KHOA CNTT- HỘI SINH VIÊN
BỘ MÔN TOÁN

OLYMPIC TOÁN HỌC TOÀN HỌC VIỆN
NĂM HỌC 2023-2024

Môn Thi: GIẢI TÍCH

Thời gian: 100 phút

Ngày thi: 20/01/2024

Bài 1. (5.0 điểm) Cho dãy số (u_n) xác định bởi công thức truy hồi

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{5}{4}, \\ u_{n+1} = 2u_n - \dfrac{3}{4}, n \geq 1. \end{cases}$$

1) (2.0đ) Đặt $v_n = u_n - \dfrac{3}{4}, n \geq 1$, khi đó dãy (v_n) là cấp số nhân hay cấp số cộng?
2) (2.0đ) Tìm công thức của số hạng tổng quát u_n.
3) (1.0đ) Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{5^n}$.

Bài 2. (6.0 điểm)

1) (2.0đ) Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{4x}$.
2) Cho hàm số $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$.
   a) (2.0đ) Tính đạo hàm của hàm số $f(x)$ với $x \neq 0$.
   b) (2.0đ) Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ không tồn tại.

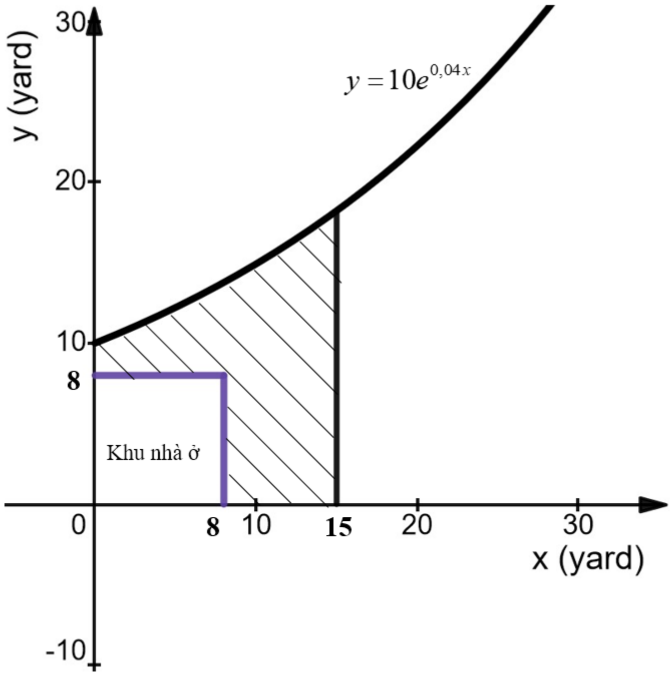
Bài 3. (4.0đ) Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x-1}}, x > 1$.

1) (2.5đ) Tìm giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số f trên miền $(1;+\infty)$.
2) (1.5đ) Chứng minh rằng hàm số $g(x) = x\int\limits_2^x f(t)\,dt$ là hàm số đồng biến trên miền $[2;+\infty)$.

   Từ đó, chứng minh rằng $xg'(x) \geq 8$ với mọi $x \in [2;+\infty)$.

Bài 4. (5.0 điểm)

1) (2.0đ) Tính tích phân bất định $I = \int 10e^{0,04x}dx$.
2) (3.0đ) Một khu nhà ở hình vuông trên mảnh đất của khu nghỉ dưỡng cạnh một hồ nước được thể hiện trong hình dưới đây.



Nếu hệ trục tọa độ được thiết lập như hình vẽ, với khoảng cách được đo bằng đơn vị yard thì mặt tiếp giáp với hồ là một phần đường cong $y = 10e^{0,04x}$. Giả sử khu nhà ở có giá trị 2000 đô la mỗi yard vuông và khu đất bên ngoài nhà ở (phần gạch chéo) có giá trị 800 đô la mỗi yard vuông.

Biểu diễn tổng giá trị khu bất động sản nghỉ dưỡng (bao gồm khu nhà ở và khu đất bên ngoài nhà ở) theo tích phân xác định của hàm số $y = 10e^{0,04x}$ và tính tổng giá trị khu bất động sản nghỉ dưỡng này.

--- **Hết** ---

<u>Ghi chú:</u> **+ Thí sinh không được sử dụng tài liệu.**

+ Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

ĐÁP ÁN ĐỀ THI GIẢI TÍCH
VÒNG 1
Ngày 20/01/2024

Bài 1.

1. $v_n = u_n - \frac{3}{4}$ nên $\begin{cases} v_1 = \frac{1}{2} \\ v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{3}{4} \end{cases}$.

   Ta có $v_{n+1} = 2u_n - 2.\frac{3}{4} = 2\left(u_n - \frac{3}{4}\right) = 2v_n$. Do đó (v_n) là cấp số nhân với $v_1 = \frac{1}{2}; q = 2$.

2. Do (v_n) là một cấp số nhân với $v_1 = \frac{1}{2}; q = 2$ nên số hạng tổng quát của (v_n) là

$$v_n = \frac{1}{2}.2^{n-1} = 2^{n-2}.$$

   Từ đó $u_n = v_n + \frac{3}{4} = 2^{n-2} + \frac{3}{4} = \frac{2^n + 3}{4}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{5^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n + 3}{4.5^n} = 0$.

Bài 2.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{2x+1} - 1}{4x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{4x\left(\sqrt{2x+1} + 1\right)} = \frac{1}{4}$. (Có thể sử dụng quy tắc L'Hospital để tính giới hạn).

2.

   a. $f'(x) = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$.

   b. Chọn (x_n) với $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ ta có $\begin{cases} x_n \to 0 \\ f'(x_n) \to -\infty \end{cases}$ khi $n \to \infty$.

   Chọn (x_n) với $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ ta có $\begin{cases} x_n \to 0 \\ f'(x_n) \to 1 \end{cases}$ khi $n \to \infty$.

   Do hai dãy (x_n) và (x_n) cùng tiến tới 0 khi $n \to \infty$ mà $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ nên $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ không tồn tại.

Bài 3.

1. $f'(x) = \frac{\sqrt{x-1} - \frac{x}{2\sqrt{x-1}}}{x-1} = \frac{x-2}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$.

   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

   Ta có bảng biến thiên

x	1		2		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy f đạt GTNN tại $x = 2$ và $f_{\min} = 2$.

2. $g'(x) = \int_2^x f(t)dt + xf(x)$.

   Với $x \geq 2$ ta có $f(x) > 0$ nên $\int_2^x f(t)dt \geq 0$ và $xf(x) > 0$.

   Do đó $g'(x) > 0$ với mọi $x \geq 2$ và g là hàm số đồng biến trên $[2;+\infty)$.

Bài 4.

1. $I = 250e^{0,04x} + C$.
2. Tổng diện tích khu nhà ở: $S_1 = 64$ (yard vuông).

   Tổng diện tích khu đất ngoài nhà ở: $S_2 = \int_0^{15} 10e^{0,04x}dx - 64$ (yard vuông).

   Tổng giá trị khu bất động sản là:

$$\begin{aligned} T &= 2\ 000S_1 + 800S_2 = 76\ 800 + 8\ 000\int_0^{15} e^{0,04x}dx \\ &= 76\ 800 + 200\ 000\, e^{0,04x}\Big|_0^{15} \\ &= 76\ 800 + 200\ 000\left(e^{0,6} - 1\right) \\ &= 241\ 233,7601\ \$ \end{aligned}$$

KHOA CNTT- HỘI SINH VIÊN
BỘ MÔN TOÁN

OLYMPIC TOÁN HỌC TOÀN HỌC VIỆN
NĂM HỌC 2023-2024

Môn Thi: Đại Số Tuyến Tính
Thời gian: 100 phút
Ngày thi: 20/01/2024

Câu I. (4,0 điểm) Cho ma trận

$$A=\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1\\ 1 & 1+b & 1\\ 1 & 1 & 1+c\end{bmatrix}.$$

a) (2,0đ) Tính định thức của ma trận A theo a, b, c.

b) (2,0đ) Tính giá trị của $\det A$ với a, b, c là ba nghiệm của phương trình $x^3-48x+4=0$ (biết phương trình có ba nghiệm phân biệt).

Câu II. (3,0 điểm) Cho A và B là hai ma trận vuông cấp 4 như sau:

$$A=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$ và $B=I-A$, với I là ma trận đơn vị cấp 4.

Tìm ma trận A^2 và B^2. Từ đó, hãy tìm ma trận A^{10} và B^{10}.

Câu III (2,0 điểm) Cho ma trận vuông cấp n:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & 0 & \dots & 0\\ 0 & a_{22} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & a_{nn}\end{bmatrix},$$

trong đó $a_{11}a_{22}...a_{nn}\neq 0$. Chứng minh rằng ma trận A khả nghịch và tìm ma trận A^{-1}.

Câu IV (3,0 điểm) Cho A và B là hai ma trận vuông cấp n thoả mãn

$$AB^2+A=2AB+I_n,$$

với I_n là ma trận đơn vị cấp n.

a) (1,25đ) Chứng minh rằng ma trận A là ma trận khả nghịch.

b) (1,75đ) Chứng minh rằng $AB=BA$.

Câu V (4,0 điểm) Một trường đại học tuyển sinh được một số lượng sinh viên nhất định và chia số sinh viên này thành 5 chuyên ngành khác nhau. Sinh viên năm đầu phải học các môn Toán nên cần mượn sách tại thư viện. Mỗi sinh viên của các chuyên ngành cần mượn số lượng sách tương ứng như trong bảng sau:

Một sinh viên cần mượn	Đại số	Giải tích	Hàm biến phức	PP tính	Xác suất
Chuyên ngành 1	3	1	1	0	0
Chuyên ngành 2	2	2	1	1	0
Chuyên ngành 3	2	2	1	1	1
Chuyên ngành 4	1	2	1	1	1
Chuyên ngành 5	1	1	0	0	0

Sau đó thư viện thống kê thì thấy rằng đã có 700 cuốn Đại số, 550 cuốn Giải tích, 300 cuốn Hàm biến phức, 200 cuốn Phương pháp tính và 120 cuốn Xác suất được mượn.

1) Gọi x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 lần lượt là số sinh viên của chuyên ngành 1, 2, 3, 4 , 5. Hãy lập hệ phương trình với các ẩn đó.
2) Xác định số sinh viên của từng chuyên ngành?

Câu VI (4,0 điểm) Ở một vùng dân cư, cứ mỗi năm lại có 5% dân số của thành thị chuyển về nông thôn sinh sống và 15% dân số của nông thôn chuyển về thành thị sinh sống. Giả sử năm 2020, số dân ở thành thị và nông thôn lần lượt là x_0, y_0 (người). Kí hiệu $X_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ là ma trận biểu diễn số dân của vùng thành thị và nông thôn năm 2020. Kí hiệu $X_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}$ $k = 1, 2, 3, ...$ là ma trận biểu diễn số dân của vùng thành thị và nông thôn năm $(2020 + k)$.

1) (1,5đ) Hãy tìm số dân ở thành thị và nông thôn năm 2021, tức là giá trị x_1, y_1, biểu diễn theo x_0 và y_0.
2) (0,5đ) Hãy biểu diễn X_1 dưới dạng $X_1 = AX_0$, trong đó A là một ma trận vuông cấp 2.
3) (1,0đ) Với ma trận A tìm được trong ý 2), chứng minh rằng $X_k = A^k X_0$.
4) (1,0đ) Xác định số dân ở thành thị và nông thôn năm 2023 biết số dân ở thành thị và nông thôn năm 2020 lần lượt là 10 000 000 và 800 000 người.

------------------------------ Hết -----------------------------

Ghi chú: **+ Thí sinh không được sử dụng tài liệu.**

+ Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Cán bộ ra đề	Cán bộ duyệt đề
Đỗ Thị Huệ	Vũ Thị Thu Giang