HỌC VIỆN NÔNG NGHIỆP VIỆT NAM **KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN NĂM 2017**

ĐỀ THI MÔN : ĐẠI SỐ
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài 1. Cho ma trận $B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$. Tính B^{2017}.

Bài 2. Cho ma trận $A=\begin{bmatrix}0 & a & a^2 & a^3\\ \frac{1}{a} & 0 & a & a^2\\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 & a\\ \frac{1}{a^3} & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0\end{bmatrix}$ $(a\neq 0)$.

a) Tính A^2-2A.

b) Chứng minh ma trận A khả nghịch. Tìm ma trận nghịch đảo của A.

Bài 3. Chứng minh rằng:

$$\begin{vmatrix}a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2\\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2\\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2\\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2\end{vmatrix}=0$$

Bài 4. Cho hai ma trận A,B vuông cấp n thỏa mãn: $A^{2017}=0$ và $AB=A+B$. Chứng minh rằng $AB=BA$ và $B^{2017}=0$.

Bài 5. Cho ma trận vuông A cấp n. Vết của ma trận A là tổng các phần tử trên đường chéo chính của A, kí hiệu là $Tr(A)$. Chứng minh rằng nếu $Tr\left(A^tA\right)=0$ thì A là ma trận không.

Bài 6. Giải hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+\ldots+9x_9+10x_{10}=1\\ x_2+2x_3+3x_4+\ldots+9x_{10}+10x_1=2\\ x_3+2x_4+3x_5+\ldots+9x_1+10x_2=3\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_{10}+2x_1+3x_2+\ldots+9x_8+10x_9=10\end{cases}$$

---------------------------------- Hết ----------------------------------

Ghi chú: Cán bộ coi thi không phải giải thích gì thêm

Họ và tên sinh viên:... Mã sinh viên: ....

OLYMPIC TOÁN HỌC SINH VIÊN CẤP HV
NĂM HỌC 2017/2018

BỘ MÔN TOÁN- KHOA CNTT

ĐỀ THI MÔN : GIẢI TÍCH

Ngày 5/11/2017

Thời gian: 120 phút

Bài 1. (Dãy số)

1) Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{n\to-\infty} \dfrac{\sqrt{5n^2+1}-4n}{n}$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+\sin^2(n+1)}-\sqrt{n-\cos^2(n+1)}$.

2) Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1=3, u_{n+1}=\dfrac{1}{3}u_n+4, n\geq 2$.

a) Đặt dãy số $v_n=u_n+\alpha, n\geq 2$. Tìm α để dãy số (v_n) là một cấp số nhân.

b) Tìm giới hạn của dãy (v_n), từ đó suy ra giới hạn của dãy (u_n).

Bài 2. (Giới hạn hàm số)

1) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{2x-5\sqrt{x-1}}{3-\sqrt{x+4}}$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin(x+1)}{x}$.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x})$.

Bài 3. (Phép tính vi phân hàm số)

1) Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $y=x\sqrt{4-x^2}$.

2) Cho bất phương trình

$$mx^4-4x+3m\geq 0. \quad \textbf{(1)}$$

a) Tìm điều kiện của tham số m để **(1)** đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

b) Tìm điều kiện của tham số m để **(1)** có nghiệm.

3) Chứng minh rằng với mọi $x\in[0,\dfrac{\pi}{2})$, ta có $\sin x+\tan x\geq 2x$.

-- **Hết** --

Ghi chú: *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

HỌC VIỆN NÔNG NGHIỆP VIỆT NAM

KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN NĂM 2017

ĐÁP ÁN ĐỀ THI MÔN : ĐẠI SỐ

Bài 1.

Ta có $B = 2I + A$, trong đó $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ta có $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ nên : $B^{2017} = (2I + A)^{2017} = \sum_{k=0}^{2017} C_{2017}^k A^k (2I)^{2017-k} 2^{2017} A$

$$= (2I)^{2017} + 2017A(2I)^{2017} = 2^{2017} I + 2017.$$

Vậy $B^{2017} = \begin{bmatrix} 2^{2017} & 2017.2^{2016} \\ 0 & 2^{2017} \end{bmatrix}$

Bài 2.

a) $A^2 - 2A = 3I$

b) Ta có $A^2 - 2A = 3I \Leftrightarrow A(A - 2I) = 3I \Leftrightarrow A\left[\frac{1}{3}(A - 2I)\right] = I$.

Vậy A khả nghịch và ma trận nghịch đảo của A là :

$$A^{-1} = \frac{1}{3}(A - 2I) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{a}{3} & \frac{a^2}{3} & \frac{a^3}{3} \\ \frac{1}{3a} & -\frac{2}{3} & \frac{a}{3} & \frac{a^2}{3} \\ \frac{1}{3a^2} & \frac{1}{3a} & -\frac{2}{3} & \frac{a}{3} \\ \frac{1}{3a^3} & \frac{1}{3a^2} & \frac{1}{3a} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Bài 3.

Nhân cột 2 với – 1 rồi cộng vào cột 3, nhân cột 1 với – 1 rồi cộng vào cột 4 ta có:

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & 2a+3 & 3(2a+3) \\ b^2 & (b+1)^2 & 2b+3 & 3(2b+3) \\ c^2 & (c+1)^2 & 2c+3 & 3(2c+3) \\ d^2 & (d+1)^2 & 2d+3 & 3(2d+3) \end{vmatrix} = 0$$

Bài 4.

a) $AB = A + B \Leftrightarrow A(B-I)-(B-I) = I \ \Leftrightarrow (A-I)(B-I) = I \ \Leftrightarrow (B-I)(A-I) = I$

$$\Leftrightarrow BA - B - A + I = I \Leftrightarrow BA = A + B$$

Vậy $AB = BA$.

b) Ta có $AB = A + B \Leftrightarrow A(B-I) = B$

$BA = A + B \Leftrightarrow (B-I)A = B$

Suy ra $A(B-I) = (B-I)A$.

Vậy $B^{2017} = \left[A(B-I)\right]^{2017} = A^{2017}(B-I)^{2017} = 0$.

Bài 5.

Giả sử $A = (a_{ij})_n$. Tính toán trực tiếp ta được $Tr\left(A^t A\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$

Ta có: $Tr\left(A^t A\right) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 0 \Leftrightarrow a_{ij} = 0 \ \forall i = \overline{1,n}; j = \overline{1,n}$. Vậy A là ma trận không.

Bài 6.

Cộng 10 phương trình của hệ ta được : $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_9 + x_{10} = 1$

Lấy phương trình thứ k trừ phương trình thứ $k+1$ ($k = \overline{1,9}$) ta tính được :

$x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_9 = 0,2$, $x_{10} = 1 - 9.0,2 = -0,8$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất là : $(0,2;0,2;...;0,2;-0,8)$

OLYMPIC TOÁN HỌC SINH VIÊN CẤP HV
NĂM HỌC 2017/2018

BỘ MÔN TOÁN- KHOA CNTT

ĐÁP ÁN MÔN : GIẢI TÍCH

Ngày 5/11/2017

Thời gian: 120 phút

Bài 1. (Dãy số)

1) Tính các giới hạn sau :

a) (2.5đ) $\lim\limits_{n\to-\infty}\dfrac{\sqrt{5n^2+1}-4n}{n}=\lim\limits_{n\to-\infty}\dfrac{-n\sqrt{5+\dfrac{1}{n^2}}-4n}{n}=\lim\limits_{n\to-\infty}-\sqrt{5+\dfrac{1}{n^2}}-4=-\sqrt{5}-4.$

(Thí sinh xét g/h khi $n\to+\infty$ ra KQ= $\sqrt{5}-4$ vẫn cho điểm bình thường).

b) (2.5đ) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+\sin^2(n+1)}-\sqrt{n-\cos^2(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+\sin^2(n+1)}+\sqrt{n-\cos^2(n+1)}}=0$

, vì mẫu số tiến đến vô cùng.

2) Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1=3, u_{n+1}=\dfrac{1}{3}u_n+4, n\geq 2$.

a) (2.5đ) Đặt $v_n=u_n+\alpha\Rightarrow u_n=v_n-\alpha$ rồi thay vào công thức truy hồi dẫn đến

$v_{n+1}-\alpha=\dfrac{1}{3}(v_n-\alpha)+4\Leftrightarrow v_{n+1}=\dfrac{1}{3}v_n+\dfrac{2}{3}\alpha+4.$

Chọn α sao cho $\dfrac{2}{3}\alpha+4=0\Leftrightarrow\alpha=-6$ thì $v_{n+1}=\dfrac{1}{3}v_n$ thì (v_n) sẽ là cấp số nhân công bội $q=\dfrac{1}{3}$.

b) (2.5đ) Chú ý rằng $v_1=-3$ từ đó $v_n=v_1q^{n-1}=-3(\dfrac{1}{3})^{n-1}\to 0$ khi $n\to\infty$. Từ đó $\lim\limits_{n\to-\infty}u_n=6.$

Bài 2. (Giới hạn hàm số)

1) (2.5đ) Nhân liên hợp rồi phân tích thành nhân tử tìm được $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{2x-5\sqrt{x-1}}{3-\sqrt{x+4}}=-\dfrac{45}{20}$

2) (2.5đ) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin(x+1)}{x}=0$ vì sử dụng đl giới hạn kẹp: $\left|\dfrac{\sin(x+1)}{x}\right|\leq\left|\dfrac{1}{x}\right|\to 0$ khi $x\to\infty$.

3) (4.0đ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x})=\lim\limits_{x\to+\infty}[(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x)+(x-\sqrt{x^2-2x})]=2$

Hướng dẫn: Nhân với lượng liên hợp, sau đó chia cả tử và mẫn cho x^2, x tương ứng để tính riêng các giới hạn:

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x)=1$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2-2x})=1$

Bài 3. (Phép tính vi phân hàm số)

1) (3.0đ) Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $y = x\sqrt{4-x^2}$.

Điều kiện $-2 \le x \le 2$. Hàm số $y = x\sqrt{4-x^2}$ là một hàm liên tục trên khoảng đóng đó nên có Max, min.

Tính đạo hàm $y' = \dfrac{4-2x^2}{2\sqrt{4-x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

So sánh giữa các giá trị $y(\pm 2) = 0,\ y(\sqrt{2}) = 2,\ y(-\sqrt{2}) = -2$ suy ra MAX=2, MIN=-2

2) (5.0đ)Cho bất phương trình

$$mx^4 - 4x + 3m \ge 0 \Leftrightarrow m \ge \frac{4x}{x^4+3}.$$

Khảo sát hàm số $y = \dfrac{4x}{x^4+3}$: Tính $y' = 12\dfrac{1-x^4}{(x^4+3)^2}$

Chú ý $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Lập bảng biến thiên xét dấu y' và tính biến thiên của y với chú ý là

$y(1) = 1,\ y(-1) = -1,\ \lim\limits_{x\to\infty} y = 0$, chúng ta suy ra Max=1, Min=-1.

a) Bất pt đúng với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \ge Max = 1.$.

b) Bất pt có nghiệm $\Leftrightarrow m \ge Min = -1.$.

3) (3.0đ)BĐT $\sin x + \tan x \ge 2x \Leftrightarrow \sin x + \tan x - 2x \ge 0$

Xét hàm số $y = \sin x + \tan x - 2x,\ \ x \in [0, \dfrac{\pi}{2})$

Tính đạo hàm $y' = \dfrac{\cos^3 x - 2\cos^2 x + 1}{\cos^2 x} = \dfrac{(\cos x - 1)(\cos^2 x - \cos x - 1)}{\cos^2 x} \ge 0$ với mọi $x \in [0, \dfrac{\pi}{2})$.

Do đó y là hàm số đồng biến trên $x \in [0, \dfrac{\pi}{2})$. Từ đó $y \ge y(0) = 0$ mọi $x \in [0, \dfrac{\pi}{2})$. (ĐPCM)