

Chương 1: Hàm một biến

Dạng 1: Tính gần đúng có áp dụng vi phân.

Dạng 2: Tìm đa thức Tay-lor, đa thức Mac-lau-ranh (Maclaurin).

Chương 2: Các phép tính tích phân hàm một biến

Dạng 3: Tính nguyên hàm, tích phân xác định bằng phương pháp đổi biến số.

Dạng 4: Tính nguyên hàm, tích phân xác định bằng phương pháp TP từng phần.

Dạng 5: Tính độ dài đường cong \widehat{AB} .

Dạng 6: Xét sự hội tụ và tính tích phân suy rộng.

Chương 3: Chuỗi số

Dạng 7: Xét sự hội tụ và tính tổng của chuỗi số

Dạng 8: Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm (ĐỌC THÊM)

Chương 4: Hàm nhiều biến

Dạng 9: Tính các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 (của hàm 2 biến, 3 biến)

Dạng 10: Tính vi phân toàn phần (cấp 1) và ứng dụng để tính gần đúng

Dạng 11: Tìm cực trị của hàm hai biến (không yêu cầu tính cực trị có điều kiện)

Chương 5: Tích phân bội

Dạng 12: Tính tích phân kép trên miền hình chữ nhật vuông (các cận là hằng số) + miền hình chữ nhật cong (một cận xác định và một cận phụ thuộc biến (bậc nhất))

Dạng 13: Tính tích phân kép có đổi biến số (Đổi biến trong hệ tọa độ De-các để đưa miền hình bình hành về hình chữ nhật + Đổi biến trong hệ tọa độ cực để đưa miền hình tròn hoặc elip, về h.c.n cong)

Chương 6: Phương trình vi phân

Dạng 14: Phương trình vi phân cấp 1, (PTVP có biến số phân ly + PTVP tuyến tính cấp 1)

Dạng 15: Phương trình vi phân cấp 2 tuyến tính với hệ số hằng (Hàm mũ, không chong chất nghiệm, **về phải có dạng $e^{\alpha x} \cdot P_n(x)$**)

Chương 1: Hàm một biến

Bài 0: Tính các giới hạn sau:

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - x + 5}$ b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4^x - 3^{x+2}}{5^{x-1} + 2^{x-2}}$ c. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$ d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 3x + 1}{2e^{x+5}}$ e. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 1}{\ln(2x - 3)}$

Bài 1: Tính gần đúng các biểu thức sau (áp dụng vi phân).

1. $A = \sqrt[3]{0.97}$ 2. $B = \cos 31^\circ$ 3. $C = \arctan 0.02$ 4. $D = \sin 58^\circ$ 5. $E = e^{0.03}$ 6. $F = \ln 1.01$

Bài 2: Tìm đa thức Tay-lor, đa thức Mac-lau-ranh (Maclaurin).

- Tìm đa thức Taylor bậc 3 của hàm số $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$ tại $x = 1$.
- Tìm đa thức Maclaurin bậc 4 của hàm $p(x) = (x + 1) \cdot \ln(x + 1)$
- Tìm đa thức Taylor bậc 4 của hàm $g(x) = (x^2 + 2) \cdot e^{x-2}$ tại điểm $x = 2$.
- Tìm đa thức Taylor bậc 3 của hàm số $h(x) = x^2 \sin(x + 2)$ tại $x = -2$.

Chương 2: Các phép tính tích phân hàm một biến

Bài 3: Tính nguyên hàm, tích phân xác định bằng phương pháp đổi biến số.

a. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+2}} dx$ b. $\int \sqrt{5-x^2} dx$ c. $\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}} dx$ d. $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$
 e. $\int \frac{1+\sin(\frac{1}{x})}{x^2} dx$ f. $\int (2x-3)e^{x^2-3x} dx$ g. $\int_1^e \frac{1+\sin(\ln x)}{x} dx$ h. $\int_0^1 (3x^2-2) \cdot \cos(x^3-2x) dx$

Bài 4: Tính nguyên hàm, tích phân xác định bằng phương pháp TP từng phần.

a. $\int \arcsin x dx$. b. $\int (5x-3)\cos(3x) dx$ c. $\int_{-2}^0 (2x-3)e^{x+2} dx$ d. $\int_1^2 (4x-1)\ln(2x-1) dx$

Bài 5: Tính độ dài đường cong \overline{AB} (ĐỌC THÊM).

- $y = \ln x$ từ điểm $x = 1$ đến điểm $x = \sqrt{3}$
- $y = 2x\sqrt{x}$ từ điểm $(0,0)$ đến điểm có hoành độ $x = 2$.
- $r = 2(1 + \cos \varphi)$ với $0 \leq \varphi \leq \pi$.
- $x = t - \cos t$, $y = \sin t$ với $0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$.

