HỌC VIỆN NÔNG NGHIỆP VIỆT NAM **KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN NĂM 2016**

ĐỀ THI MÔN : ĐẠI SỐ
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài 1. Cho các ma trận : $A=\begin{bmatrix}1&3&1\\2&2&1\\3&4&2\end{bmatrix};B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix};C=\begin{bmatrix}0&2&-1\\1&1&-1\\-2&-5&4\end{bmatrix}$

1) Tính $A.C$ và $A.B.C$.

2) Tính $\begin{bmatrix}4&3&-3\\2&3&-2\\4&4&-3\end{bmatrix}^{2016}$.

Bài 2. Tìm tất các giá trị của m để hạng của ma trận sau nhỏ nhất: $A=\begin{bmatrix}1&-1&2&1\\m&2&1&-1\\-2&-1&-3&0\\1&-1&m^2&4\end{bmatrix}$.

Bài 3. Chứng minh rằng: $\begin{vmatrix}a&a&a&a\\a&b&b&b\\a&b&c&c\\a&b&c&d\end{vmatrix}=a(b-a)(c-b)(d-c)$.

Bài 4. Giải và biện luận theo tham số thực m hệ phương trình sau:

$$\begin{cases}x_1+mx_2=1\\x_2+mx_3=\dfrac{1}{m}\\x_3+mx_4=\dfrac{1}{m^2}\\\ldots\\x_{10}+mx_{11}=\dfrac{1}{m^9}\\x_{11}+mx_1=\dfrac{1}{m^{10}}\end{cases}\quad (m\neq 0).$$

Bài 5. Cho A, B là hai ma trận vuông cấp n $(n\geq 2)$ thỏa mãn $AB=A+B$ và $A^{2016}=0$. Gọi θ là ma trận không cấp $n\times 1$. Chứng minh rằng có vô số ma trận X sao cho $A.X=\theta$.

--- **Hết** ---

Ghi chú: *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

Họ và tên thí sinh: ……………………………………………… SBD: ……………………

HỌC VIỆN NÔNG NGHIỆP VIỆT NAM KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN NĂM 2016

ĐÁP ÁN MÔN : ĐẠI SỐ

Bài 1.

1) $A.C = I_3$ và $A.B.C = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{bmatrix}$.

2) Ta có $A.C = I_3$, suy ra $C = A^{-1}$

Ta có $\begin{bmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{bmatrix} = A.B.C \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{bmatrix}^{2016} = \left(A.B.C\right)^{2016} = \left(A.B.A^{-1}\right)^{2016} = AB^{2016}A^{-1}$.

Vậy

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{bmatrix}^{2016} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{2016} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.2^{2016}-2 & 2.3^{2016}-3 & 3-3.2^{2016} \\ 2^{2017}-2 & 2^{2017}-1 & 2-2^{2017}\ 4 \\ 2^{2018}-4 & 2^{2018}- & 5-2^{2018} \end{bmatrix}$$

Bài 2.

Ta có: $A \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & m \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & m^2 & 10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1+m \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & m^2-8 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1+m \\ 0 & 0 & 0 & m-1 \\ 0 & 0 & m^2-17 & 0 \end{bmatrix}$

Hạng của ma trận A nhỏ nhất khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} m^2-17=0 \\ m-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow m \in \left\{1; \pm\sqrt{17}\right\}$

Bài 3.

Ta có:

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a & c-a \\ 0 & b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & c-b & d-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{vmatrix}$$

$$= a\left(b-a\right)\left(c-b\right)\left(d-c\right)$$

Bài 4.

Ma trận hệ số của hệ là: $A=\begin{bmatrix} 1 & m & 0 & ... & 0 & 0\\ 0 & 1 & m & ... & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0\\ ... & ... & ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & m\\ m & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{bmatrix}_{11\times 11}$

Khai triển định thức của ma trân A theo cột 1 ta được $|A|=1+m^{11}$

Trường hợp 1: $|A|=0\Leftrightarrow m=-1$. Cộng tất cả các phương trình của hệ ta được 0 = 1, suy ra hệ vô nghiệm.

Trường hợp 2 : $|A|\neq 0\Leftrightarrow m\neq -1$. Hệ có nghiệm duy nhất.

