



Môn Thi: ĐẠI SỐ

Thời gian: 100 phút

Ngày thi: 30/11/2019

Bài 1 (8,0 điểm) Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -m & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

- 1) (4,0 điểm) Tìm điều kiện của m để A có ma trận nghịch đảo A^{-1} . Khi đó, hãy tìm ma trận nghịch đảo của ma trận $3A^{-1}$ theo m .
- 2) (4,0 điểm) Gọi B là ma trận nhận được từ A sau khi xóa đi hàng 1 và cột 1.
 - a) Tìm ma trận $B^2 - 4B + 2I$, với I là ma trận đơn vị cấp 3.
 - b) Tìm tất cả các ma trận C thỏa mãn $BC = CB$.

Bài 2 (7,0 điểm) Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}$ và đa thức $f(t) = t^3 + 3t^2 + (m^2 - 4)t - m^2$.

- 1) (3,0 điểm) Tính định thức của ma trận A theo a, b, c .
- 2) (2,0 điểm) Tìm m để phương trình $f(t) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt t_1, t_2, t_3 thỏa mãn $t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = 13$.
- 3) (2,0 điểm) Giả sử a, b, c là nghiệm của phương trình $f(t) = 0$. Tìm m để hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $AX = \theta$ có nghiệm duy nhất, trong đó θ là ma trận không cấp 3×1 .

Bài 3 (3,0 điểm) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = -2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 = 4 \end{cases}.$$

Bài 4 (2,0 điểm) Cho $n \in \mathbb{N}^*$ và A, B là hai ma trận vuông cùng cấp n thỏa mãn $AB - BA = B$. Chứng minh rằng $AB^3 = B^3(A + 3I)$, trong đó I là ma trận đơn vị cấp n .

----- Hết -----

Ghi chú: Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: SBD:



Môn Thi: GIẢI TÍCH

Thời gian: 100 phút

Ngày thi: 30/11/2019

Bài 1. (5.0 điểm) Cho dãy số (u_n) xác định bởi công thức

$$u_n = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} \text{ với } n \geq 1.$$

- 1) Chứng minh rằng (u_n) là dãy tăng, tức là $u_{n+1} \geq u_n$ với mọi $n \geq 1$.
- 2) Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ (gợi ý: chứng minh $\frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$ và sử dụng đẳng thức để rút gọn công thức u_n).
- 3) Đặt $v_n = \sqrt[n]{u_1^n + u_2^n + \dots + u_{2019}^n}$. Chứng minh rằng tồn tại một hằng số A không phụ thuộc vào n sao cho $A < v_n < \sqrt[2019]{2019} A$ với mọi $n \geq 1$. Từ đó hãy tìm giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$.

Bài 2. (10.0 điểm) Cho hàm số $g(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$.

- 1) Tìm các giới hạn sau.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - g(x)};$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x);$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x).$$

- 2) Chứng minh rằng $g(x)$ là hàm đơn điệu giảm trên $\mathbb{R}$ và phương trình $g(x) = m$ có nghiệm duy nhất với mọi $m > 0$, $m \in \mathbb{R}$.
- 3) Cho hàm số $u(x)$ là hàm số chẵn (hàm số thỏa mãn $u(-x) = u(x)$), liên tục trên đoạn $[-a, a]$ và hàm số $v(x)$ là hàm số liên tục thỏa mãn $v(x) > 0$ và $v(-x) = \frac{1}{v(x)}$ với mọi $x \in [-a, a]$, $a > 0$. Chứng minh rằng

$$\int_{-a}^a \frac{u(x)}{1 + v(x)} dx = \int_0^a u(x) dx.$$

- 4) Tính tích phân $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{1 - x + \sqrt{x^2 + 1}} dx$ (chú ý: nếu chưa chứng minh ý 3) thì vẫn có thể áp dụng kết quả).

Bài 3. (5.0 điểm) Một công ty vận tải tại Washington, D.C. cung cấp một dịch vụ tham quan cho khách hàng. Một tour tham quan có giá vé (/người) trước đây là 7 đô la và lượng khách hàng ước tính là 1000 khách/tuần. Sau đó công ty giảm giá vé xuống còn 6 đô la thì lượng khách hàng tăng lên là 1200 khách/tuần. Giả sử phương trình biểu diễn số lượng khách hàng/tuần N theo giá vé x là phương trình một đường thẳng (hàm cầu tuyến tính).