Bài 6A: Tính các tích phân suy rộng sau.

1. $R_1 = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2+x-2} dx$ 3. $R_3 = \int_{-\infty}^0 x \cdot 2^{3x-1} dx$ 5. $R_5 = \int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2x+3}} dx$
 2. $R_2 = \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{3+\cos \frac{1}{x}}{x^2} dx$ 4. $R_4 = \int_{-\infty}^{-1} \frac{x}{\sqrt{2-3x}} dx$ 6. $R_6 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2+3}} dx$

Bài 6B: Xét sự hội tụ của các tích phân suy rộng sau.

a. $T_1 = \int_1^{+\infty} \frac{x^2+3x}{x^4-x^2+5} dx$ b. $T_2 = \int_0^{+\infty} \frac{x^2+3x}{x^3-x^2+5} dx$ c. $T_3 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$

Chương 3: Chuỗi số và chuỗi hàm

Bài 7A: Tính tổng của các chuỗi số sau.

$$\begin{aligned}
 1. \quad A_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} & 3. \quad A_3 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-2n}{n!} & 5. \quad A_5 &= \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) \\
 2. \quad A_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^{n-1} + 2^{n+1}}{6^{n-1}} & 4. \quad A_4^* &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} & 6. \quad A_6 &= \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)
 \end{aligned}$$

Bài 7B: Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau

$$\begin{aligned}
 1. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+3}}{3^{n-5}} & \quad 2. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n \cdot (3n+1)} & 3. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n+1}
 \end{aligned}$$

Bài 8: Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm sau (ĐỌC THÊM).

$$\begin{aligned}
 1. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-1}{2x-1}\right)^n & \quad 3. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{(2x+1)^n} & 5. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(x+1)^n} \\
 2. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n \cdot n} & \quad 4. \quad \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^n & 6. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n+1}
 \end{aligned}$$

Chương 4: Hàm nhiều biến

Bài 9: Tính các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 (của hàm 2 biến, 3 biến)

a/ $z = x^5 + 5xy^3 - 4x \cdot y + x - 2$

b/ $z = \frac{x^2 - xy + 1}{y - 2}$

c/ $z = \ln(x^2 + y^2 - 1)$

d/ $z = \sin x \cdot \cos y + e^x - e^{2y}$

e/ $u(x, y, z) = \arcsin(x + 2y - 3z)$

f/ $u(x, y, z) = \sqrt{x^2 + 2y} \cdot \ln z$

g/ $f(x, y) = (x - 2y)^3$

h/ $g(x, y) = x \cdot e^y + y \cdot e^x - x^3 + 2y$

i/ $z = \frac{y}{x} + \sin xy$

k/ $u(x, y, z) = x \cdot \sin y + y \cdot \sin z + z \cdot \sin x$

Bài 10A: Tìm vi phân toàn phần của hàm số:

a/ $z = \sin(x^2 + y^2)$

b/ $z = \ln(x^2 - xy + 2y^3)$

c/ $f = e^x \cdot (x \sin y + \cos y)$

d/ $u = x\sqrt{y} + y\sqrt{z} + z\sqrt{x}$

Bài 10B: Cho hàm số $f(x, y) = e^x \sqrt{x^2 + y^2}$

a/. Tìm vi phân toàn phần của hàm số trên.

b/. Tính gần đúng giá trị biểu thức $P = e^{0,02} \sqrt{0,02^2 + 1,01^2}$

Bài 10C: Cho hàm số $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$

a/. Tìm vi phân toàn phần của hàm số trên.

b/. Tính gần đúng giá trị biểu thức $P = \sqrt[3]{1,02^2 + 0,05^2}$

Bài 10D: Áp dụng vi phân toàn phần, tính gần đúng:

a/ $A = \sqrt{4,05^2 + 2,93^2}$

b/ $B = \sqrt{0,09^3 + 0,99^3}$

c/ $C = \arctan \frac{1,05}{0,92}$

d/ $D = 0,99 \cdot \sin 32^\circ$ (gợi ý: $\text{đổi } 32^\circ = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{90} \text{ (radian)}$)

Bài 11: Tìm các điểm cực trị và giá trị cực trị nếu có của các hàm số sau:

a/ $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1.$

b/ $z = x^3 + 6xy + 2y^2 + 6x.$

c/ $f(x, y) = x + y - x \cdot e^y$

d/ $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2.$

e/ $f(x, y) = x^2 - 12xy + xy^3$

f/ $f(x, y) = 4(x - y) - x^2 - y^2$

Chương 5: Tích phân bội

Bài 12: Tính tích phân kép trên miền hình chữ nhật vuông (các cạnh là hằng số) + miền hình chữ nhật cong (một cạnh xác định và một cạnh phụ thuộc biến (bậc nhất))

a/ $I = \iint_D (x^2 + 3xy + 4y^2 - x + y) dx dy$ trên miền $D: \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$.

b/ $J = \iint_D e^x y dx dy$ với $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1; |y| \leq 1\}$.

c/ $K = \iint_D (\sin x + \cos y) dx dy$ trên miền giới hạn bởi các đường thẳng $x = 0, x = \frac{\pi}{4}, y = 0, y = \frac{\pi}{4}$.

d/ $A = \iint_D (x + 2y) dx dy$ với miền $D: 1 \leq x \leq 5, x - 1 \leq y \leq x + 2$.

e/ $B = \iint_D y^2 dx dy$ trên miền D giới hạn bởi 3 đường thẳng: $y = 0, x = 2, x = y$.

f/ $C = \iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy$, với D là miền giới hạn bởi $\begin{cases} x + y \leq 1 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$

g/ $E = \iint_D y dx dy$ với D là miền giới hạn bởi các đường $y = 1, y = x, y = 4 - x$.

Bài 13: Tính tích phân kép có đổi biến số (Đổi biến trong hệ tọa độ De-các để đưa miền hình bình hành về hình chữ nhật + Đổi biến trong hệ tọa độ cực để đưa miền hình tròn về h.c.n cong)

a/ $A = \iint_D (x + y)^3 \cdot (x - y)^2 dx dy$ với D là miền giới hạn bởi các đường: $x + y = 1, x - y = -1, x + y = 3, x - y = 1$

b/ $B = \iint_D (x - y) dx dy$ với D là miền giới hạn bởi các đường thẳng: $y = x + 1, y = x - 2, y = 2x - 1, y = 2x - 4$

c/ $C = \iint_D (y - x) dx dy$, với D là miền giới hạn bởi $\begin{cases} y = x + 1; y = x - 3 \\ y = -\frac{x}{3} + \frac{7}{3}; y = -\frac{x}{3} + 5 \end{cases}$

d/ $I = \iint_D (x - y) dx dy$ với $D: x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$.

e/ $J = \iint_D e^{x^2+y^2} dx dy$ trên nửa hình tròn $D: x^2 + y^2 \leq 9, y \geq 0$.

f/ $K = \iint_D dx dy$ trên miền $D: x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0, x \leq 0$.

g/ $L = \iint_D (\sqrt{x^2 + y^2} - 1) dx dy$ trên miền giới hạn bởi đường tròn: $x^2 + y^2 = 4$

h/ $G = \iint_D dx dy$ với miền $D: x^2 + y^2 - 2x \leq 0, y \geq 0$

Chương 6: Phương trình vi phân

Bài 14A: Giải các phương trình vi phân cấp 1 sau (PTVP có biến số phân ly):

a/ $x(1-y).y' = -2y$

b/ $x^3.(y+1)dx + (x^4 - 1)dy = 0$

c/ $y' = \frac{1+y^2}{\sqrt{1-x^2}}$

d/ $dx = \cos^2 x.(\sin y - \cos y) dy$

e/ $(y^3 + 1)y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

f/ $x(1+y^2)dx + y(1+x^2)dy = 0$

g/ $(1+e^{2x})y^2 dy = e^x dx$

h/ $yy' = \frac{1-2x}{y}$

Bài 14B: Giải các phương trình vi phân cấp 1 sau (PTVP tuyến tính cấp 1):

a/ $y' + y = e^{x/2}, y(0) = -1$

b/ $y' + 2xy = x.e^{-x^2}, y(0) = \frac{1}{2}$

c/ $y' - \frac{2y}{x} = x^3$

d/ $y' + xy = \sin x.e^{-\frac{x^2}{2}}$

e/ $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3, y(0) = \frac{1}{2}$

i/ $y' + \frac{2x}{x^2+1}y = \frac{1}{x^2+1}$

f/ $xy' + 2y = x^2$

g/ $y' + 2y = 4x$

h/ $xy' - y = x^2 \arctan x$

Bài 15: Giải các phương trình vi phân cấp 2 tuyến tính với hệ số hằng (về phải có dạng mũ $e^{\alpha x} \cdot P_n(x)$)

a/ $y'' - 3y' + 2y = e^x$

b/ $y'' - 3y' = 2 - 6x$

c/ $y'' - y = e^{2x}$

d/ $y'' + 5y' + 6y = x.e^x, y(0) = -\frac{7}{144}, y'(0) = 0$.

e/ $y'' + 2y' + y = 4e^{2x}$