Ta có: $\Delta_1=\begin{vmatrix} 1 & m & 0 & ... & 0 & 0\\ \frac{1}{m} & 1 & m & ... & 0 & 0\\ \frac{1}{m^2} & 0 & 1 & ... & 0 & 0\\ ... & ... & ... & ... & ... & ...\\ \frac{1}{m^9} & 0 & 0 & ... & 1 & m\\ \frac{1}{m^{10}} & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{vmatrix}=1-\frac{1}{m}\cdot m+\frac{1}{m^2}\cdot m^2-\cdots+\frac{1}{m^{10}}\cdot m^{10}=1$

(khai triển theo cột 1)

Khi đó $x_1=\frac{\Delta_1}{|A|}=\frac{1}{1+m^{11}}\cdot$ Thay x_1 vào phương trình thứ nhất của hệ ta tìm được :

$$x_2=\frac{1}{m}\left(1-\frac{1}{1+m^{11}}\right)=\frac{m^{10}}{1+m^{11}}.$$

Thay x_2 vào phương trình thứ hai của hệ ta tìm được :

$$x_3=\frac{1}{m^2}\cdot\frac{1}{1+m^{11}}.$$

Thay x_3 vào phương trình thứ ba của hệ ta tìm được :

$$x_4=\frac{1}{m^3}\left(1-\frac{1}{1+m^{11}}\right)=\frac{m^8}{1+m^{11}}.$$

Tiếp tục như vậy cuối cùng ta tìm được nghiệm duy nhất của phương tình là $(x_1;x_2;...;x_{10};x_{11})$,

trong đó : $x_{2k+1}=\frac{1}{m^{2k}\left(1+m^{11}\right)},\ k=\overline{0;5};\quad x_{2k}=\frac{m^{12-2k}}{1+m^{11}},\ k=\overline{1;5}.$

Bài 5.

Ta có $A^{2016}=\theta$ nên $\left|A^{2016}\right|=0$. Suy ra $|A|^{2016}=0\Rightarrow|A|=0$ (1)

Ta có $AB=A+B\Leftrightarrow B=A(B-I)$

Suy ra $|B|=|A||B-I|$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $|B|=0$. Vậy hệ phương trình thuần nhất $B.X=\theta$ có vô số nghiệm, tức là có vô số ma trận X sao cho $B.X=\theta$.

HỌC VIỆN NÔNG NGHIỆP VIỆT NAM

KỲ THI OLYMPIC TOÁN HỌC SINH VIÊN
NĂM HỌC 2016

ĐỀ THI MÔN : GIẢI TÍCH

Thời gian làm bài: 120 phút

Họ và tên thí sinh: .... **SBD**: ....

Bài 1. (Dãy số)

1) Cho dãy số (a_n) xác định bởi: $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 2}, n \geq 2.$

a) Chứng minh rằng $\dfrac{3}{2} \leq a_n \leq \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$ với mọi $n \geq 1.$

b) Chứng minh dãy số đơn điệu.

c) Chứng minh dãy số hội tụ và tìm giới hạn của dãy số.

2) Cho dãy số (a_n) xác định bởi: $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{\sqrt[2016]{a_n}}, n \geq 1.$ Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty.$

3) Cho $a \in (0,1)$ và dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi $x_0 = a, x_{n+1} = x_n(1 - x_n{}^2)$ với mọi $n = 0,1,2...$

a) Chứng minh $\{x_n\}$ giảm, bị chặn dưới và có giới hạn 0.

b) Tìm giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}x_n$. *(HD: tìm cách sử dụng định lý Stolz)*

Bài 2. (Hàm số, hàm số liên tục)

1) Giả sử f là một hàm số thực xác định trên $\mathbb{R}$ sao cho $f(xy) = xf(x) + yf(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Bằng cách chọn các giá trị thích hợp của x, y, chứng minh rằng:

a) $f(1) = 0.$

b) Hơn nữa, $f(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}.$

2) Cho hàm số $f : [1;2] \to [2;4]$ là hàm số liên tục. Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in [1;2]$ sao cho $f(x_0) = 2x_0$. *(HD: sử dụng định lý giá trị trung gian của hàm số liên tục)*

Bài 3. (Phép tính vi phân hàm số)

1) Chứng minh rằng $\dfrac{\ln x}{x-1} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ với mọi $0 < x \neq 1.$

2) Cho $f(x)$ là hàm số khả vi cấp hai liên tục trên $\mathbb{R}$ và phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

a) Áp dụng định lý Rolle với hàm số $G(x) = e^{-2x} f(x),$ hãy chứng minh phương trình $f'(x) - 2f(x) = 0$ có ít nhất hai nghiệm phân biệt.

b) Chứng minh rằng phương trình $f''(x) - 4f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm.

-- **Hết** --

<u>Ghi chú:</u> *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

HỌC VIỆN NÔNG NGHIỆP VIỆT NAM

KỲ THI OLYMPIC TOÁN HỌC SINH VIÊN
NĂM HỌC 2016

ĐÁP ÁN MÔN : GIẢI TÍCH

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài 1. 1) $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 2},\ n \ge 2$

a) Chứng minh bằng phương pháp quy nạp $\frac{3}{2} \le a_n \le \frac{3+\sqrt{17}}{2}$ (*) (đã điều chỉnh lại đề bài)

Với $n = 2,\ a_n = \sqrt{5}$ thỏa mãn (*) .

