http://www.vnua.edu.vn/khoa/fita/vi/bo-mon/bm-toan/cac-mon-giang-day/#olimpic

HỌC VIỆN NÔNG NGHIỆP VIỆT NAM
KHOA CNTT – BỘ MÔN TOÁN

ĐỀ THI OLIMPIC GIẢI TÍCH- HVNNVN 2015/2016, VÒNG 1

Ngày thi: 07/12/2015

Thời gian làm bài: 150 phút

Câu 1 (5.0 điểm) Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 0, u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}, n \geq 1$.

1) Chứng minh rằng $0 \leq u_n < 3$ với mọi $n \geq 1$.

2) Chứng minh dãy (u_n) là dãy tăng tức $u_{n+1} \geq u_n$ với mọi $n \geq 1$.

3) Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$?

Câu 2 (6.0 điểm) Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 2, u_{n+1} = 3u_n + 2\text{n}+1, n \geq 1$.

1) Tìm một dãy số (a_n) là đa thức bậc nhất của n thỏa mãn $a_{n+1} = 3a_n + 2\text{n}+1, n \geq 1$.

2) Đặt $v_n = u_n - a_n, n \geq 1$ với (a_n) là dãy số tìm được ở câu 1).

a) Lập công thức truy hồi cho dãy (v_n) rồi tìm số hạng tổng quát của nó. Từ đó,

b) Tìm công thức tổng quát của dãy số (u_n).

Câu 3 (4.0 điểm) Tìm công thức tổng quát của dãy số (u_n) biết $u_1 = -1, u_{n+1} = 2u_n + 2015, n \geq 1$.

Câu 4 (7.0 điểm) Cho hàm số f xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1) = \text{a}$, với a là một số thực cho trước, và

$$f(x+y) = \text{f(x)} + \text{f(y)} \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

1) Tìm $f(0)$.

2) Chứng minh rằng f là hàm lẻ.

3) Bằng quy nạp hãy chứng minh $f(\text{mx}) = m\text{f(x)}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $m \in \mathbb{Z}$. Từ đó,

4) Tìm $f(\text{m})$, $f(\frac{1}{n})$ và $f(\frac{m}{n})$ với mọi $m \in \mathbb{Z}$ và $n \in \mathbb{Z}^*$.

5) Giả sử thêm rằng f liên tục trên $\mathbb{R}$, hãy tìm hàm số f, tức xác định f(x) với mọi $\text{x} \in \mathbb{R}$.

Câu 5 (4.0 điểm) Bằng phương pháp xét hàm số hãy chứng minh bất đẳng thức sau

$$\ln(1+\sqrt{1+x^2}) < \frac{1}{x} + \ln x, x > 0.$$

Câu 6 (6.0 điểm) Tính các tích phân sau

1) $I_1 = \int \sin^3 x \sqrt{\cos x}\, dx$

2) $I_2 = \int\limits_{-1}^{1} \frac{x^{2015}}{x^{2016}+1} dx$

http://www.vnua.edu.vn/khoa/fita/vi/bo-mon/bm-toan/cac-mon-giang-day/#olimpic

HỌC VIỆN NÔNG NGHIỆP VIỆT NAM
KHOA CNTT – BỘ MÔN TOÁN

ĐỀ THI OLIMPIC GIẢI TÍCH- HVNNVN
2015/2016, VÒNG 2

Ngày thi: 28/01/2016

Thời gian làm bài: 120 phút

Câu 1 (12.0 điểm) Xác định số hạng tổng quát của các dãy số sau:

1) $x_1 = 1,\ \ x_{n+1} = \sqrt{x_n^2 + 2},\ \forall n \ge 1.$

2) $x_1 = 1,\ x_{n+1} = (1 + \frac{1}{n})x_n + \frac{1}{(n-1)!},\ \ \forall n \ge 1.$

3) $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}};\ x_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + x_n}{2}}\ \ \forall n \ge 1.$

Câu 2 (5.0 điểm) Tìm điều kiện của α để dãy số sau có giới hạn:

$$a_1 = \alpha,\quad a_{n+1} = \frac{n+1}{n} a_n - \frac{1}{n},\ \forall n \ge 1.$$

Câu 3 (6.0 điểm) Chứng minh với $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ ta có bất đẳng thức:

$$-\frac{x^2}{2} - 3x^4 \le \ln\cos x \le -\frac{x^2}{2}.$$

Câu 4 (6.0 điểm) Cho các hàm số f và g xác định liên tục trên $[0,1]$ vào $[0,1]$.

1) Chứng minh rằng tồn tại $c \in [0,1]$ sao cho $f(g(c)) = c$.

2) Chứng minh rằng tồn tại $a, b \in [0,1]$ sao cho $f(g(a)) = g(f(b)) = 0$. Từ đó chứng minh tồn tại $x_0 \in [0,1]$ sao cho $f(g(x_0)) = g(f(x_0))$.

Câu 5 (5.0 điểm) Chứng minh rằng nếu hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$|f(x) - f(y)| \le |x - y|^2,\ \forall\ x, y \in \mathbb{R},$$

thì f có đạo hàm bằng 0 tại mọi điểm và từ đó là hàm hằng số trên $\mathbb{R}$.

Câu 6 (6.0 điểm) Cho hàm số f xác định $\mathbb{R}$. Chứng minh hai điều kiện sau là tương đương:

(1) $f(xy + x + y) = f(xy) + f(x) + f(y),\ \forall\ x, y \in \mathbb{R};$

(2) $f(x + y) = f(x) + f(y),\ \forall\ x, y \in \mathbb{R}.$