

Chương 1: Hàm số - Giới hạn và tính liên tục của hàm số

Các dạng bài cần nắm được:

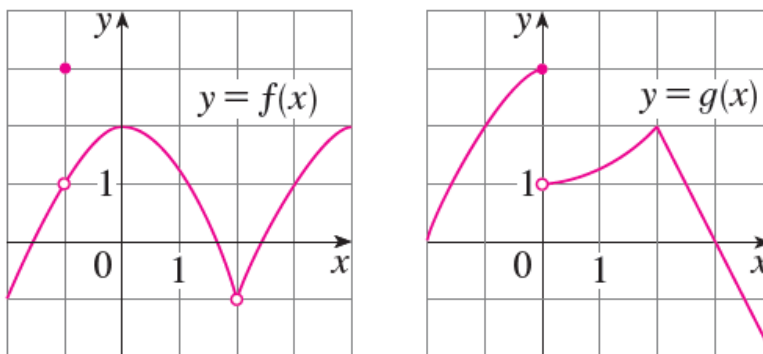
1. Tính giới hạn của một hàm số dạng xác định và các dạng vô định $\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; \infty - \infty; 0 \cdot \infty; 0^{\infty}; 1^{\infty}$.
2. Xét tính liên tục của một hàm số tại một điểm, trên một miền.
3. Tìm điều kiện của tham số để hàm số liên tục tại một điểm, trên một miền.

Bài 1. Tìm miền xác định của các hàm số sau.

- 1) $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{\sqrt{3 + 2x - x}}$;
- 2) $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{16 - x^2}$;
- 3) $y = \ln[1 - \ln(x^2 - 5x - 6)]$;
- 4) $y = \arcsin(x - 2)$.

Bài 2*. Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm số lẻ nếu $f(-x) = -f(x)$; là hàm số chẵn nếu $f(-x) = f(x)$. Cho hàm số $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$. Chứng minh rằng $f(x)$ là hàm số lẻ và tìm hàm ngược của nó (nếu có).

Bài 3. Cho các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đồ thị như hình vẽ (hình tròn rỗng thể hiện hàm số không xác định tại điểm đang xét, hình tròn đặc thể hiện giá trị hàm số tại điểm đang xét). Sử dụng các đồ thị hàm số, hãy xác định các giới hạn sau.



- 1) $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) + g(x)]$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) - g(x)]$
- 3) $\lim_{x \rightarrow -1} [f(x)g(x)]$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]$
- 5) $\lim_{x \rightarrow 2} [x^2 f(x)]$
- 6) $f(-1) + \lim_{x \rightarrow -1} g(x)$

Bài 4. Tìm các giới hạn sau.

- 1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 - 4}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^3}{1 - x}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 5x + 2}{2x^3 + 7x^2 + 6x}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin 2x \cot 2x$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x}$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{3 - \sqrt{2x + 1}}$;
- 7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x + 3}{2x + 1} \right)^{1-x}$
- 8) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 2} \right)^{x^2}$
- 9) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{\cos 4x}$

Bài 5. Tìm các giới hạn sau.

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 1}{5x^2 + 2x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \sqrt{2x^2 + 1}}{x};$$

$$3*) \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\tan 2x}{\cot\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}$$

$$4*) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin^2 x;$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 5x}\right)$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^3}\right)$$

Bài 6*. Tìm các giới hạn sau bằng cách sử dụng các VCL, VCB tương đương.