Giả sử (*) đúng đến n, ta có $\sqrt{3.\frac{3}{2}+2} \le a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 2} \le \sqrt{3.\frac{3+\sqrt{17}}{2}+2}$

Suy ra (*) đúng đến $n+1$. Ta có đpcm.

b) Xét $a_{n+1}^2 - a_n^2 = 3a_n - 2 - a_n^2 \ge 0$ do (*) nên dãy $\{a_n\}_{n\ge 1}$ là dãy tăng.

c) Dãy $\{a_n\}_{n\ge 2}$ là dãy tăng và bị chặn trên bởi $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ nên tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ thỏa mãn phương trình $a = \sqrt{3a+2} \Leftrightarrow a = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$

2) Ta có $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{\sqrt[2016]{a_n}} > 0$ nên $\{a_n\}_{n\ge 1}$ là dãy tăng. Giả sử dãy bị chặn, suy ra tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ thỏa mãn phương trình $a = a + \frac{1}{\sqrt[2016]{a}}$. Phương trình này vô nghiệm nên điều giả sử là không đúng. Vậy dãy đã cho không bị chặn.

3) a) Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được $0 < x_n < 1\ \forall n \ge 0$.

Lại có $x_{n+1} - x_n = -x_n^3 \le 0\ \forall n \ge 0$ nên tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ thỏa mãn $x = x(1-x^2) \Leftrightarrow x = 0$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

b) Xét $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n^2$. Đặt $u_n = n; v_n = \frac{1}{x_n^2}; n = 1, 2, \ldots$. Ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}}$

Lại có $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_n^2(1-x_n^2)^2} - \frac{1}{x_n^2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2-x_n^2}{(1-x_n^2)^2} = 2$ (do $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$)

Vậy theo định lí Stolz , ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n} = \frac{1}{2}$ hay $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n^2 = \frac{1}{2}$. Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}x_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Bài 2. 1) $f(xy) = xf(x) + yf(y)\ \forall x, y \in \mathbb{R}$

a) Cho $x = y = 1$ ta được $f(1) = 1.f(1) + 1.f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

b) Cho $y = 1, x \neq 1$ ta được $f(x) = xf(x) + 1.f(1) \Leftrightarrow f(x)(x-1) = 0 \forall x \neq 1$.

Vậy $f(x) = 0 \forall x \neq 1$. Kết hợp với câu a) cho ta kết luận $f(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

2) Xét $g(x) = f(x) - 2x$ trên $[1,2]$ là hàm liên tục thỏa mãn

$$g(1) = f(1) - 2 \geq 0; g(2) = f(2) - 4 \leq 0$$

(do $2 \leq f(x) \leq 4$) nên $g(1)g(2) \leq 0$. Theo định lí giá trị trung gian của hàm liên tục, tồn tại $x_0 \in [1,2]$ sao cho $g(x_0) = 0$ hay $f(x_0) = 2x_0$.

Bài 3. 1) Chứng minh $\frac{\ln x}{x-1} < \frac{1}{\sqrt{x}}$ với $0 < x \neq 1$

Xét 2 trường hợp

Trường hợp 1: $x > 1$, bất đẳng thức tương đương $\ln x - \frac{x-1}{\sqrt{x}} < 0$ (*). Xét hàm số

$f(t) = \ln t - \frac{t-1}{\sqrt{t}}$ với $t \geq 1$. Ta có $f'(t) = \frac{1}{t} - \frac{t+1}{2t\sqrt{t}} = -\frac{(\sqrt{t}-1)^2}{2t\sqrt{t}} < 0$ nên $f(t)$ là hàm nghịch biến trên $[1,+\infty)$. Vậy $f(t) < f(1) = 0$ với $t > 1$.

Trường hợp 2: $0 < x < 1$. Đặt $x = \frac{1}{y} (y > 1)$ ta chuyển về trường hợp 1 với bất đẳng thức (*) được chứng minh như trên.

2) a) Xét hàm $G(x) = e^{-2x} f(x)$ là hàm số liên tục, khả vi trên $\mathbb{R}$ và $G(x_1) = G(x_2) = G(x_3) = 0$ với $x_1 < x_2 < x_3$ là các nghiệm của phương trình $f(x) = 0$. Áp dụng định lí Rolle cho $G(x)$ trên đoạn $[x_1, x_2]$, tồn tại $c_1 \in (x_1, x_2)$ sao cho $G'(c_1) = 0$ hay

$$e^{-2c_1}(f'(c_1) - 2f(c_1)) = 0 \Leftrightarrow f'(c_1) - 2f(c_1) = 0$$

Tương tự tồn tại $c_2 \in (x_2, x_3)$ sao cho $f'(c_2) - 2f(c_2) = 0$ hay phương trình $f(x) - 2f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $c_1 < c_2$.

b) Áp dụng định lí Rolle cho hàm $H(x) = e^{2x}(f'(x) - 2f(x))$ trên $[c_1, c_2]$, tồn tại $c_0 \in (c_1, c_2)$ sao cho $H'(c_0) = 0$ hay $e^{2c_0}(f''(c_0) - 4f(c_0)) = 0 \Leftrightarrow f''(c_0) - 4f(c_0)$.

Vậy phương trình $f''(x) - 4f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm.