = I$. Biết $\det A \neq \det B$. Chứng minh rằng $\det(A+B) = 0$.

2.9. Cho ma trận vuông cấp n $A = (a_{ij}); a_{ij} = \min(i, j)$. Tính $\det(A)$.

2.10. Cho $A = (a_{ij})$ là một ma trận vuông cấp $n \geq 2$ và $A_{11} + A_{12} + \cdots + A_{1n} \neq 0$, trong đó A_{1j} là phần bù đại số của a_{1j}. Chứng minh rằng tồn tại số thực α để

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\alpha & a_{12}+\alpha & \dots & a_{1n}+\alpha \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 2016$$

3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

3.1. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x + y - 2z + t - u = 1 \\ 2x - y + 7z - 3t + 5u = 2 \\ x + 3y - 2z + 5t - 7u = 3 \\ 3x - 2y + 7z - 5t + 8u = 3 \end{cases}$$

3.2. Giải hệ phương trình thuần nhất sau:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0\\ x_2+x_3+x_4=0\\ x_3+x_4+x_5=0\\ \quad\ldots\ldots\ldots\\ x_8+x_9+x_{10}=0\\ x_1+\ldots+x_9+x_{10}=0\\ x_1+x_2+\ldots+x_{10}=0 \end{cases}$$

3.3. Giải và biện luận các hệ phương trình sau

a. $\begin{cases} mx+y+z+t=1\\ x+my+z+t=1\\ x+y+mz+t=1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x+y+z+t=1\\ x+2y-z+4t=2\\ x+7y-4z+11t=m\\ 4x+8y-4z+16t=m+1 \end{cases}$

3.4. Cho a_{ij} là các số nguyên. Giải hệ:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n\\ \frac{1}{2}x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..\\ \frac{1}{2}x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

3.5. Chứng minh rằng hệ phương trình sau có nghiệm khác nghiệm tầm thường:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

trong đó $a_{ij} = -a_{ji}$ và n lẻ.

3.6. Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} mx+8z-7t=m-1\\ 3x+my+2z+4t=m\\ mz+5t=m^2-1\\ 5z-mt=2m+2 \end{cases}$$

3.7. Tùy theo giá trị của *m*, hãy biện luận số nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} mx+y+z+t=m \\ 2x+3y+2z+(5m-3)t=m+1 \\ (m-1)x+3y+2z+(m^2+m)t=4 \end{cases}$$

3.8. Tìm điều kiện của m để hai hệ sau có nghiệm chung

$$\begin{cases} 2x-y+z-2t+3u=3 \\ x+y-z-t+u=1 \\ 3x+y+z-3t+4u=2m \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y+2z-2mt=0 \\ 2x+y-z+t=m \end{cases}$$

3.9. Cho $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng hệ phương trình sau chỉ có nghiệm tầm thường:

$$\begin{cases} \left(1+a^2\right)x+by+cz+dt=0 \\ -bx+\left(1+a^2\right)y+dz-ct=0 \\ -cx-dy+\left(1+a^2\right)z+bt=0 \\ -dx+cy-bz+\left(1+a^2\right)t=0 \end{cases}$$

4. ĐA THỨC

4.1. ***(Xác định đa thức)*** Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ có hệ số nguyên sao cho

$$P(P'(x))=P'(P(x)), \forall x \in \mathbb{R}$$

4.2. ***(Nghiệm của đa thức)*** Cho $P(x)$ là đa thức bậc n có n nghiệm phân biệt $x_1,x_2,...,x_n$. Chứng minh rằng:

a. $\dfrac{1}{P'(x_1)}+\dfrac{1}{P'(x_2)}+...+\dfrac{1}{P'(x_n)}=0.$

b. $\dfrac{P''(x_1)}{P'(x_1)}+\dfrac{P''(x_2)}{P'(x_2)}+...+\dfrac{P''(x_n)}{P'(x_n)}=0.$

4.3. ***(Đa thức với yếu tố giải tích)*** Với mỗi số nguyên dương $n \geq 2$ xét đa thức $P_n(x)=nx^n-x^{n-1}-...-x-1$. Hỏi $P_n(x)$ có bao nhiêu nghiệm thực:

a. Khi $n=2; n=3$?

b. Khi $n \geq 4$?

4.4. ***(Tính chia hết của đa thức)*** Cho m,n là các số nguyên dương. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để đa thức x^m+x^n+1 chia hết cho x^2+x+1 là $mn-2$ chia hết cho 3.

4.5. Cho đa thức $P(x)=4x^3+ax^2+bx+c$ trong đó a,b,c là các số thực. Hãy tìm a,b,c sao cho $|P(x)| \leq 1$ với mọi x thoả mãn $|x| \leq 1$.

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP ĐS OLIMPIC

MA TRẬN

1.1 Có $A(A-I)=I_n \Rightarrow$ A có ma trận nghịch đảo là A – I

1.2 a) Có $(MN)^2 = I_3$

b)Ta có $\det(MN)=1 \Rightarrow \det\left(NM\right)=1 \Rightarrow$ NM có ma trận nghịch đảo

$\det(MN)\neq 0 \Rightarrow \det M \neq 0$ và $\det N \neq 0 \Rightarrow$ N và M có ma trận nghịch đảo

$(MN)^2 = I_3 \Rightarrow MNMN = I_3 \Rightarrow NM = M^{-1}N^{-1} = (NM)^{-1}$. Vậy NM có ma trận nghịch đảo là NM.

1.3 Ta có $(2A-I)(2A-I)=4A^2-4A+I=4A-4A+I=I \Rightarrow$ B có ma trận nghịch đảo là chính nó.

1.4 a) $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0\end{pmatrix}$ tính $A^{2016}=0$ suy ra $a=c=0$.

b) Sử dụng phân tích ý 1) rồi tìm ra a,b,c.

1.5

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 2^n & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n\end{bmatrix}$$

1.6 $A^n = \begin{bmatrix} \cos nx & -\sin nx \\ \sin nx & \cos nx\end{bmatrix}$

1.7 Cho ma trận $A=\begin{bmatrix} 2017 & 1 & -2017 \\ 2016 & 2 & -2017 \\ 2016 & 1 & -2016\end{bmatrix}$. Xác định các phần tử nằm trên đường chéo chính của ma trận $S=I+A+A^2+\cdots+A^{2017}$.

Ta có $A = I + B,\ B = \begin{bmatrix} 2016 & 1 & -2017 \\ 2016 & 1 & -2017 \\ 2016 & 1 & -2017 \end{bmatrix}$. Dễ dàng kiểm tra $B^2 = 0$. Do đó, với mọi số tự nhiên k ta có: $A^k = I + kB$. Từ đó suy ra $S = 2018I + 1009.2017.B$.

Vậy các phần tử trên đường chéo chính của ma trận S là

$s_{11} = 2018 + 1009.2017.2016;\ s_{22} = 2018 + 1009.2017;\ s_{33} = 2018 - 1009.2017.2017;$

1.8 HD $:= (2015 - 2016)I + 2016B$, với $B = (b_{ij} = 1; \forall i, j)$.

1.9 HD: $(A - B - 2I)(A + I) = -2I$ suy ra $(A + I)(A - B - 2I) = -2I$. Suy ra $AB = BA$.

1.10 HD: Từ điều kiện $AB = 0, B \neq 0$ suy ra A không khả nghịch. Do đó tồn tại các ma trận $E, F \in M(n, 1)$ khác ma trận 0, sao cho $AE = A^T F = 0$, đặt $C = EF^T$ là ma trận cần tìm.

1.11 Dễ dàng chứng minh

1.12. Giả sử tồn tại các ma trận A, B, C, D vuông cấp n sao cho $AC + BD = I$ và $CA + BD = 0$

$$CA + BD = 0 \Rightarrow Tr(CA + BD) = 0$$

$$Tr(AC + BD) = n \Leftrightarrow Tr(AC) + Tr(BD) = n \Leftrightarrow Tr(CA) + Tr(BD) = n \Leftrightarrow Tr(CA + BD) = n$$

, vô lí . Suy ra đpcm.

1.13. a. $(AB - BA)^2 C - C(AB - BA)^2 = 0$

Ta có $Tr(AB - BA) = 0 \Rightarrow AB - BA = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix} \Rightarrow (AB - BA)^2 = \begin{pmatrix} x^2 + yz & 0 \\ 0 & x^2 + yz \end{pmatrix} = (x^2 + yz)I$

Ta có $IC = CI$, suy ra đpcm.

b. cmtt

1.14 $r(A) = 3 \Leftrightarrow m = 1;\ r(A) = 4 \Leftrightarrow m \neq 1$

1.15 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ m & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 7 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ m & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ m & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Ta thấy $r(A) \geq 2$. Dấu "=" xảy ra khi $m = 0$

1.16 Khai triển định thức theo cột 1, ta được $\det(A)=1+(-1)^{n+1}m^n$.

Hạng của ma trận *A* nhỏ hơn *n* khi và chỉ khi

$\det(A)=0 \Leftrightarrow 1+(-1)^{n+1}m^n=0 \Leftrightarrow (-1)^{n+1}m^n=-1$

Nếu n lẻ thì $m=-1$. Nếu n chẵn thì $m=\pm 1$. .

1.17 Giả sử ma trận *A* cấp $m\times n$ có hạng bằng r. Bằng cách sử dụng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng hoặc cột của *A* có thể đưa *A* về dạng $R=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$, tức là tồn tại các ma trận không suy biến P, Q sao cho $A=PRQ$ (các thầy cô xem chứng minh trong giáo trình đại số tuyến tính của thầy Vĩnh, nếu cần).

Ta phân tích $R=R_1+R_2+...+R_r$, trong đó R_i là các ma trận có tất cả các phần tử đều bằng 0 trừ phần tử ở hàng i, cột i bằng 1.

Ta có $r(PR_iQ)=r(R_i)=1$ (các phép biến đổi sơ cấp không làm thay đổi hạng của ma trận).

Vậy $A=P(R_1+R_2+...+R_r)Q=PR_1Q+...+PR_rQ$ là cách phân tích thỏa mãn yêu cầu của bt.

1.18 a) Do $AB=BA$ nên $(A+B)^k=\sum_{i=0}^{k}C_k^iA^iB^{k-i}$.

Vì $A^{2016}=0,\ B^{2017}=0$ nên $k=2017$ thì $(A+B)^k=0$.

b) Vì $(A+B)^k=0, k=2017$ nên ta có

$I=I-(A+B)^k=(I-A-B)\left[I+(A+B)+...+(A+B)^{k-1}\right]$

$\Rightarrow 1=\det(I)=\det(I-A-B).\det\left[I+(A+B)+...+(A+B)^{k-1}\right]$

$\Rightarrow \det(I-A-B)\neq 0 \Rightarrow r(I-A-B)=n$

Ta có: $I=I+(A+B)^{2k+1}=(I+A+B)\left[I-(A+B)+...+(A+B)^{2k}\right]$. Tương tự như trên suy ra $r(I+A+B)=n$. Suy ra đpcm.

ĐỊNH THỨC

2.1 Khi khai triển định thức ở vế trái theo dòng đầu, ta sẽ có vế trái là đa thức bậc 3 của x, ký hiệu là $f(x)$. Ta có $f(2)=0$ vì khi đó định thức có 2 dòng đầu bằng nhau. Tương tự, có $f(3)=0, f(4)=0$. Vì $f(x)$ là đa thức bậc 3 nên có 3 nghiệm 2, 3, 4 nên pt có 3 nghiệm 2, 3, 4.

2.2 a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ 0 & (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) & (x_3 - x_1)(x_3 + x_1) & (x_4 - x_1)(x_4 + x_1) \\ 0 & (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2) & (x_3 - x_1)(x_3^2 + x_3x_1 + x_1^2) & (x_4 - x_1)(x_4^2 + x_4x_1 + x_1^2) \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 + x_1 & x_3 + x_1 & x_4 + x_1 \\ x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2 & x_3^2 + x_3x_1 + x_1^2 & x_4^2 + x_4x_1 + x_1^2 \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_2 + x_1 & x_3 - x_2 & x_4 - x_2 \\ x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2 & (x_3 - x_2)(x_3 + x_2 - x_1) & (x_4 - x_2)(x_4 + x_2 - x_1) \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_3 + x_2 - x_1 & x_4 + x_2 - x_1 \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i>j}\left(x_i - x_j\right)$$

b) Ta có:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{vmatrix}$$

$$= \left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^4$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix} = \left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2$$

2.3 Theo định lý Viet, ta có $a+b+c=0$, nên

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & a+b+c \\ b & c & a+b+c \\ c & a & a+b+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ b & c & 0 \\ c & a & 0 \end{vmatrix} = 0$$

2.4. Ta có m, n, p, q là nghiệm của phương trình $x^4 - x + 1 = 0$

theo định lý Viet

Nhân cột 4 với -1 rồi cộng vào các cột còn lại ta có

$$\det A = \begin{vmatrix} m & 0 & 0 & 1 \\ 0 & n & 0 & 1 \\ 0 & 0 & p & 1 \\ -q & -q & -q & q+1 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} n & 0 & 1 \\ 0 & p & 1 \\ -q & -q & 1+q \end{vmatrix} + q \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ n & 0 & 1 \\ 0 & p & 1 \end{vmatrix}$$

$$= mnp + mnq + mpq + npq + mnpq = 1 + 1 = 2$$

2.5

a) Nhân dòng 2 với (-1) sau đó cộng vào các dòng (3), (4),…., (n). Ta có

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ . & . & . & \dots & . \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n-2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & -2 & -2 & \dots & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n-2 \end{vmatrix} = -2(n-2)!$$

(1) : Nhân dòng (1) với (-2) sau đó cộng vào dòng (2).

b) Lần lượt cộng dòng (1) vào các dòng (2), (3), …., (n)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ . & . & . & \dots & . \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 2 & 6 & \dots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 2n \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = n!$$

Khai triển theo hàng 1 ta có:

c)

$$D_n = \left(1+x^2\right)D_{n-1} - x\begin{vmatrix} x & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1+x^2 & x & \dots & 0 \\ \vdots & x & 1+x^2 & x & 0 \\ 0 & \vdots & x & 1+x^2 & \vdots \\ & & & & x \\ 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

$$= \left(1+x^2\right)D_{n-1} - x^2 D_{n-2}; D_1 = 1+x^2$$

Mặt khác,

$$D_2 = \left(1+x^2\right)^2 - x^2 = x^4 + x^2 + x$$

$$D_n - D_{n-1} = x^2(D_{n-1} - D_{n-2})....$$

$$D_n = D_{n-1} + x^{2n} \Rightarrow D_n = 1 + x^2 + x^4 + ... + x^{2n}$$

d) Đầu tiên cộng các cột (2), (3), …, (n) vào cột (1). Sau đó nhân dòng (1) với (-1) cộng vào các

dòng (2), (3), …(n). Ta có

$$\begin{vmatrix} a & b & b & ... & b \\ b & a & b & ... & b \\ b & b & a & ... & b \\ . & . & . & ... & . \\ b & b & b & ... & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & ... & b \\ a+(n-1)b & a & b & ... & b \\ a+(n-1)b & b & a & ... & b \\ . & . & . & ... & . \\ a+(n-1)b & b & b & ... & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & ... & b \\ 0 & a-b & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & a-b & ... & 0 \\ . & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & a-b \end{vmatrix} = \left(a+\left(n-1\right)b\right)\left(a-b\right)^{n-1}$$

2.6

a) Ta có $A = A^{-1} \Leftrightarrow A^2 = I \Leftrightarrow (A-I)^2 = -2(A-I) \Leftrightarrow \left(\det\left(A-I\right)\right)^2 = -2^n \det\left(A-I\right)$**.** Suy ra điều phải cm.

b) Ta có $AB - BA = B$. Nhân cả 2 vế với B^{k-1} vào bên phải các ma trận ta có :

$A.B^k - B.A.B^{k-1} = B^k$**.** Lấy det 2 vế : $0 = \det A.\left(\det B\right)^k - \left(\det B\right)^k .\det A = \left(\det B\right)^k$. Suy ra điều phải chứng minh.

2.7

Ta có $A^{2016} = 0 \Rightarrow \det(A^{2016}) = (\det A)^{2016} = 0 \Rightarrow \det A = 0$

$$AB = A + B \Rightarrow B = AB - A \Leftrightarrow B = A(B-I) \Rightarrow \det B = \det A.\det(B-I) = 0$$

2.8

Ta có, $\det A = \pm 1, \det B = \pm 1$. Do $\det A \neq \det B \Rightarrow \det A + \det B = 0$. Xét

$$\det B.\det(A+B) = \det B.\det\left(A+B\right)^t = \det(B.A^t + I) = \det(B.A^t + A.A^t)$$

$$= \det A.\det(A+B) = -\det B.\det(A+B)$$

Mà $\det B \neq 0 \Rightarrow \det(A+B) = 0$. Điều phải cm.

2.9. Nhân hàng 1 với -2; -3; ...;-n rồi cộng tương ứng vào các hàng 2, 3,....n.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ -1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ -2 & -1 & 0 & & 0 \\ ... & ... & ... & & .... \\ -(n-1) & -(n-2 & -(n-3) & .... & 0 \end{vmatrix}$$

Khai triển theo cột n $\det A = \left(-1\right)^{n+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ -2 & -1 & 0 & & 0 \\ & -2 & -1 & & ... \\ ... & & ... & & \\ -(n-1) & -(n-2) & -(n-3) & ... & -1 \end{vmatrix} =$

$$= \left(-1\right)^{n+1}.\left(-1\right)^{n-1} = \left(-1\right)^{2n} = 1$$

2.10 Cho $A = \left(a_{ij}\right)$ là một ma trận vuông cấp $n \geq 2$ và $A_{11} + A_{12} + \cdots + A_{1n} \neq 0$, trong đó A_{1j} là phần bù đại số của a_{1j}. Chứng minh rằng tồn tại số thực α để

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\alpha & a_{12}+\alpha & ... & a_{1n}+\alpha \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = 2016$$

Ta có

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\alpha & a_{12}+\alpha & ... & a_{1n}+\alpha \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & ... & \alpha \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = |A| + \alpha\left(A_{11} + A_{12} + ... + A_{1n}\right)$$

Suy ra $\alpha = \dfrac{2016 - |A|}{A_{11} + A_{12} + \cdots + A_{1n}}$.

HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

3.1 Gợi ý: Đổi chỗ hai pt cuối lên trên rồi giải hệ bằng phương pháp khử Gauss:

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -2 & 5 & -7 & 3 \\ 3 & -2 & 7 & -5 & 8 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 7 & -3 & 5 & 2 \end{array} \leftrightarrow \begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -2 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & -11 & 7 & -5 & 8 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 7 & -3 & 5 & 2 \end{array}$$

3.2

Tổng 10 phương trình ta được $3(x_1+\ldots + x_9+ x_{10})=0$ nhóm 3 số hạng lại thành một nhóm được $x_{10}=0$ suy ra $x_1+x_2=0$ nên $x_3=0$ suy ra $x_6= x_9=0$ nên $x_8=0$ nên $x_7= x_5= x_2= x_1=0\ldots$ hệ chỉ có nghiệm tầm thường.

3.3

a) Lập ma trận hệ số mở rộng và dùng các phép biến đổi sơ cấp đưa ma trận về dạng bậc thang:

$$A^{bs} = \begin{bmatrix} m & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & m & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 1-m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-m-m^2 & 1-m & 1-m \end{bmatrix}$$

Do $(2-m-m^2) = (1-m)(2+m)$. Ta có các khả năng sau:

Nếu $m = 1$. hệ có vô số nghiệm $\begin{cases} x_1 = 1-a-b-c \\ x_2 = a \\ x_3 = b \\ x_4 = c \end{cases} \quad (a, b, c \in R)$

Nếu $m = -2$. hệ có vô số nghiệm $\begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = a \\ x_3 = a \\ x_4 = 1 \end{cases} \quad a \in R$

Nếu $m \neq 1, -2$. hệ có vô số nghiệm $\begin{cases} x_1 = \frac{1-a}{m+2} \\ x_2 = \frac{1-a}{m+2} \\ x_3 = \frac{1-a}{m+2} \\ x_4 = a \end{cases} \quad (a \in R)$

b) Lập ma trận hệ số mở rộng và dùng các phép biến đổi sơ cấp đưa ma trận về dạng bậc thang:

$$A^{bs} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & m \\ 4 & 8 & -4 & 16 & m+1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 3-7 & & m-8 \\ 0 & 0 & -6 & 14 & -3m+21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m-7 \end{array}\right)$$

Nếu $\neq 7$. Hệ vô nghiệm.

Nếu $m = 7$. Hệ có vô số nghiệm $\begin{cases} x_1 = -5a \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 7a \\ x_4 = 3a \end{cases} \quad (a \in R)$

3.4 Hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} (2a_{11} - 1)x_1 + 2a_{12}x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_n = 0 \\ 2a_{21}x_1 + (2a_{22} - 1)x_2 + \cdots + 2a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 2a_{n1}x_1 + 2a_{n2}x_2 + \cdots + (2a_{nn} - 1)x_n = 0 \end{cases}$$

Gọi A_n là ma trận hệ số của phương trình trên. Ta có:

$$\det(A_n) = 2k + (2a_{nn} - 1)\det(A_{n-1}) = 2k + 2a_{nn}\det(A_{n-1}) - det(A_{n-1})$$
$$= 2l - \det(A_{n-1})$$

Do đó $detA_n + detA_{n-1} = 2l$ là một số chẵn. Suy ra $detA_n$ và $detA_{n-1}$ có cùng tính chẵn lẻ, với mọi n. Mà $detA_1 = 2a_{11} - 1$ là số lẻ nên $detA_n$ cũng là số lẻ. do đó $detA_n \neq 0$. Vậy hệ trên là hệ Cramer và có nghiệm duy nhất :

$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0.$

3.5 Gọi A là ma trận các hệ số. Ta có $(A)_{ij} = -(A)_{ji}$ do đó $A = -A^t$.

Mà $\det(A) = \det(A^t)$ nên

$$detA = \det(-A^t) = (-1)^n detA^t = (-1)^n detA = -detA \quad \text{(do n lẻ)}$$

Bởi vậy detA = 0 tức là r(A) < n. Theo định lý Cronecker – Capelly hệ có vô số nghiệm phụ thuộc vào (n – r) tham số. Do đó hệ có nghiệm khác 0.

3.6 detA= $\begin{vmatrix} m & 0 & 8 & -7 \\ 3 & m & 2 & 4 \\ 0 & 0 & m & 5 \\ 0 & 0 & 5 & -m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & 0 \\ 3 & m \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} m & 5 \\ 5 & -m \end{vmatrix} = -m^2\left(m^2+25\right)$

Hệ có nghiệm duy nhất ↔ detA≠0↔m≠0

3.7 $$\begin{array}{c} \begin{matrix} y & z & x & t & \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & m & 1 & m \\ 3 & 2 & 2 & 5m-3 & m+1 \\ 3 & 2 & m-1 & m^2+m & 4 \end{array}\right] \end{array} \leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} y & z & x & t & \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & m & 1 & m \\ 0 & 1 & 3m-2 & 6-5m & 2m-1 \\ 0 & 1 & 2m+1 & -m^2-m+3 & 3m-4 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} y & z & x & t & \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & m & 1 & m \\ 0 & 1 & 3m-2 & 6-5m & 2m-1 \\ 0 & 0 & m-3 & m^2-4m+3 & 3-m \end{array}\right] \end{array}$$

Với m=3 hệ có vô số nghiệm x, t lấy giá trị tùy ý

Với m≠3 hệ có vô số nghiệm t lấy giá trị tùy ý

3.8 Gợi ý: Hai hệ có nghiệm chung khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} 2x-y+z-2t+3u=3 \\ x+y-z-t+u=1 \\ 3x+y+z-3t+4u=2m \\ x-y+2z-2mt=0 \\ 2x+y-z+t=m \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} u & x & y & z & t & \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 1 & -3 & 2m \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2m & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & m \end{array}\right] \end{array} \leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} u & x & y & z & t & \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 5 & 1 & 2m-4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2m & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & m \end{array}\right] \end{array}$$

HS tự làm tiếp

3.9 Gọi A là ma trận hệ số của hệ. Ta đi tính định thức của ma trận này bằng cách làm giống trong bài 2.2 b), và từ đó thấy được det(A) khác 0. Suy ra đpcm.

ĐA THỨC

4.1 Giả sử $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0,\ a_n \neq 0$. Suy ra $P'^{(x)} = na_n x^{n-1} + \cdots + a_1$.

- Nếu $n \geq 2$ thì thừa số bậc cao nhất của P(P'(x)) là: $a_n\,(na_n x^{n-1})^n = n^n a_n^{n+1} x^{n(n-1)}$
  Thừa số bậc cao nhất của P'(P(x)) là: $na_n\,(a_n x^n)^{n-1} = na_n^n x^{n(n-1)}$. Do đó từ P(P'(x)) = P'(P(x)) ta suy ra $n^n a_n = n$, nghĩa là n = 1 và $a_n = 1$ (do a_n nguyên) , suy ra mâu thuẫn.
- Nếu n = 0 thì từ P(P'(x)) = P'(P(x)) ta suy ra P(x) = 0 với mọi x.
- Nếu n = 1 thì P(x) = ax + b, nên từ P(P'(x)) = P'(P(x)) ta suy ra $b = a - a^2$.

Vậy các đa thức thoả mãn yêu cầu bài toán là P(x) = 0 hoặc $P(x) = ax + a - a^2$, với a nguyên.

4.2

a) Ta có $P(x) = a(x - x_1)\ldots(x - x_n)$. Đặt $P_i(x) = a\prod_{\substack{j \neq i;\\ j=1}}^{n}(x - x_j)$ khi đó $P'(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x)$.

Ta có $P_i(x_j) = 0, \forall j \neq i, P_i(x_i) \neq 0, \forall i. P'(x_i) = P_i(x_i)$. Xét đa thức: $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_j(x)}{P'(x_j)} - 1$. Ta có bậc của Q(x) < n và Q có n nghiệm là $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Suy ra Q(x) = 0 với mọi x, nên hệ số cao nhất của Q(x) là $\frac{1}{P'(x_1)} + \frac{1}{P'(x_2)} + \ldots + \frac{1}{P'(x_n)} = 0$.

b) Ta có $P(x) = a(x - x_1)\ldots(x - x_n)$. Suy ra $P'(x) = P(x)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x - x_i}$. Do $P(x_i) = 0$ nên theo định lý Rolle tồn tại $c_1, \ldots, c_{n-1};\ x_1 < c_1 < x_2 < c_2 < \cdots < c_{n-1} < x_n$ sao cho $P'(c_i) = 0, \forall i$.