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{3x + 1}}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[4]{3x+2}}{\sqrt{2x+1}}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4^x - 3^{x+2}}{5^{x-1} - 2^x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x-3)^{20} (3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x} - 1}{x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x-3} - 1}{x^2 - 9}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{\arcsin(x+1)}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$$

Bài 7. Xét tính liên tục của các hàm số sau trên miền xác định.

$$1) f(x) = |x|$$

$$2) f(x) = \begin{cases} \frac{(x^2 - 2)}{(x - 2)} & \text{khi } x \neq 2 \\ A & \text{khi } x = 2 \end{cases}$$

$$3) f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

$$4) f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2-1} - 1}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 2 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

$$5) f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2-1} - 1}{x-1} & \text{khi } x > 1 \\ 2 & \text{khi } x = 1 \\ x+3 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

$$6) f(x) = \begin{cases} \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{3x-4} & \text{khi } x > 1, \\ \sqrt{3-2x} & \text{khi } -3 < x \leq 1, \\ -x & \text{khi } x \leq -3. \end{cases}$$

Bài 8. Tìm giá trị của tham số để hàm số sau liên tục.

$$1) f(x) = \begin{cases} e^x & \text{khi } x < 0 \\ a+x & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 3x^2}{2x - 6} & \text{khi } x \neq 3 \\ 2a + 3 & \text{khi } x = 3 \end{cases}$$

$$3) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x-3)}{x^2 - 9} & \text{khi } x > 3 \\ 2x + a - 3 & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$$

Chương 2: Phép tính vi phân hàm một biến

Các dạng bài cần nắm được:

1. Tính đạo hàm theo định nghĩa tại một điểm.
2. Tính đạo hàm theo các tính chất và quy tắc đạo hàm.
3. Tính vi phân cấp 1.
4. Tính gần đúng áp dụng vi phân.
5. Tính đạo hàm cấp cao sử dụng công thức Leibnitz.
6. Tính giới hạn sử dụng công thức L'opital.
7. Tìm đa thức Taylor, Maclaurin.
8. Tìm cực trị của hàm số một biến (bài toán tối ưu)

Bài 1. Hãy áp dụng định nghĩa để tính đạo hàm của các hàm số sau:

- | | |
|--|-----------------------|
| 1) $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$ | 2) $y = \sin(3x - 2)$ |
| 3) $f(t) = 5t - 9t^2$ | 4) $y = x $ |

Bài 2. Cho hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x}$

- 1) Nếu $a \neq 0$ hãy dùng bảng đạo hàm của hàm sơ cấp (đạo hàm của hàm lũy thừa) tính $f'(a)$.
- 2) Chứng minh rằng $f'(0)$ không tồn tại.

Bài 3. Giả sử rằng $f(2) = -3$, $g(2) = 4$, $f'(2) = -2$, $g'(2) = 7$. Hãy tìm $h'(2)$ khi:

- | | |
|---------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $h(x) = 5f(x) - 4g(x)$; | 2) $h(x) = f(x)g(x)$; |
| 3) $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$; | 4) $h(x) = \frac{g(x)}{1+f(x)}$. |

ĐS: 1) -38; 2) -29; 3) $\frac{13}{16}$; 4) -1.5.

Bài 4. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

- | | | | |
|--------------------------|--|--------------------------------------|--|
| 1) $y = \sqrt{x}(x-1)$; | 2) $y = \frac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x}}$; | 3) $y = \frac{x^2 - 2\sqrt{x}}{x}$; | 4) $v = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$. |
|--------------------------|--|--------------------------------------|--|

ĐS: 1) $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$;
 2) $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{3}{2\sqrt{x^3}}$; |

3) $y' = 1 + \frac{1}{\sqrt{x^3}}$;	4) $v' = 1 + \frac{1}{3\sqrt[6]{x^5}} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}$.
--------------------------------------	---

Bài 5. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

- | | |
|--|--|
| 1) $F(x) = (4x - x^2)^{100}$; | 2) $g(t) = \frac{1}{(t^4 + 1)^3}$; |
| 3) $y = \frac{\ln(2x+1)}{x}$ tại $x = 1$; | 4) $y = e^{x^2-2x}$ tại $x = 0$. |
| 5) $y = \arctan\left(\frac{x+1}{x^2}\right)$ | 6) $y = x \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)$ |
| 7) $y = \ln(\arccos x)$ | 8) $y = e^{-x^2} \sin x$ |

$$9^*) y = \begin{cases} 2x+3, & x \geq 2 \\ \sin(2x-4), & x < 2 \end{cases} \quad 10^*) y = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ x, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad 1) F'(x) = 100(4-2x)(4x-x^2)^{99}; \quad 2) g'(t) = -\frac{12t^3}{(t^4+1)^4};$$

$$3) y'(1) = \frac{2}{3} - \ln 3; \quad 4) y' = -2.$$

Bài 6*. Viết phương trình đường tiếp tuyến với đường cong $y = \sqrt[4]{x}$ tại điểm $(1;1)$. Vẽ hình minh họa kết quả.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}.$$

Bài 7. Tính $y^{(8)}$ với:

$$1) y = \frac{x^2}{1-x}; \quad 2) y = \frac{1}{x^2-4x+3}; \quad 3^*) y = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}.$$

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad 1) y^{(8)} = -\frac{8!}{(x-1)^9}; \quad 2) y^{(n)} = \frac{(-1)^n}{2} (n!) \left(\frac{1}{(x-3)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right);$$

$$3) y^{(n)} = (-1)^{n+1} \frac{2}{3^n} (1)(4)\dots(3n-5)(x+1)^{\frac{2}{3}-n} + (-1)^{n+1} \frac{1}{3^n} (1)(4)\dots(3n-2)(x+1)^{\frac{1}{3}-n}$$

Bài 8. Hãy tính các đạo hàm cấp cao sau.

$$1) \text{ Tính } y^{(10)} \text{ với } y = (2x^3 - x) \ln(5x+1)$$

$$2) \text{ Tính } y^{(20)} \text{ với } y = x^2 \sin(3x-1)$$

$$3) \text{ Tính } y^{(8)} \text{ với } y = (4x^2 - 1)e^{5-3x}$$

Bài 9. Tính vi phân của các hàm số sau:

$$1) y = x^2 \sin 2x; \quad 2) y = \ln \sqrt{1+t^2}; \quad 3) y = \frac{u-1}{u+1}; \quad 4) y = (1+r^3)^{-2};$$

$$5) y = \sqrt{1-x^2} \cdot \arccos x \text{ tại } x = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 6) f(t) = \sqrt[3]{1+\tan t} \text{ tại } t=0.$$

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad 1) dy = (2x \sin 2x + 2x^2 \cos 2x) dx; \quad 2) dy = \frac{t}{1+t^2} dt; \quad 3) dy = \frac{2}{(u+1)^2} du;$$

$$4) dy = -\frac{6r^2}{(1+r^3)^3} dr; \quad 5) y' = \frac{-x \cdot \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} - 1 \Rightarrow dy \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \left(-\frac{\pi\sqrt{3}}{6} - 1 \right) dx;$$

$$6) f'(t) = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{(1+\tan t)^2}} \frac{1}{\cos^2 t} \Rightarrow df(0) = \frac{1}{3} dt.$$

Bài 10. Tính Δy và dy tại giá trị $x = x_0$ và $dx = \Delta x$:

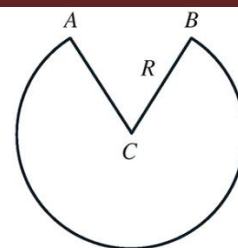
$$1) y = 2x - x^2, \quad x_0 = 2, \quad \Delta x = -0.4$$

$$2) y = \sqrt{x}; \quad x_0 = 4; \quad \Delta x = 1$$

$$3) y = \frac{5}{x}, \quad x_0 = 8, \quad \Delta x = 1$$

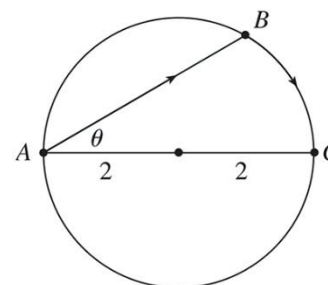
$$4) y = e^x, \quad x_0 = 0, \quad \Delta x = 0.5$$

Bài 16. Một cái cốc uống nước hình nón được làm từ một miếng bìa hình tròn bán kính R bằng cách cắt bỏ đi một miếng hình quạt rồi dán các cạnh CA và CB lại với nhau (xem hình vẽ bên). Hãy tìm dung tích lớn nhất của chiếc cốc.



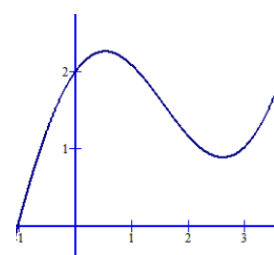
ĐS: $V_{\max} = \frac{2\pi R^3}{9\sqrt{3}}$.

Bài 17*. Một người phụ nữ đứng ở điểm A trên bờ của một cái hồ nước hình tròn bán kính 2km . Người phụ nữ muốn tới điểm C nằm đối diện phía bên kia hồ trong thời gian ngắn nhất có thể. Cô ta có thể đi bộ với vận tốc 4km/h và chèo thuyền với vận tốc 2km/h . Hỏi cô ta phải chọn hành trình như thế nào?

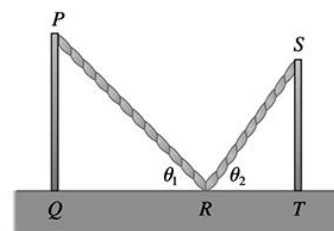


ĐS: Thời gian đi $y = 2\cos\theta + \theta$; $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Nhìn đồ thị hàm số ta thấy y nhỏ nhất khi $\theta = \frac{\pi}{2}$ (θ lớn nhất). Vậy cô ta không chèo thuyền mà đi bộ nửa vòng hồ từ A đến C .



Bài 18*. Hai cái cột thẳng đứng được gia cố bằng một dây thừng PRS nối từ đỉnh của cột thứ nhất xuống một điểm R trên mặt đất rồi nối tới đỉnh của cột thứ hai. Hãy chứng tỏ rằng dây thừng sẽ có độ dài ngắn nhất khi $\theta_1 = \theta_2$.



ĐS: Đặt $QR = x, PQ = h_1, ST = h_2, QT = a$ và chiều dài sợi dây là l . Khi đó

$$l = \sqrt{h_1^2 + x^2} + \sqrt{h_2^2 + (a-x)^2}, \quad 0 \leq x \leq a.$$

l đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = \frac{lh_1}{h_1 + h_2} \Leftrightarrow \theta_1 = \theta_2$.

Chương 3: Nguyên hàm – Tích phân

Các dạng bài cần nắm được:

1. Tìm nguyên hàm, tích phân bất định, tính tích phân xác định, tích phân suy rộng
 - Sử dụng bảng nguyên hàm cơ bản và tính chất
 - Sử dụng công thức đổi biến
 - Sử dụng công thức tích phân từng phần
2. Tìm nguyên hàm, tích phân bất định, tính tích phân xác định, tích phân suy rộng một số dạng hàm đặc biệt:
 - Hàm phân thức hữu tỷ
 - Hàm lượng giác
 - Hàm vô tỷ đơn giản.
3. Sử dụng tích phân xác định để tính độ dài đường cong.
4. Xét sự hội tụ và phân kỳ của tích phân suy rộng.

Bài 1. Tìm họ các nguyên hàm của các hàm số sau:

$$\begin{array}{lll}
 1) f(x) = 1 - \frac{x}{3} + \frac{2}{x^2}; & 2) g(x) = \frac{1}{1+2x}; & 3) h(x) = -3e^{-4x} + \sqrt{x}; \\
 4) l(x) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right); & 5) k(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}; & 6) y = \frac{1}{\sqrt{9x^2-1}} + \frac{1}{x^2-9}; \\
 7) y = \cos(5x+2); & 8) y = e^{-\frac{x}{2}}; & 9) y = \frac{1}{2-x}.
 \end{array}$$

ĐS: với C là hằng số tùy ý,

$$\begin{array}{ll}
 1) F(x) = x - \frac{x^2}{6} - \frac{2}{x} + C; & 2) G(x) = \frac{1}{2} \ln(1+2x) + C; \\
 3) H(x) = \frac{3}{4} e^{-4x} + \frac{2}{3} x^{3/2} + C; & 4) L(x) = \frac{9}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) + C; \\
 5) K(x) = \frac{1}{2} \arcsin(2x) + C; & 6) M(x) = \frac{1}{3} \ln|3x + \sqrt{9x^2-1}| + \frac{1}{6} \ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C.
 \end{array}$$

Bài 2. Tính các tích phân sau sử dụng phương pháp đổi biến.

$$\begin{array}{llll}
 1) \int \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} dx; & 2) \int \frac{dx}{x \ln x}; & 3) \int \cot x dx; & 4) \int x\sqrt{x^2-1} dx \\
 5) \int \sqrt{4-x^2} dx; & 6) \int x(2x+5)^4 dx; & 7) \int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}; & 8) \int_0^{\pi/4} \sin^3 x dx; \\
 9) \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1} dx; & 10) \int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}; & 11) \int_9^{+\infty} \frac{2dx}{\sqrt{x}(x-4)}; & 12) \int_1^{+\infty} \frac{e^{3x} dx}{1-e^{6x}}.
 \end{array}$$

Bài 3. Tính các tích phân sau bằng phương pháp tích phân từng phần.

$$\begin{array}{llll}
 1) \int x \arctan x dx; & 2) \int x^2 \ln x dx; & 3*) \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}} dx; & 4) \int (x^2+1) \sin x dx; \\
 5) \int_0^{1/2} \arcsin x dx; & 6) \int_0^1 \frac{x-1}{e^x} dx; & 7) \int_1^e \ln x dx; & 8) \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3} dx;
 \end{array}$$

9) $\int_0^{+\infty} x e^{-2x} dx;$

10) $\int_{-\infty}^0 (x+3)e^{3x} dx.$

Bài 4. Tính các tích phân dạng hàm đặc biệt sau.

Hàm phân thức hữu tỷ

1) $\int \frac{x^4 + 2x^2}{x^2 + 1} dx;$

2) $\int \frac{xdx}{x^2 + 3x + 2};$

3) $\int \frac{x^2 dx}{x^2 + 4x + 5};$

4) $\int \frac{xdx}{(x+1)^2(x-2)};$

5) $\int \frac{x+3}{x^2 + 2x + 2} dx;$

6) $\int_1^{+\infty} \frac{2dx}{2x^2 + 3x + 1};$

7) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{4x^2 + 1};$

8) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+2)^4};$

9) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{4x^2 - 3x - 1};$

10) $\int_4^{+\infty} \frac{dx}{6 + x - x^2};$

11) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}.$

Hàm lượng giác

12) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx;$

13) $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx;$

14) $\int \frac{1}{\cos^4 x} dx;$

15) $\int \sin x \sin 3x dx.$

Hàm vô tỷ đơn giản

16) $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} dx;$

17) $\int \frac{1}{\sqrt{2-3x-4x^2}} dx;$

18) $\int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}} dx;$

19) $\int \sqrt{4-x^2} dx.$

Bài 5. Tính các tích phân sau:

1) $\int_e^{e^2} \ln x dx;$

2) $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{4+x^2}} dx;$

3) $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{4x^2+1};$

4) $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx;$

5) $\int_1^{+\infty} x e^{-2x} dx;$

6) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx;$

7) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4x^2+4x+5} dx;$

8) $\int_1^{+\infty} \frac{3\sqrt{x}+2}{x^3} dx;$

ĐS: 1) $e^2;$

2) $\frac{16-7\sqrt{5}}{3};$

3) $\frac{\pi}{4};$

4) 2;

5) $\frac{3}{4e^2};$

6) $+\infty;$

7) $\frac{\pi}{4};$

8) 3.