- 1) Tìm phương trình hàm cầu $N(x)$ theo giá vé x .
- 2) Tìm giá vé thích hợp x sao cho công ty vận tải đạt được doanh thu/tuần cao nhất, biết rằng hàm doanh thu/tuần là hàm $R(x) = x.N(x)$.

----- Hết -----

**ĐÁP ÁN ĐỀ THI GIẢI TÍCH
VÒNG 1**

Ngày 30/11/2019

Bài 1. (5.0 điểm)

1) (1.0 đ) Dễ thấy $u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{(n+2)!} > 0$ nên (u_n) là dãy tăng.

2) (2.0 đ) Ta có $\frac{k}{(k+1)!} = \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$. Do đó

$$u_n = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

Vậy số hạng tổng quát của dãy là $u_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$.

3) (2.0 đ) Do (u_n) là dãy tăng nên $0 < u_k < u_{2019}$ với mọi $k = 1, 2, \dots, 2018$. Khi đó

$u_{2019} < v_n < (2019)^{\frac{1}{n}} u_{2019}$ với mọi $n \geq 1$. Cho $n \rightarrow \infty$, áp dụng nguyên lý kẹp ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = u_{2019} = 1 - \frac{1}{2019!}.$$

Bài 2. (10.0 điểm)

1) (4.0 đ)

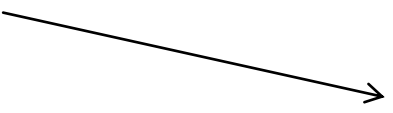
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 + x - \sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + x + \sqrt{x^2 + 1})}{(1 + x)^2 - (x^2 + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + x + \sqrt{x^2 + 1})}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x + \sqrt{x^2 + 1})}{2} = 1. \end{aligned} \quad (2.0\text{đ})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + 1} - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0. \quad (1.0\text{đ})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{x^2 + 1} - x] = +\infty. \quad (1.0\text{đ})$$

2) (1.5 đ) $g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên $g(x)$ là hàm đơn điệu giảm trên $\mathbb{R}$.

Bảng biến thiên của $g(x)$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	-	
$g(x)$	$+\infty$  0	

Do $g(x)$ là hàm liên tục, đơn điệu giảm trên $\mathbb{R}$ và nhận giá trị trong $(0; +\infty)$ nên phương trình $g(x) = m$ có nghiệm duy nhất với mọi $m > 0$.

3) (2.0 đ) Xét $I = \int_{-a}^a \frac{u(x)}{1 + v(x)} dx$. Đặt $t = -x \Rightarrow dt = -dx$, đổi cận
 $x = -a \Rightarrow t = a; x = a \Rightarrow t = -a$.

$$I = \int_{-a}^a \frac{u(-t)}{1+v(-t)} dt = \int_{-a}^a \frac{u(t)}{1+\frac{1}{v(t)}} dt = \int_{-a}^a \frac{u(t)v(t)}{1+v(t)} dt = \int_{-a}^a \frac{u(x)v(x)}{1+v(x)} dx$$

$$(\text{do } u(x) \text{ là hàm chẵn và } v(-x) = \frac{1}{v(x)}).$$

Do đó $2I = \int_{-a}^a \frac{u(x)v(x)}{1+v(x)} dx + \int_{-a}^a \frac{u(x)}{1+v(x)} dx = \int_{-a}^a u(x) dx = 2 \int_0^a u(x) dx$ (do tính chất tích phân hàm chẵn).

$$\Rightarrow I = \int_0^a u(x) dx.$$

4) (2.5 đ) Nhận xét $u(x) = x \sin x$ là hàm số chẵn, $g(x) > 0$ và

$$g(-x) = \sqrt{x^2 + 1} + x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \frac{1}{g(x)}.$$

Áp dụng kết quả ý 3) với $u(x) = x \sin x$ và $v(x) = g(x)$ ta có

$$J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{1 - x + \sqrt{x^2 + 1}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}.$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = -x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} = 1.$$

Bài 3.

$$1) \text{ Gọi } N(x) = ax + b, \text{ khi đó } \begin{cases} 1000 = 7a + b \\ 1200 = 6a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -200 \\ b = 2400 \end{cases}.$$

Vậy hàm cầu là $N(x) = -200x + 2400$. (2.0 đ)

2) Khi đó doanh thu của công ty vận tải là

$$R(x) = (-200x + 2400)x = -200x^2 + 2400x \quad (1.0đ).$$

Từ đó, $R'(x) = -400x + 2400$. Hàm $R(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $R'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 6$.

Vậy giá vé 6 đô la/người là giá vé để công ty vận tải thu được doanh thu cao nhất (2.0 đ).