Lại có $P''(x) = P'(x)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x - c_i}$. Suy ra

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{P''(x_i)}{P'(x_i)} = \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i - c_j} = -\sum_{j=1}^{n-1}\frac{P'(c_j)}{P'(c_j)} = 0.$$

4.3

a) Khi n = 2: $P_2(x) = 2x^2 - x - 1$ có 2 nghiệm thực x = 1 và x = - ½.

Khi n = 3: $P_3(x) = (x - 1)(3x^2 + 2x + 1)$ có duy nhất nghiệm thực x = 1.

b) $P_n(x) = (x - 1)(nx^{n-1} + (n - 1)x^{n-2} + 2x + 1)$. Ta sẽ chứng minh đa thức

Q(x) = $nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + 2x + 1$ có duy nhất một nghiệm thực x = a < 0 nếu n chẵn và không có nghiệm thực nếu n lẻ.

Nhận xét Q(x) = R'(x) trong đó $R(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1 = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$.

Vậy Q(x) = R'(x) = $\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$. Khảo sát tử số R(x) = $nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$. Ta thấy

Nếu n lẻ thì S(x) ≥ 0 với mọi x, dấu bằng xảy ra khi x = 1 (dung BDT Cauchy). Tuy nhiên Q(1) khác 1. Vậy Q(x) không có nghiệm thực.

Nếu n chẵn khảo sát hàm số ta thấy S(x) có 2 nghiệm, x = 1 và một nghiệm x = a < 0 . Vậy Q(x) có duy nhất một nghiệm thực x = a < 0.

4.4. Biểu diễn m = 3k + r và n = 3l + s, với $k, l, r, s \in N; 0 \le r, s \le 2$. Khi đó $x^m + x^n + 1 = (x^{3k}-1)x^r + (x^{3l}-1)x^s + x^r + x^s + 1$. Vì $x^{3k}-1$ và $x^{3l}-1$ cùng chia hết cho $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$ nên $x^m + x^n + 1$ chia hết cho $x^2 + x + 1$ khi và chỉ khi $x^r + x^s + 1$ chia hết cho $x^2 + x + 1$. Do $0 \le r, s \le 2$ nên $x^r + x^s + 1$ chia hết cho $x^2 + x + 1$ khi và chỉ khi r = 2, s = 1 hoặc r = 1, s = 2.

Mặt khác mn – 2= (3k + r)(3l + s) – 2 = 3(3kl + ks + lr) + rs – 2. Nhưng rs – 2 chia hết cho 3 khi và chỉ khi r = 2, s = 1 hoặc r = 1, s = 2.

4.5. Thay x = 1 và x = -1 ta có:

$$\begin{cases} 4 + a + b + c \le 1 \\ -4 + a - b + c \ge -1 \end{cases} \Rightarrow b \le -3.$$

Thay x = 1/2 và x = -1/2 ta có:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} + \frac{a}{4} - \frac{b}{2} + c \le 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c \ge -1 \end{cases} \Rightarrow b \ge -3.$$ Suy ra b = - 3.

Lại thay x = 1; x = -1 ta được

$$\begin{cases} a + c \le 0 \\ a + c \ge 0 \end{cases} \Rightarrow a + c = 0$$

Thay x = 1/2 và x = -1/2 ta có:

$$\begin{cases} \frac{a}{4} + c \le 0 \\ \frac{a}{4} + c \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{4} + c = 0.$$ Suy ra a = c = 0. Vậy $P(x) = 4x^3 - 3x$.

Thử lại đặt x = cost, ta có |P(x)| = |cos3t| ≤ 1.