Bài 6. Tính độ dài phần đường cong thuộc đồ thị hàm số:

1) $y = x^{3/2}$ từ điểm (1;1) đến điểm (4;8);

2) $y = \ln(1-x^2)$ với $0 \leq x \leq \frac{1}{2};$

3) $y = \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ từ điểm $x=0$ đến $x=\frac{1}{2};$

4) $y = \frac{1}{3}\sqrt{x} \cdot (x-3)$ với $1 \leq x \leq 9.$

5) $y = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$ từ điểm $x=\sqrt{2}$ đến $x=\sqrt{5};$

6) $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ với $0 \leq x \leq 1.$

ĐS: 1) $\frac{80\sqrt{10}-13\sqrt{13}}{27};$

2) $\ln 3 - \frac{1}{2};$

3) $2(\sqrt{3}-\sqrt{2});$

4) $10\frac{2}{3}$;

5) 1 ;

6) $\frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)$.

Bài 7. Xét sự hội tụ và phân kỳ của các tích phân suy rộng sau.

1) $\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{2x^4 + 3x^2 + 5} dx$;

2) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(3+2x)}{x+1} dx$;

3) $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2} dx$;

4) $\int_1^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{2}{x}\right) dx$;

5) $\int_1^{+\infty} \frac{1+x^2}{x^3} dx$;

6) $\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}} dx$;

7) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^{\sqrt[3]{x}} - 1}$;

8) $\int_1^{+\infty} \frac{1 + \sin^2 x}{\sqrt{x}} dx$;

ĐS: 1) Phân kỳ

2) Phân kỳ

3) Hội tụ

4) Phân kỳ

5) Phân kỳ

6) Hội tụ

7) Hội tụ

8) Phân kỳ

Chương 4: Chuỗi

Các dạng bài cần nắm được:

1. Tính tổng của một chuỗi số.
2. Xét sự hội tụ, phân kỳ của một chuỗi số
 - Sử dụng điều kiện cần, chuỗi phân kỳ nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$.
 - Sử dụng tiêu chuẩn so sánh, tiêu chuẩn tương đương, tiêu chuẩn tích phân đối với chuỗi số dương.
 - Sử dụng tiêu chuẩn tỷ số D’alembert, tiêu chuẩn căn thức Cauchy để xét sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi có dấu bất kỳ.
 - Sử dụng tiêu chuẩn Leibnitz đối với chuỗi đan dấu.
3. Tìm bán kính hội tụ, miền hội tụ của chuỗi lũy thừa
 - Sử dụng tiêu chuẩn tỷ số D’alembert, tiêu chuẩn căn thức Cauchy để tìm bán kính hội tụ.
 - Xét tính chất hội tụ, phân kỳ của chuỗi lũy thừa tại các điểm $x = \pm R$ (nếu $0 < R < \infty$) và suy ra miền hội tụ.
4. Tính tổng của chuỗi lũy thừa trong miền hội tụ.

Bài 1. Tính tổng của các chuỗi số sau.

1*. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

2. $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$;

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$;

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$;

5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n}$;

6*. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[2\left(\frac{3}{5}\right)^n + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \right]$;

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$;

8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}$.

ĐS: 1. 1

2. $-\ln 2$

3. $1 - \sqrt{2}$

4. $\frac{1}{3}$

5. $\frac{7}{2}$

6. 4

7. $\frac{1}{8}$

8. 1.

Bài 2. Xét sự hội tụ, phân kỳ của các chuỗi số sau.

Sử dụng tiêu chuẩn so sánh/tương đương

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-3n}{n^3+3n^2+1}$;

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}$;

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+3^n}$;

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n^2+3n-4}$;

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$;

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \tan \frac{\pi}{4n}$;

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5n+1}{4n^2-2\sin n}$;

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{x}{n}\right)$;

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}\right)$;

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n\sqrt{n+1}}{n^2+2}$;

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$;

12*. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n-1}{n+1}$;

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n - e^{-n}}{2}$;

14*. $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-n}$;

15*. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$;

Sử dụng tiêu chuẩn D'Alembert/ Cauchy/Tích phân

- | | | |
|--|--|---|
| 16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$; | 17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$; | 18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(2n+1)}{5^n}$; |
| 19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$; | 20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n + n}$; | 21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$; |
| 22. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2 + 2n + 1}{5n^2 - 2n + 4} \right)^n$; | 23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n^2}$; | 24. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n-1)}$; |
| 25. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctan \frac{1}{n} \right)^n$. | | |

Sử dụng tiêu chuẩn hội tụ tuyệt đối/Tiêu chuẩn Leibnitz

- | | | |
|---|---|--|
| 26. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$; | 27. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{n+100}$; | 28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{(2n+1)5^n}$; |
| 29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$; | 30. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$; | 31. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3n+1}{n(n+1)}$. |

ĐS:

- | | | | | |
|----------------|-------------|-------------|------------|-------------|
| 1. Hội tụ | 2. Hội tụ | 3. Hội tụ | 4. Phân kì | 5. Phân kì |
| 6. Phân kì | 7. Phân kì | 8. Hội tụ | 9. Phân kì | 10. Phân kì |
| 11. Hội tụ | 12. Hội tụ | 13. Phân kì | 14. Hội tụ | 15. Hội tụ |
| 16. Hội tụ | 17. Phân kì | 18. Hội tụ | 19. Hội tụ | 20. Hội tụ |
| 21. Hội tụ | 22. Hội tụ | 23. Phân kì | 24. Hội tụ | 25. Hội tụ |
| 26- 31. Hội tụ | | | | |

Bài 3. Tìm miền hội tụ của các chuỗi lũy thừa sau.

- | | | | |
|---|--|--|--|
| 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{\sqrt{n}}$; | 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n+1} x^{2n}$; | 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5x)^n}{n!}$; | 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n+1} \right)^n (x-4)^n$; |
| 5*. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$; | 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n5^n}$; | 7. $\sum_{n=1}^{\infty} (2n+5)x^n$; | 8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!}$. |

ĐS:

- | | | | |
|-----------|---|-----------------|-----------------|
| 1. [-3;5) | 2. $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$ | 3. \mathbb{R} | 4. (1;7) |
| 5. (-1 1) | 6. [0;10) | 7. (-1;1) | 8. \mathbb{R} |

Bài 4. Tìm miền hội tụ và tính tổng của các chuỗi lũy thừa sau trong miền hội tụ của nó.

- | | | |
|--|---|--|
| 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-1}{2x-1} \right)^n$ | 2. $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^n$ | 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n+1}$ |
| 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n n}$ | 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{(2x+1)^n}$ | |

ĐS: 1. $D = (-\infty; 0) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right); S(x) = \frac{x-1}{x}$

2. $D = \left(\infty; \frac{1}{2}\right); S(x) = \frac{(x-5)(x+1)}{9}$

3. $D = (1; 3); S(x) = -1 - \frac{\ln|x-3|}{x-2}$

4. $D = [-1; 3); S(x) = -\ln\left(\frac{3-x}{3}\right)$

5. $D = (-2; 1); S(x) = \frac{9}{2x-2}$

Bài 5*. Tính tổng của chuỗi

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ (sử dụng khai triển Maclaurin hàm $f(x) = e^x$, **ĐS:** e^2)

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+3}(2n+1)!}$ (sử dụng khai triển Maclaurin hàm $f(x) = \sin x$, **ĐS:** $\frac{1}{4} \sin \frac{1}{2}$)

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ (xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$, sử dụng tích phân từng thành phần của chuỗi để tính $S(x)$, sau đó thay $x = \frac{1}{2}$, **ĐS:** $\ln 2$).

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(n+1)3^n}$ (xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^n$, tính $S(x)$, sau đó thay $x = \frac{2}{3}$, **ĐS:** $\frac{2-\ln 3}{2}$).

----- **HẾT** -----